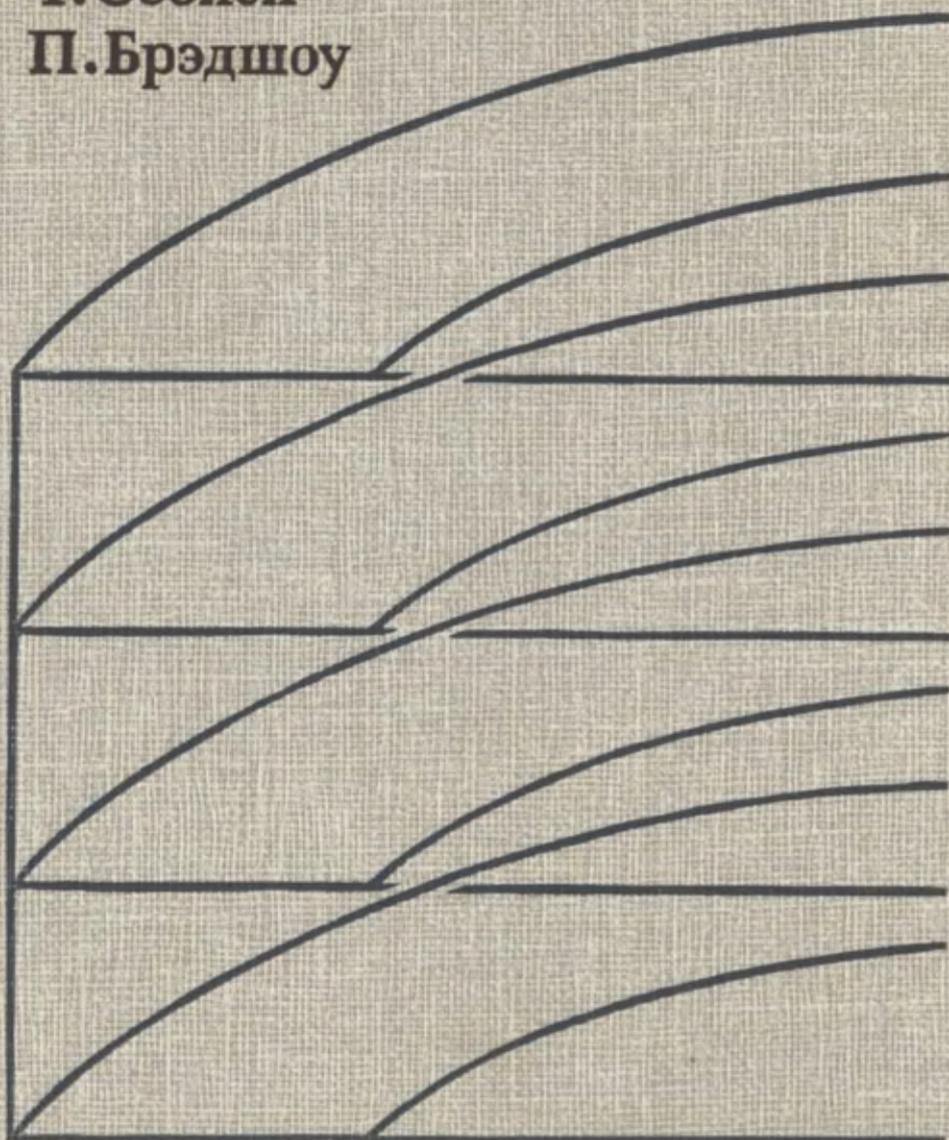


Конвективный теплообмен

Т. Себиси
П. Брэдшоу



**Конвективный
теплообмен**

Tuncer Cebeci, Peter Bradshaw
Physical and
Computational Aspects of
Convective Heat Transfer

Springer-Verlag
New York Berlin Heidelberg Tokyo 1984

Т. Себиси, П. Брэдшоу

КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

Физические
ОСНОВЫ
И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ
МЕТОДЫ

Перевод с английского
д-ра техн. наук С. С. Ченцова и
канд. техн. наук В. А. Хохрякова
под редакцией
д-ра техн. наук, проф. У. Г. Пирумова



Москва «Мир» 1987

ББК 31.31
С28
УДК 536.25

- С28 Себиси Т., Брэдшоу П.** Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы: Пер. с англ. — М.: Мир, 1987. — 592 с., ил.
- В монографии известных ученых из США и Англии изложены основы современной теории конвективного теплообмена для ламинарных и турбулентных течений. Представлены многочисленные примеры аналитического и численного решения прикладных задач теплообмена в каналах, струях и при обтекании тел. Приведены программы на языке Фортран.
- Для научных работников, инженеров, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в аэродинамике, химии, механике, теплофизике, энергетике, строительстве и некоторых областях экологии.

С $\frac{2303010000 — 247}{041(01) — 87}$ 52 — 87, ч. 1

ББК 31.31

*Редакция литературы по новой технике
и космическим исследованиям*

© 1984 by Springer-Verlag New York Inc.

All Rights Reserved. Authorized translation from English language edition published by Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo

© перевод на русский язык, с исправлениями, «Мир», 1987

Предисловие редактора перевода

Монография посвящена чрезвычайно актуальной теме — конвективному теплообмену. В отечественной литературе до сих пор не существовало книги, в которой с единых позиций рассматривались бы многочисленные и разнообразные проблемы конвективного теплообмена. Настоящая монография в определенной степени восполняет этот пробел и поэтому будет очень полезна советскому читателю.

Книга современна как по представленному материалу, так и по стилю изложения. Она сочетает в себе достоинства монографии и учебного пособия. Общее построение каждой главы и монографии в целом таково, что читателю предлагается физическая трактовка задачи, затем математическая ее постановка с соответствующими уравнениями и граничными условиями, методы решения (аналитические либо при отсутствии таковых численные) и, наконец, результаты решения и параметрического исследования. В последних двух главах изложены современные численные методы решения уравнений в частных производных, описывающих тепло- и массообмен в движущихся средах. В этих же главах дан текст соответствующих программ для ЭВМ на языке Фортран.

Материал в книге расположен по принципу постепенного усложнения, причем физическая интерпретация подкрепляется достаточно строгими математическими выводами. Приведены примеры решений конкретных и разнообразных прикладных задач обтекания, струйных течений, течений в каналах и трубах, течений с выталкивающими силами; при этом рассмотрены ламинарные и турбулентные течения жидкости и газа. Рассмотренные проблемы охватывают широкий диапазон чисел Прандтля, Рейнольдса и Маха для динамического и теплового пограничных слоев, в некоторых случаях с учетом взаимодействия поверхностей разрыва с пограничным слоем. Важно отметить, что подходы, изложенные в монографии, в ряде случаев пригодны и при изучении массообмена в жидкостях и газах.

Чрезвычайно полезны задачи, приведенные в конце каждой главы. Эти задачи позволяют при их решении представить современное состояние проблемы и глубже освоить и закрепить основные понятия, а также знакомят читателя с большим числом полезных физических констант для различных веществ.

6 Предисловие редактора перевода

Книга рассчитана на широкую аудиторию. Это — научные работники, инженеры, аспиранты и студенты, специализирующиеся в аэродинамике, химии, механике, теплофизике, энергетике, строительстве и некоторых областях экологии. Столь широкий круг читателей обусловлен тем, что в настоящее время научный подход к решению проблем теплообмена необходим во всех этих разнородных областях научной деятельности.

К сожалению, в монографии не нашли достаточного отражения работы советских ученых по рассматриваемой проблеме. Этот недостаток в некоторой мере восполняет дополнительный список литературы.

Перевод книги выполнен д-ром техн. наук С. С. Ченцовым (гл. 1—7) и канд. техн. наук В. А. Хохряковым (гл. 8—14).

У. Г. Пирумов

Дополнительная литература

- 1*. Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н. и др. Турбулентное смешение газовых струй. — М.: Наука, 1984.
- 2*. Авдусевский В. С., Ашратов Э. А., Иванов А. В., Пирумов У. Г. Сверхзвуковые неизобарические струи газа. — М.: Машиностроение, 1985.
- 3*. Авдусевский В. С., Галицейский Б. М., Глебов Г. А. и др. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. — М.: Машиностроение, 1975.
- 4*. Дородницын А. А. Ламинарный пограничный слой в сжимаемом газе. — ДАН СССР, 1942, 34, с. 234—242.
- 5*. Кокошинская Н. С., Павлов Б. М., Пасконов В. М. Численное исследование сверхзвукового обтекания тел вязким газом. — М.: Изд-во МГУ, 1980.
- 6*. Лапин Ю. В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. — М.: Наука, 1982.
- 7*. Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. — М.: Наука, 1984.
- 8*. Petrov G. I. Determination of the position of the supersonic flow closing shock wave in the channels of airbreathing jet engine. — Second Intern. Conf. of Space Eng., Reidel, Amsterdam, 1969.

Памяти наших отцов
Омара Зини Себиси
и
Джозефа Уильяма Ньюболда Брэдшоу

Предисловие

Монография посвящена важной для практики проблеме переноса тепловой энергии в различных течениях. Температурные поля в условиях конвективного теплообмена в отличие от температурных полей в условиях теплообмена излучением или теплопроводности в твердых телах связаны с полями скоростей, и поэтому авторы приводят достаточно полную информацию о переносе количества движения, чтобы монография содержала все сведения, необходимые для решения рассматриваемой задачи. Это оказалось возможным благодаря тесной связи между уравнениями, выражающими законы сохранения количества движения и энергии, что весьма существенно, поскольку конвективный теплообмен происходит как в потоках с большими перепадами температур, когда названные уравнения связаны уравнением состояния, так и в потоках с малыми перепадами температур, когда уравнение энергии зависит от уравнения движения, но последнее можно решать независимо от уравнения энергии.

Уравнения, выражающие законы сохранения скалярных параметров: тепловой энергии, концентрации компонентов и числовой плотности частиц, могут быть идентичными по форме и, следовательно, решение для одного из этих параметров применимо для другого. Поэтому, хотя в монографии рассматриваются различные задачи теплообмена, рассуждения и выводы применимы к задачам массообмена и переноса частиц. Однако при использовании подобной аналогии следует соблюдать осторожность, поскольку, например, идентичные граничные условия не всегда достигаются на практике и, кроме того, характеристики массообмена могут зависеть не от одной, а от нескольких переменных.

Книга предназначена для студентов старших курсов и аспирантов технических вузов, специализирующихся в аэродинамике, химии, строительстве, механике, а также в соответствующих отраслях экологии. Она может быть полезной разработчикам, конструкторам. Ее объем выбирался с учетом именно этого круга читателей. Она предоставляет возможность без особого труда решить конкретные задачи теплообмена, обращаясь к соответствующим графикам или корреляционным зависимостям. Читатели, желающие глубже разобраться в физических процессах, определяющих основные результаты и их ограничения, должны ознакомиться с соответствующими выводами и объяснениями.

Многие результаты, представленные в графической форме, были получены на основании методики численного расчета, описанной в гл. 13 и 14. Эта методика — результат многолетних исследований. Она представлена в

виде, позволяющем получать решения задач, описываемых уравнениями пограничного слоя, даже не имея особого навыка в численном решении уравнений. Эта особенность монографии очень важна ввиду быстрого развития численных методов. Расчетная методика описана в гл. 13 достаточно подробно, так чтобы читатель мог ею воспользоваться. Материалы, представленные в двух последних главах, могут послужить основой самостоятельного курса для аспирантов по численным методам решения параболических линейных и нелинейных уравнений в частных производных применительно к задачам гидромеханики и теплообмена.

Гл. 13 и 14 с различными комбинациями материалов, изложенных в других главах, были использованы нами в качестве основы курсов лекций для аспирантов Калифорнийского государственного университета в Лонг-Биче и Имперского колледжа. Наша задача состояла в том, чтобы студенты, применяя различные компьютеры, от персональных до стационарных, могли закрепить понимание классического и практического материала предыдущих глав и применить численные методы для решения новых задач. Для простоты мы ограничивались двумерными уравнениями, а в случае турбулентного течения простыми моделями турбулентности и теплообмена. Эти ограничения можно легко снять, но методика решения в представленном нами виде, по всей вероятности, вполне достаточна для большинства курсов лекций, читаемых студентам и аспирантам.

Некоторые преподаватели ввиду недостатка времени могут исключить из лекционных курсов для студентов и аспирантов раздел, посвященный применению численных методов. В этом случае гл. 1—8 могут послужить основой односеместрового цикла лекций для студентов старших курсов, а гл. 1—9 — основой более содержательного и объемного цикла для старшекурсников и аспирантов. В лекционном курсе для студентов можно опустить вывод уравнений, представленный в гл. 2, и подробно рассмотреть уравнения пограничного слоя, приведенные в гл. 3, их решение и приложения.

Работая над рукописью книги, мы обращались за советами и помощью ко многим сотрудникам. Особую благодарность мы выражаем профессорам К. Стюартсону и Дж. Уайтлоу за их постоянное внимание и ценные советы. Большую помощь нам оказали также Н. Барела, С. Шимке, К. Каупс, А. А. Хаттаб и К. С. Чжен. Наконец, мы выражаем глубокую признательность своим семьям за постоянную поддержку.

Тунсер Себиси
Питер Брэдшоу

Простейшим примером течения с теплообменом служит равномерное внешнее обтекание плоской поверхности, температура которой на всей длине или на некоторой ее части отлична от температуры набегающей жидкости (рис. 1.1). В несколько более сложных случаях поверхность может быть криволинейной, а скорость набегающего потока u_e может зависеть от продольной координаты x , но в большинстве практических задач теплообмена изменение u_e по y во внешнем потоке пренебрежимо мало по сравнению с изменением u по y в пристенной области. В этой области, называемой *пограничным слоем*, составляющая скорости u в направлении X возрастает от нуля на стенке до предельной величины, равной u_e . На практике за толщину пограничного слоя принимается значение y , при котором u достигает, скажем, $0,995 u_e$. Температура также быстро изменяется по y вблизи поверхности от температуры стенки T_w (индекс w относится к значениям на стенке) до температуры внешнего потока T_e , которую, как и u_e , часто можно считать независимой от y . Область большого температурного градиента называют *тепловым пограничным слоем*. Если жидкость имеет большой коэффициент теплопроводности, то тепловой пограничный слой толще динамического (определяемого изменением скорости) пограничного слоя, а если коэффициент теплопроводности жидкости мал, то динамический пограничный слой толще теплового. Ниже мы точнее определим, что означает «большой» и «малый» на основании сравнения интенсивности переноса тепла, обусловленного движением молекул, с интенсивностью переноса количества движения, обусловленного вязкостью жидкости, которая определяет скорость роста толщины динамического пограничного слоя. На рис. 1.1 внешний поток называется «невязким» не потому, что вязкость становится нулевой, а потому, что скорость во внешнем потоке изменяется так слабо, что вязкие напряжения пренебрежимо малы по сравнению, скажем, с напряжением поверхностного трения. Напряжение поверхностного трения определяет скорость «отвода» количества движения от внешнего потока, поскольку толщина пограничного слоя, в котором движется жидкость, имеющая меньшую скорость, увеличивается. Исследование интенсивности теплообмена



Рис. 1.1. Пограничный слой на частично нагретой пластине.
Нагретый участок заштрихован.

при отводе тепловой энергии от потока (при $T_w < T_e$) или ее подводе к потоку (при $T_w > T_e$), является основным предметом данной монографии.

На рис. 1.2 представлены некоторые примеры течений с теплообменом. Закономерности изменения теплообмена в круглых трубах или каналах некруглого сечения (рис. 1.2, *a*) во многом аналогичны соответствующим закономерностям в пограничном слое, несмотря на то что ядро равномерного потока существует лишь на начальном участке до слияния утолщающихся пограничных слоев на оси канала. Теплообмен в струях типа показанной на рис. 1.2, *б* сам по себе не заслуживает большого интереса, поскольку тепло просто рассеивается на большой объем жидкости, а не передается твердой поверхности, однако необходимо рассчитать профиль температуры в струе, используемой для нагрева или охлаждения твердой стенки (рис. 1.2, *в*). Схема, показанная на рис. 1.2, *г*, может относиться и к пламени паяльной лампы, и к выхлопной струе ракетного двигателя; в обоих случаях существенную роль могут играть выталкивающие силы, как и в задаче рассеяния загрязняющих веществ при выходе столба дыма из дымовой трубы или даже в задаче теплообмена между системой отопления или кондиционирования и комнатным воздухом, температура которого регулируется этими устройствами. Перенос массы или загрязняющих частиц описывается примерно такими же уравнениями, которыми определяется перенос тепла. На рис. 1.2, *з* показан пример наиболее интенсивной теплоотдачи от газового потока к твердому телу при спуске орбитального корабля. Хотя монография не содержит математического аппарата, позволяющего рассчитать тепловой поток к поверхности такого корабля, она помогает качественно понять основные закономерности проблемы и получить количественные ре-

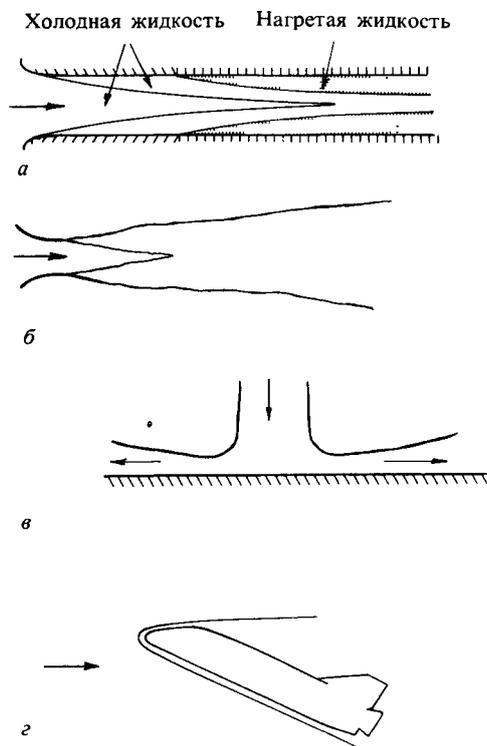


Рис. 1.2. Примеры течения с теплообменом.

a — течение в трубе с ненагретым начальным участком; *б* — сливающиеся слои, образующие струю; *в* — натекание струи на твердую поверхность; *г* — вход орбитального корабля в атмосферу (пограничный слой и отрывное течение при наличии теплоотдачи к твердой поверхности).

зультаты для более простых задач с помощью формул, диаграмм и программ численного расчета, представленных ниже.

Поскольку конвективный теплообмен по определению связан с полем течения и поскольку уравнения, описывающие перенос тепла или загрязняющих веществ, по форме очень близки уравнениям, описывающим характеристики поля течения (количества движения), ниже проводится обсуждение проблемы переноса количества движения, достаточно подробное, чтобы монография была вполне самостоятельной и содержала все необходимые сведения. Более детальный анализ закономерностей переноса количества движения можно найти в предыдущей работе Себиси и Брэдшоу [1]. В данной монографии результаты, представленные в работе [1], обобщаются на случай течения с большими перепадами плотности, обусловлен-

ными либо непосредственно большими перепадами температуры, либо большими перепадами давления (приводящими к большим перепадам температуры) в высокоскоростных течениях, возникающих при обтекании самолета или космического аппарата. В этих случаях перенос тепла влияет на перенос количества движения, поскольку в уравнение количества движения входит плотность и, следовательно, это уравнение следует решать совместно с уравнением энергии. В большинстве случаев течение в пограничном слое, канале или струе является турбулентным, например паяльная лампа гудит, поскольку турбулентность приводит к нестационарной скорости горения и возникающие в результате пульсации плотности и давления порождают шум. Турбулентность, как правило, существенно интенсифицирует процессы переноса тепла и количества движения; этот вопрос подробно обсуждается в дальнейшем.

1.1. Перенос количества движения

Второй закон Ньютона как для твердого тела, так и для жидкости гласит

$$\begin{aligned} \text{Изменение количества движения по времени} &= \\ &= \text{Приложенная сила.} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Применительно к единице массы вязкой жидкости с плотностью ρ получаем

$$\begin{aligned} \text{Ускорение} &= \\ &= \frac{-(\text{Градиент давления}) + \text{Градиенты вязких напряжений}}{\rho} + \\ &+ \text{Поверхностные силы на единицу массы,} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где знак минус появляется потому, что, согласно общепринятому правилу, давление считается положительным, когда оно действует в направлении внутрь элементарного объема, в то время как вязкие нормальные («прямые») напряжения положительны, если они действуют изнутри объема. Вязкость μ представляет собой отношение вязкого (нормального или сдвигового) напряжения (разд. 2.1) к удвоенной соответствующей скорости деформации. Например, нормальное напряжение, действующее в направлении x , равно $2\mu(\partial u/\partial x)$, а напряжение сдвига в направлении x вследствие простого сдвига $\partial u/\partial y$ равно $\mu(\partial u/\partial y)$ или в более общем виде $\mu(\partial u/\partial y + \partial v/\partial x)$, где u и v — составляющие скорости в направлениях x и y соответственно. Коэффициент 2 появляется потому, что

скорость деформации логично определяется как производная деформации по времени, как это принято в механике твердого тела, в то время как вязкость была впервые определена как отношение напряжения трения к du/dy в простом сдвиговом течении. Сдвиговые течения типа пограничного слоя (рис. 1.1), течения в струе или канале (рис. 1.2) являются самыми характерными примерами течений с большими градиентами вязких напряжений, поскольку лишь в очень тонком слое вязкое напряжение — здесь $\mu(du/dy)$ — может быстро возрасти от нуля в «невязком» внешнем течении (рис. 1.1) до сравнительно большой величины и таким образом создается достаточно высокий *градиент* напряжения, влияющий на ускорение, согласно уравнению (1.2). В дальнейшем мы часто будем называть напряжение сдвига, действующее в направлении x в тонком вязком слое, просто *сдвиговым (касательным) напряжением* τ , так что

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}. \quad (1.3)$$

Коэффициент динамической вязкости μ и коэффициент кинематической вязкости $\nu = \mu/\rho$ зависят от температуры (рис. 1.3 и 1.4), и если существует градиент температуры в направлении y , то он оказывает влияние на градиент вязкого напряжения $\mu(du/dy)$. Изменение коэффициента вязкости μ *воздуха* по температуре достаточно точно описывается законом Сатерленда

$$\mu = 1,45 \times 10^{-6} T^{3/2} / (T + 110) \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}, \quad (1.4)$$

где температура T выражена в кельвинах (К). При температурах, близких к нормальной (288 К), соотношение (1.4) можно аппроксимировать степенным законом $\mu \propto T^{0,76}$.

В турбулентных потоках (разд. 2.3) к (вязкому) переносу количества движения вследствие соударений молекул добавляется перенос количества движения вследствие нестационарного вихревого движения. Хотя использование аналогии между движением вихрей и молекул может привести к серьезным заблуждениям, считается общепринятым и удобным рассматривать дополнительную скорость переноса количества движения, осредненную по времени, как эквивалент дополнительного кажущегося напряжения, так что для осредненного по времени движения в турбулентном потоке удовлетворяется уравнение движения (1.2), если к градиентам вязких напряжений прибавить градиенты турбулентных напряжений. Турбулентные напряжения простым образом связаны с осредненными по времени произведениями пульсационных компонентов составляю-

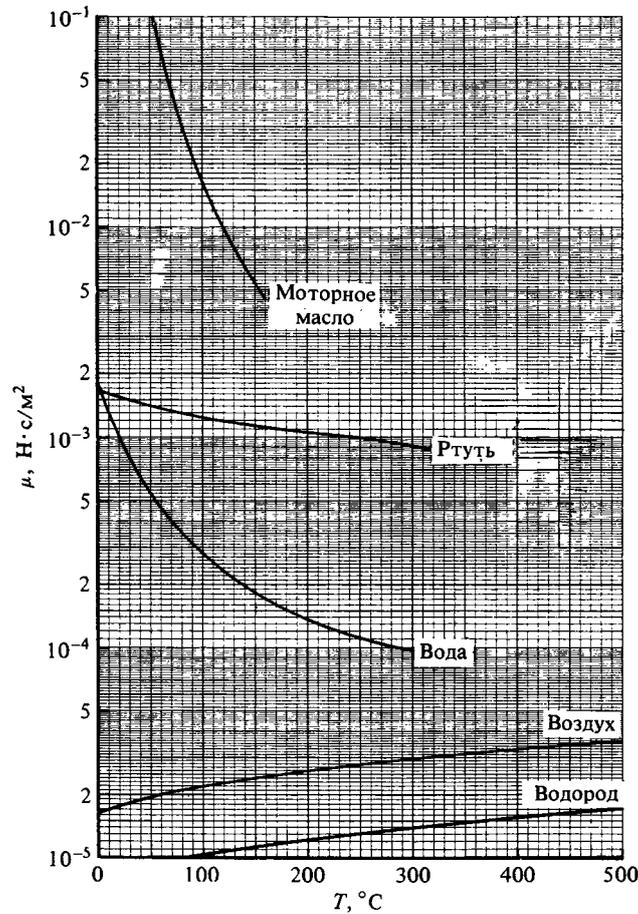


Рис. 1.3. Зависимость коэффициента динамической вязкости различных веществ от температуры.

Даже для газов величина μ практически не зависит от давления.

щих скорости, и уравнения для турбулентных напряжений можно получить, проводя осреднение по времени исходных уравнений движения. Однако уравнения для турбулентных напряжений содержат довольно сложные моменты пульсационных составляющих, и единственным способом замкнуть уравнения (т. е. сделать число уравнений равным числу неизвестных параметров) является использование эмпирических данных о закономерностях изменения осред-

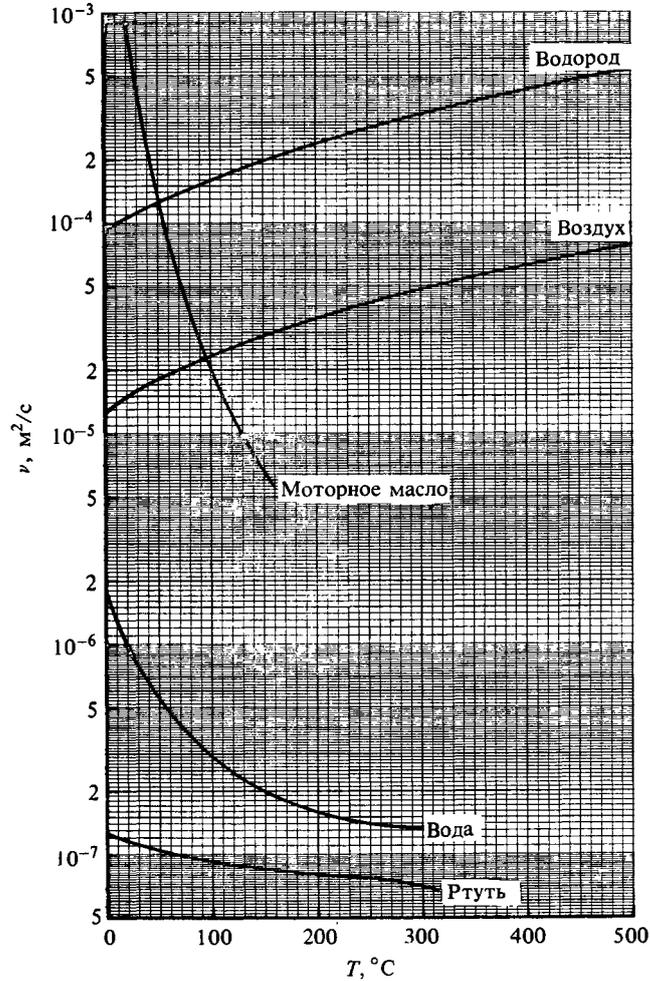


Рис. 1.4. Зависимость коэффициента кинематической вязкости различных веществ от температуры.

Для газов величина $\nu \equiv \mu/\rho$ прямо пропорциональна давлению.

ненных по времени характеристик турбулентности. Следовательно, для расчета параметров турбулентного потока требуются аппроксимации экспериментальных данных, помимо тех приближений, которые для удобства вычислений применяются даже в случае полностью ламинарного вязкого течения. Для удобства проведения расчетов приходится применять осреднение по времени, поскольку

пока еще не созданы столь мощные ЭВМ, которые позволили бы решить зависящие от времени уравнения движения для чрезвычайно сложной картины пульсаций скорости в турбулентном потоке. Большинство течений, представляющих инженерный интерес, являются турбулентными; поэтому требуются методы расчета, которые при разумных затратах позволяют получить разумную точность, причем определение этой «разумности» изменяется в соответствии с рассматриваемой задачей. Поскольку расчет турбулентного потока является, по существу, расчетом ламинарного потока с дополнительными составляющими напряжений, удобно сначала рассмотреть проблемы ламинарного течения, а затем перейти к анализу турбулентных течений.

1.2. Тепло- и массообмен

«Тепло — это то, что передается от одной системы к другой, имеющей более низкую температуру, под действием перепада температур, когда обе системы вступают в контакт друг с другом. . . Тепло, как и работа, — переносимая величина; оно никогда не содержится *внутри* тела».

Эта цитата из монографии Кинана «Термодинамика» [2] объясняет, почему «тепло» фигурирует в исследовании теплообмена только как термин. Количественные уравнения «сохранения», аналогичные уравнениям сохранения количества движения, записываются в переменных — тепловая внутренняя энергия единицы массы e и энтальпия единицы массы h . Перенос тепла к телу вызывает увеличение его тепловой энергии, так же как работа, производимая над телом, вызывает возрастание его количества движения и кинетической энергии. Хотя e и h имеют размерность энергии на единицу массы, существует чрезвычайно полезная аналогия между переносом тепла (тепловой энергии) и переносом *количества движения* (а не кинетической энергии). Отметим, что обычно уравнение сохранения, на основании решения которого рассчитывается температура жидкости, принято называть уравнением «энергии», в то время как на самом деле оно представляет собой уравнение энтальпии или уравнение «полной энтальпии» (суммы статической энтальпии и кинетической энергии), а не уравнение внутренней энергии. В низкоскоростных потоках с постоянной удельной теплоемкостью энтальпия представляет собой внутреннюю энергию, умноженную на отношение удельных теплоемкостей; вклад кинетической энергии в полную энтальпию мал, и поэтому уравнения для этих трех параметров энергии совпадают.

Первый закон термодинамики применительно к твердому телу или к некоторому объему жидкости гласит:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Изменение} \\ \text{энергии по} \\ \text{времени} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{l} \text{Изменение работы} \\ \text{внешних сил по} \\ \text{времени} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{l} \text{Тепловой} \\ \text{поток} \end{array}} \quad (1.5)$$

Здесь понятие энергии включает потенциальную энергию, кинетическую энергию и тепловую внутреннюю энергию (пока мы не учитываем изменения энергии вследствие горения или других химических реакций). Уравнение только для внутренней энергии можно получить, вычитая из уравнения (1.5) уравнение кинетической энергии и тривиальное «гидростатическое» уравнение для потенциальной энергии. Кроме того, как будет показано ниже, в низкоскоростном потоке при наличии теплообмена изменения кинетической энергии малы по сравнению с изменениями внутренней тепловой энергии, а первый член в правой части уравнения (1.5) обычно пренебрежимо мал по сравнению с членом, выражающим подвод тепла. Для единицы массы теплопроводной жидкости плотностью ρ уравнение (1.5) принимает вид

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Изменение удельной} \\ \text{внутренней} \\ \text{энергии по времени} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{l} \text{Изменение работы} \\ \text{на единицу массы} \\ \text{по времени} \end{array}} - \frac{1}{\rho} \boxed{\begin{array}{l} \text{Градиенты} \\ \text{плотности} \\ \text{кондуктивного} \\ \text{теплового} \\ \text{потока} \end{array}}, \quad (1.6)$$

где знак минус перед последним членом обусловлен тем, что положительный градиент плотности теплового потока в направлении, скажем, вверх по вертикали означает, что с вершины тела отводится больше тепла, чем подводится у основания. Коэффициент теплопроводности k представляет собой отношение плотности кондуктивного теплового потока к соответствующему градиенту температуры (со знаком минус), например плотность теплового потока в направлении y , обозначаемая обычно \dot{q}_y , определяется для любой простой жидкости законом термической проводимости, или теплопроводности¹⁾,

$$\dot{q}_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (1.7)$$

¹⁾ Соотношение (1.7) называют законом Фурье. — Прим. ред.

Тепловой поток связан лишь с одним направлением, в то время как напряжение связано с двумя (направлением действия напряжения и направлением нормали к поверхности, на которую действует напряжение), но в итоге члены плотности теплового потока в уравнении (1.6) по математической форме аналогичны членам вязкого напряжения в уравнении (1.2), как это будет показано в гл. 2.

Уравнение массообмена, соответствующее уравнению (1.6), записывается следующим образом:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Изменение массовой} \\ \text{концентрации} \\ \text{компонента по времени} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{l} \text{Скорость образования} \\ \text{компонента на единицу} \\ \text{массы} \end{array}} - \boxed{\begin{array}{l} \text{Градиенты плотности} \\ \text{потока массы} \\ \text{вследствие диффузии} \end{array}}, \quad (1.8)$$

где компонентом считается примесь, масса которой рассматривается (например, краска в воде или трассирующий газ в воздухе), а массовая концентрация равна массе примеси в единице массы смеси. Коэффициент диффузии D равен просто отношению плотности потока массы вследствие диффузии к соответствующему градиенту массовой концентрации (со знаком минус); он зависит от свойств примеси и основной жидкости. Образование компонентов может происходить при химической реакции, а поскольку скорость реакции обычно зависит от концентраций как реагирующих веществ, так и продуктов реакции, возможно понадобится решить несколько уравнений типа (1.8) с учетом уравнения реакции; в некоторых реакциях, особенно при горении, выделяется тепло, так что придется решать одновременно и уравнение энергии. Уравнение (1.8) по форме аналогично уравнению (1.6), если не считать различия в обозначениях.

Осредненные по времени уравнения, описывающие тепло- или массообмен в турбулентных течениях, содержат дополнительные кажущиеся скорости переноса, связанные простыми соотношениями с осредненными произведениями пульсаций температуры и скорости в направлении переноса. Как и в случае турбулентного переноса количества движения, можно получить точные уравнения для скоростей переноса, осредняя по времени исходные уравнения, но опять-таки требуются эмпирические данные, чтобы получить замкнутую систему уравнений, которую можно было бы решить.

Важно понимать, что поле пульсаций температуры в высокотемпературном турбулентном потоке полностью обусловлено полем пульсаций скорости, вызывающих интенсивное перемешивание жидкости. Если в момент времени $t = 0$ каким-то образом устранить все пульсации скорости, то в последующие моменты распределение температуры по пространству будет оставаться неизменным, если не считать изменений, обусловленных теплопроводностью и средним движением.

1.3. Связь между переносом тепла и переносом количества движения

Согласно упрощенной кинетической теории газов, тепло и количество движения переносятся, или «диффундируют», совершенно одинаковым образом, путем соударений молекул. Параметром, аналогичным вязкости μ , является параметр k/c_p ; оба они имеют одинаковую размерность, так что величина $\mu c_p/k$ безразмерна и в соответствии с упрощенной кинетической теорией газов равна единице. Этот безразмерный комплекс $\mu c_p/k$ называется числом Прандтля Pr :

$$Pr \equiv \frac{\mu c_p}{k} = \frac{\nu}{k/\rho c_p}, \quad (1.9)$$

где $\nu = \mu/\rho$ — коэффициент кинематической вязкости, а $k \equiv k/(\rho c_p)$ — коэффициент теплопроводности. Действительная величина Pr для двухатомных газов равна примерно 0,7 и практически не зависит от температуры. Отличие от единицы обусловлено важной ролью колебательных и вращательных степеней свободы молекулярного движения, которая не учитывается в упрощенной кинетической теории. Удельная теплоемкость газа также почти постоянна; k изменяется в зависимости от температуры примерно по такому же закону, что и μ (рис. 1.5). Для жидкостей число Прандтля резко снижается с увеличением температуры (рис. 1.5) ввиду быстрого снижения μ , в то время как k и c_p остаются приблизительно постоянными. Для жидких металлов число Прандтля мало и может достигать примерно 0,02, поскольку металлы, в особенности жидкие, обладают высоким коэффициентом теплопроводности. Для воды значение Pr снижается примерно от 7 при комнатной температуре до 1,7 при температуре кипения, в то время как для смазочных масел, имеющих очень большой коэффициент вязкости, значение Pr может достигать 1000 и выше.

Поскольку число Прандтля выражает отношение способности

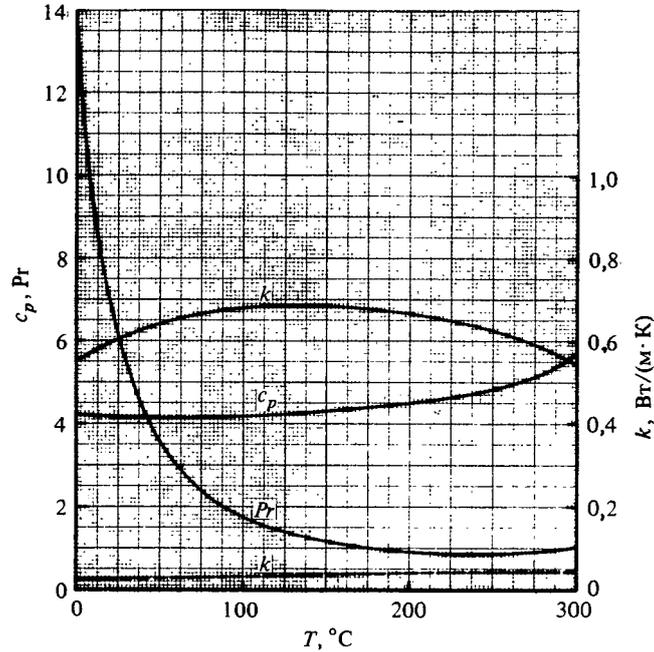


Рис. 1.5. Температурная зависимость k для воздуха (штриховая линия) и воды, а также c_p и Pr для воды. (Единицы измерения величин приведены в табл. 1.1.)

жидкости переносить количество движения к ее способности переносить тепло, то ввиду широких пределов изменения Pr для обычных веществ распределения температуры в конкретном течении могут быть весьма различными в зависимости от рабочего тела. Например, как будет показано в разд. 4.2, толщина нагретого слоя жидкости (теплового пограничного слоя) в безградиентном по давлению ламинарном потоке около равномерно нагреваемой плоской пластины (частный случай частично нагреваемой пластины показан на рис. 1.1) примерно в $Pr^{-0,34}$ раз больше толщины динамического пограничного слоя. На рис. 1.6 представлены некоторые численные результаты для такого течения. В этом (весьма частном) случае *только* при $Pr = 1$ профиль относительной избыточной температуры $(T_w - T)/(T_w - T_e)$ совпадает с профилем безразмерной скорости u/u_e , т. е. для всех y

$$\frac{T_w - T}{T_w - T_e} = \frac{u}{u_e} \quad (1.10)$$

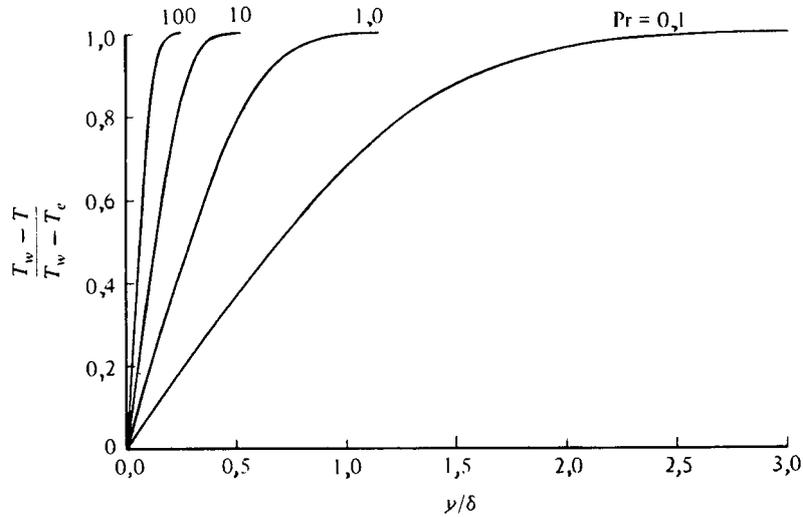


Рис. 1.6. Профили температуры в тепловом пограничном слое на равномерно нагретой плоской пластине.

δ — толщина динамического пограничного слоя; разность $T_w - T_c$ считается достаточно малой, так что изменением плотности можно пренебречь. При $Pr = 1$ профиль температуры совпадает с профилем скорости u/u_e , который остается неизменным при любом числе Прандтля, если можно пренебречь изменением плотности.

Индексы w и e относятся к условиям на поверхности (стенке) и во внешнем потоке соответственно. Это очень простое соотношение даже при $Pr = 1$ справедливо лишь в некоторых случаях, когда граничные условия для уравнения количества движения и для уравнения тепловой энергии аналогичны. Итак, имеется существенная аналогия и имеются существенные различия между молекулярным переносом тепла и молекулярным переносом количества движения. В турбулентном потоке механизмы переноса тепла и количества движения *приблизительно* аналогичны. (В гл. 6 будет определено «турбулентное число Прандтля», которое почти всегда близко к 1 и довольно слабо зависит от молекулярного числа Прандтля всюду, за исключением области вблизи поверхности твердого тела.)

Как упоминалось в разд. 1.2, теплообмен и массообмен описываются уравнениями, которые в простейших случаях идентичны, и нужно лишь заменить тепловую энергию на массовую концентрацию, а коэффициент кинематической вязкости ν на коэффициент диффузии D . Следовательно, между процессами переноса массы и количества движения наблюдается примерно такая же или близкая

аналогия, как между процессами переноса тепла и количества движения. Отношение ν/D , аналогичное числу Прандтля $\nu/(k/\rho c_p)$, называется *числом Шмидта* Sc . Оно зависит от свойств основной жидкости и от свойств примеси, масса частиц которой во много раз больше массы молекул жидкости (Sc составляет около 700 при диффузии соли в воде и 10^3 — 10^4 при диффузии дыма или частиц краски) и которая испытывает лишь слабое воздействие от соударений с молекулами жидкости. Уравнения становятся несправедливыми для больших частиц, которые не следуют макроскопическому движению жидкости, и поэтому исследование больших частиц выходит за рамки нашей монографии (начальные сведения об этой проблеме можно найти в работе Ламли [3]). Однако почти все рассуждения относительно теплообмена, представленные в последующих главах, можно непосредственно применить к массообмену, и дальнейшие обобщения, необходимые в случае двух или более примесей (например, топлива и продуктов сгорания в окислительной среде), принципиально ясны, хотя и сложны для расчета.

Присутствие члена, содержащего давление, в уравнении (1.2) и в других уравнениях, описывающих поле скоростей, и его отсутствие в уравнении (1.6) и в других уравнениях, описывающих поле температур (не считая членов, характеризующих работу, которые в низкоскоростном потоке малы), свидетельствует о том, что точная аналогия между процессами переноса тепла и количества движения возможна лишь в потоке при постоянном давлении. Значит, эта аналогия ограничивается случаем *ламинарного* течения с постоянным давлением, поскольку в турбулентном потоке давление всегда зависит от времени. Дополнительное необходимое условие заключается в том, что число Прандтля должно быть равно единице; это условие приближенно выполняется для обычных газов, для которых $Pr = 0,7$, так что случай $Pr = 1$ в какой-то степени представляет интерес и с количественной точки зрения. Наиболее существенное из всех ограничений состоит в том, что граничные условия для скорости и температуры должны быть аналогичными. Например, даже если $Pr = 1$, профили скорости и температуры в ламинарном пограничном слое на нагреваемой плоской пластине при скорости внешнего потока u_e , не зависящей от x , имеют одинаковую форму *только* в том случае, когда температура поверхности также не зависит от x (рис. 1.1 и разд. 2.3). Для некоторых других ламинарных течений, представляющих практический интерес, получаются точно такие же соотношения, как соотношение (1.10). Ламинарная струя слабо нагретого газа с $Pr = 1$, в которой начальные профили скорости и избыточной температуры подобны, будет

распространяться автомодельно, если температура неподвижной среды, в которой распространяется струя, постоянна. Отметим, что хотя форма профилей скорости зависит от отношения скорости струи к скорости спутного потока, форма профиля избыточной температуры не зависит от отношения температуры струи к температуре спутного потока, пока это отношение остается близким к единице. Это обусловлено тем, что при постоянных плотности и коэффициенте теплопроводности уравнения тепловой энергии становятся линейными и решения можно сложить или умножить на произвольную постоянную.

Хотя аналогия между процессами переноса тепла и количества движения обычно не является точной, она всегда достаточно верна, чтобы ее можно было использовать для качественных оценок даже в турбулентном течении, особенно при выборе методов решения уравнений теплообмена. Часто она настолько точна, что безразмерный параметр температуры можно приравнять соответствующему безразмерному параметру скорости, умноженному на «коэффициент аналогии», определяемый на основании экспериментальных данных. Наиболее известным примером является *коэффициент аналогии Рейнольдса*, представляющий собой отношение параметра теплообмена, называемого *числом Стантона* St ,

$$St = \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p (T_w - T_e) u_e}, \quad (1.11)$$

к половине местного коэффициента трения

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho u_e^2}. \quad (1.12)$$

Здесь \dot{q}_w — плотность теплового потока к поверхности, а τ_w — напряжение поверхностного трения. Как правило, ожидается, что коэффициент аналогии Рейнольдса близок к единице¹⁾. Поэтому наиболее сложным вопросом расчета некоторого параметра поля температур является вопрос расчета аналогичного параметра поля скоростей. Аналогия Рейнольдса является полезным общим правилом, из которого, правда, имеются некоторые исключения (например, тепловой поток в критической точке или в точке присоединения оторвавшегося течения обычно выше, чем в других областях

¹⁾ На самом деле он близок к обратной величине молекулярного или турбулентного числа Прандтля ($Pr^{-0,66}$ согласно экспериментальным данным для ламинарного течения).

потока, хотя напряжение поверхностного трения в этих точках равно нулю). Однако успех применения метода аналогии в большинстве случаев не способствовал разработке более точных методов расчета теплообмена, поскольку обычно считалось, что повышение точности не окупает затраченных усилий, и это часто справедливо, но не всегда.

Поле скоростей в потоке с «постоянными свойствами», т. е. с номинально постоянными ρ и μ (разд. 1.4), можно рассчитать методами, применяемыми для действительно изотермических течений, не рассматривая поле температур [1]. Затем можно рассчитать поле температур, решая уравнения переноса тепловой энергии при известных составляющих скорости. Ввиду линейности уравнений переноса энергии для течения с постоянными свойствами можно применять суперпозицию решений, чтобы удовлетворить требуемым граничным условиям. (На практике расчеты скорости и температуры ведутся параллельно, чтобы уменьшить необходимый объем машинной памяти (гл. 13).) Для решения уравнения энтальпии, которое часто называют уравнением энергии, применяются численные методы, являющиеся несколько модифицированными методами решения уравнения движения.

1.4. Сопряженное и несопряженное течения¹⁾

В некоторых задачах теплообмена перепады температуры малы по сравнению с абсолютной температурой (и перепады давления малы по сравнению с абсолютным давлением). Следовательно, изменения плотности, вязкости и коэффициента теплопроводности, обусловленные этими температурными перепадами, достаточно малы и ими можно пренебречь в уравнениях движения и энергии, несмотря на то что рассчитывается изменение тепловой энергии, обусловленное теми же самыми температурными перепадами. Этот случай представляет собой приближение *несопряженного течения*, или *течения с постоянными свойствами*, причем термин «свойство» употребляется в строгом термодинамическом смысле. Данное

¹⁾ В монографии используются термины «сопряженное» и «несопряженное» течения (coupled and uncoupled flows), которые не приняты в отечественной литературе. «Несопряженным» авторы называют течение, при математическом описании которого можно разделить динамическую и тепловую задачи, т. е. независимо решать уравнения движения и энергии. В противном случае, когда в силу физических особенностей течения для его описания необходимо решать совместно уравнения движения и энергии, используется термин «сопряженное» течение. Несмотря на некоторую неоднозначность этих терминов, они вполне приемлемы и поэтому сохранены в монографии. — Прим. ред.

приближение используется в численных расчетах, результаты которых представлены на рис. 1.6. Кроме того, при решении задач естественной конвекции (гл. 9) часто можно пренебречь изменениями плотности во всех уравнениях, кроме самого члена, выражающего выталкивающую силу; такое приближение получило название *приближение Буссинеска* по имени автора этой идеи. Можно использовать и модифицированные варианты подобных приближений; например, в течениях капельной жидкости можно учесть зависимость вязкости от температуры, в то время как изменениями плотности и коэффициента теплопроводности обычно пренебрегают.

Отметим, что если теплофизические свойства рабочего тела существенно зависят от температуры, то течение и теплообмен нельзя достаточно полно охарактеризовать значениями числа Рейнольдса, числа Прандтля и др., рассчитанными при одной характерной температуре. Рассмотрим течения в пограничном слое на плоской пластине типа показанного на рис. 1.1 при одинаковых значениях чисел Рейнольдса и Прандтля, рассчитанных по параметрам набегающего потока, и использовании двух различных капельных жидкостей (например, бензин при комнатной температуре имеет примерно такое же число Прандтля, что и вода при 50 °С). Если температура пластины выше температуры потока, то числа Рейнольдса и Прандтля, рассчитанные по параметрам *на стенке*, будут различными для обеих жидкостей, так что два температурных поля не могут быть полностью одинаковыми и простые результаты типа соотношения (1.10) и его обобщения на случай $Pr \neq 1$ не будут более справедливыми. Если приближение течения с постоянными свойствами несправедливо, при проведении расчетов необходимо задать законы изменения теплофизических свойств с изменением температуры.

В задачах конвективного теплообмена при больших температурных перепадах уравнения, описывающие поле температур, становятся нелинейными и взаимосвязанными («сопряженными») с уравнениями, описывающими поле скоростей, поскольку вязкость (а в газовых потоках и плотность) зависит от температуры. Однако эта взаимосвязь обычно довольно слаба, и на практике применяются методы численного решения уравнений переноса тепла и количества движения, близкие к методам решения линейных уравнений. В дальнейшем будет показано, что современные методы численного решения уравнений переноса тепла и количества движения легко обобщаются на случай сопряженных задач, хотя для турбулентных течений могут потребоваться дополнительные экспериментальные

данные. Следовательно, решение сопряженных задач получить значительно легче, чем в те времена, когда теплообмен рассчитывался методами, целиком основанными на эмпирических соотношениях с привлечением довольно грубых степенных законов зависимости теплофизических свойств от отношения абсолютных температур.

Рассмотрение ламинарных и турбулентных течений начинается в последующих главах с анализа несопряженных задач с дальнейшим переходом к сопряженным задачам. Читателю, изучившему главы, посвященные несопряженным задачам, не доставят особых затруднений главы, в которых рассматриваются сопряженные задачи независимо от того, чем обусловлено «сопряжение»: «кинетическим нагревом» в высокоскоростных потоках или большими перепадами температур в потоках с низкими числами Маха. Именно потому, что в высокоскоростных газовых потоках всегда происходит внутренний теплообмен, даже если твердые поверхности теплоизолированы, высокоскоростные сдвиговые слои рассматриваются в этой книге совместно с низкоскоростными течениями при больших перепадах температур. При высоких скоростях потока в уравнение энтальпии входят два дополнительных члена, один из которых представляет собой энтальпию, эквивалентную работе, произведенной над жидкостью градиентами давления, а второй — скорость диссипации кинетической энергии (средней или турбулентной) с переходом в тепловую внутреннюю энергию под действием вязких напряжений. Оба этих фактора вызывают изменение энтальпии жидкости и не имеют аналогии в уравнениях, описывающих поле скоростей (кроме экзотических распределений действующих на тело сил). Горение и другие химические реакции также оказывают влияние на энтальпию жидкости и, кроме того, на теплофизические свойства жидкости, обусловленные изменением химического состава.

1.5. Единицы измерения и размерности

Во всей монографии используются метрические единицы и принята система СИ (Международная система единиц), основными единицами которой являются метр, килограмм, секунда и кельвин. Единицей силы является ньютон (Н), а единицей работы, механической и тепловой энергии является произведение ньютона на метр, или джоуль (Дж). В табл. 1.1 приведены коэффициенты перевода единиц измерения Британской системы в систему СИ. Основными единицами Британской системы являются фут, фунт-масса, фунт-сила, секунда и градус Фаренгейта, а в качестве единицы измерения теп-

Таблица 1.1. Коэффициенты перевода единиц Британской системы в единицы системы СИ ¹⁾

Физическая величина	Британская система	Система СИ	Коэффициент перевода
Удельная теплоемкость c_p	БТЕ/(фунт · °F)	кДж/(кг · К)	4,1868
Коэффициент теплопроводности k	БТЕ/(ч · фут · °F)	Вт/(м · К)	1,7307
Коэффициент динамической вязкости μ	(фунт-сила · с)/фут ²	Н · с/м ²	47,88
	фунт/(фут · с)	Н · с/м ²	1,4882
Коэффициент кинематической вязкости ν	фут ² /с	м ² /с	0,0929
Плотность ρ	фунт/фут ³	кг/м ³	16,023

¹⁾ Чтобы перейти от единиц Британской системы к единицам системы СИ, нужно умножить числовое значение, выраженное в единицах Британской системы, на коэффициент перевода.

ловой энергии применяется британская тепловая единица (БТЕ). Более подробная таблица представлена в приложении А¹⁾. В таблицах, представленных в приложении В, указаны теплофизические свойства типичных газов, капельных жидкостей и твердых тел. Хотя данная монография посвящена конвекции, указаны и свойства твердых тел, поскольку инженеру часто приходится рассчитывать теплообмен в потоке газа или жидкости, омывающем твердое тело.

1.6. Основное содержание книги

В гл. 2 рассматриваются дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие характеристики течения и теплообмена. Эти уравнения, довольно сложные математически, основаны на законах сохранения массы, количества движения и энергии для жидкости с плавно изменяющимися коэффициентами вязкости и теплопроводности. После вывода уравнений для общего случая сопряженного течения с переменными свойствами рассматриваются частные случаи несопряженного течения.

Число возможных вариантов течения с теплообменом очень велико по следующим причинам.

¹⁾ Авторы выражают благодарность проф. Н. Описику, предоставившему это приложение и табл. В-3. Остальные таблицы приложения В заимствованы из работы [4].

1. К различным граничным условиям для поля скоростей добавляются различные и столь же многочисленные граничные условия для поля температур.
2. В жидкости могут существовать источники тепла, обусловленные химическими реакциями или кинетическим нагревом, и их распределения могут быть гораздо более сложными, чем распределения «источников» количества движения типа объемных сил или градиентов давления.
3. Выталкивающие силы, обусловленные изменениями плотности в гравитационном поле, могут сами создавать течения, не имеющие аналогии с несжимаемыми.
4. В инженерной практике часто приходится рассматривать теплообмен в течениях, имеющих очень сложные граничные условия для поля скоростей; примерами могут служить теплообменники с ребрами или трубками, расположенными в потоке, а также различные системы охлаждения вдувом.

К счастью, интенсивный теплообмен в потоке жидкости обычно происходит в сравнительно тонких слоях, связанных с областями интенсивного переноса количества движения. Эти слои называются *сдвиговыми*. Наиболее часто встречающимся в задачах теплообмена видом сдвигового слоя является пограничный слой, поскольку инженеров интересует, как правило, тепловой поток, подводимый к твердой ограничивающей поверхности или отводимый от нее. Следовательно, множество вариантов задач о теплообмене не означает множества различных явлений. Надежным путем к решению проблемы является исследование конвективного теплообмена в пограничных и других сдвиговых слоях, и именно такое исследование составляет основу данной монографии. При рассмотрении тонких сдвиговых слоев не только упрощается принципиальный подход к решению задачи, но и достигается ряд преимуществ с математической и вычислительной точек зрения, заключающихся в возможности упростить выведенные в гл. 2 уравнения сохранения, пренебрегая малыми членами. Полученные уравнения пограничного слоя (или уравнения тонкого сдвигового слоя) приведены в гл. 3, и остальная часть книги посвящена в основном их решению при граничных условиях, представляющих наибольший практический интерес. Для тех, кого не очень интересует представленный в гл. 2 подробный вывод уравнений сохранения, в разд. 3.1 дается сводка общих уравнений в качестве отправной точки для вывода уравнений неразрывности, движения и тепловой энергии в приближении пограничного слоя, которые для простоты представлены только для плоских и осесимметричных течений. Гл. 3 завершается рассмотре-

нием обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных после интегрирования уравнений пограничного слоя в поперечном направлении.

Гл. 4, посвященная несопряженным ламинарным пограничным слоям, начинается с рассмотрения частных случаев течения, в которых профили скорости и(или) температуры в различных сечениях геометрически подобны (автомодельны). Хотя такие случаи почти не встречаются на практике, они полезны для анализа особенностей течения, и преобразование координат, позволяющее устранить зависимость от x в «автомодельных» течениях, еще можно использовать для ослабления зависимости от продольной координаты в неавтомодельных течениях, что упрощает численное решение уравнений. После обсуждения общих свойств неавтомодельных течений представлены простые методы расчета характеристик профилей скорости и температуры, основанные на решении обыкновенных дифференциальных уравнений по x , выведенных в гл. 3, и полученные результаты можно считать эмпирическими корреляциями свойств «точных» численных решений для ламинарного течения.

В гл. 5 рассматривается теплообмен при несопряженных ламинарных течениях в канале, т. е. при течениях, в которых происходит взаимодействие сдвиговых слоев, развивающихся вдоль стенок канала.

В гл. 6, посвященной несопряженным турбулентным пограничным слоям, обсуждается возможность ограниченной автомодельности профилей в этих условиях, а затем рассматриваются методы расчета дополнительных скоростей переноса количества движения и тепла, обусловленных турбулентностью. Проще всего провести такие расчеты, если ввести дополнительные коэффициенты турбулентной вязкости и теплопроводности, что законно с математической точки зрения, и скоррелировать результаты экспериментального измерения этих характеристик в такой форме, которая была бы применима для анализа практически важных течений.

Глава 7 посвящена теплообмену в несопряженных турбулентных потоках в каналах, а гл. 8 — теплообмену в ламинарном и турбулентном свободных сдвиговых течениях.

В гл. 9 рассматриваются течения с выталкивающими силами. С одной стороны, выталкивающие силы могут оказать слабое влияние, скажем, на пограничный слой, если он еще обладает признаками пограничного слоя; но, с другой стороны, именно выталкивающие силы приводят к возникновению *свободноконвективных течений* типа «факела» над источником тепла в спокойном воздухе. Как и прежде, качественное обсуждение основных закономерностей

может быть основано на рассмотрении ламинарных течений и обобщении экспериментальных данных на случаи турбулентных течений. Некоторые течения, обусловленные выталкивающими силами, типа свободной конвекции в ограниченном объеме, очень сложны, и даже для ламинарного режима течения трудно получить численное решение. Однако рассмотрение свободноконвективных сдвиговых слоев полезно в качестве введения в эту проблему.

В гл. 10 обсуждаются сопряженные ламинарные течения (при отсутствии выталкивающих сил), в которых изменение теплофизических свойств рабочего тела обусловлено большими изменениями температуры либо вследствие конвективного переноса тепла в низкоскоростных потоках, либо вследствие кинетического нагрева в высокоскоростных потоках, когда велика скорость диссипации кинетической энергии с переходом в тепловую внутреннюю энергию. В отдельных случаях уравнения и их решения можно свести путем преобразования переменных к соотношениям для течения с постоянными свойствами, что полезно для наглядности, но в более сложных случаях одновременно требуется найти численное решение полной системы уравнений, описывающих поля скоростей и температур. Однако те же самые численные методы можно применять и для низкоскоростных, и для высокоскоростных течений.

Гл. 11 посвящена анализу сопряженных турбулентных течений с использованием предположения (обычно оправданного) о том, что пульсации плотности не влияют непосредственно на характеристики турбулентности. Это позволяет обобщить анализ автомодельных течений и эмпирические соотношения, представленные в гл. 6, и, хотя высокоскоростные течения теперь в принципе отличаются от низкоскоростных с большими температурными перепадами ввиду наличия в первых больших пульсаций давления, на практике это отличие несущественно, поскольку совместное влияние пульсаций плотности и пульсаций давления пренебрежимо мало.

В гл. 12 рассматривается теплообмен в ламинарных и турбулентных сопряженных течениях в каналах и, наконец, в гл. 13 и 14 подробно описаны численные методы, применимые для решения полной системы уравнений в частных производных, описывающих поля скоростей и температур. В последних двух главах будет показано, что один и тот же метод можно эффективно применять для сопряженных и несопряженных течений и, кроме того (с использованием некоторых моделей турбулентности), для ламинарных и турбулентных течений, если учесть дополнительные скорости турбулентного переноса.

Студенты, изучающие только несопряженные течения, могут пропустить гл. 9—12, но они должны иметь в виду, что течения с выталкивающими силами или с другими формами взаимодействия полей скоростей и температур играют важную роль в инженерной практике. Все студенты должны ясно осознавать, что в настоящее время методы численного расчета типа представленных в гл. 13 и 14 составляют важную часть работы инженера и что они вытеснили многие упрощенные эмпирические соотношения, которые применялись в прошлом для расчета характеристик переноса количества движения и тепла.

Задачи

- 1.1. Рассчитать число Прандтля для рабочих тел со следующими свойствами: а) жидкий металл $\rho = 879 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{с/м}^2$, $\kappa = 66,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; б) газ $c_p = 1,01 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$, $\mu = 2,147 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{с/м}^2$, $k = 3,126 \times 10^{-2} \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$; в) капельная жидкость $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$, $c_p = 1,902 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$, $\nu = 9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, $k = 0,143 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$.
- 1.2. Рассчитать число Рейнольдса для следующих случаев: а) воздух со скоростью 30,5 м/с, давлением 0,1014 МПа и температурой 339 К обтекает плоскую пластину длиной 152,4 мм; б) вода со средней скоростью 12 м/с и средней температурой 298 К течет в круглой трубе диаметром 0,25 м; в) глицерин с температурой 303 К течет со скоростью 10 м/с на расстоянии 1 м от передней кромки плоской пластины.
- 1.3. Для условий задачи 1.2а, если коэффициент поверхностного трения c_f определяется формулой $c_f = 0,664/\sqrt{R_x}$, где $R_x = u_e x/\nu$, найти а) напряжение поверхностного трения τ_w , б) плотность теплового потока к поверхности \dot{q}_w . Принять $T_w - T_e = 5,5 \text{ К}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sebeci T., Bradshaw P., Momentum Transfer in Boundary Layers, Hemisphere, Washington, DC, 1977.
2. Keenan J.H., Thermodynamics, Wiley, N.Y., 1941. [Имеется перевод: Кинан Дж. Термодинамика. — М.—Л.: Госэнергоиздат, 1963.]
3. Lumley J.L., in Topics in Applied Physics, 12, Turbulence, P. Bradshaw (ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1977. [Имеется перевод: Ламли Дж.Л. Двухфазные и неньютоновские течения: В сб. Турбулентность/ Под ред. Брэдшоу. — М.: Машиностроение, 1980, с. 291—323.]
4. Eckert E.R.G., Drake R.M., Analysis of Heat and Mass Transfer, McGraw, N.Y., 1972. [Имеется перевод первого издания: Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло- и массообмена. — М.: Госэнергоиздат, 1961.]

В этой главе представлен вывод дифференциальных уравнений, которые при соответствующих граничных условиях описывают процессы конвективного теплообмена. Поскольку конвективный перенос тепла всегда происходит при одновременном переносе массы и количества движения, представлен также вывод соответствующих уравнений, на основе которых получены в принципе аналогичные уравнения переноса тепловой энергии. В разд. 2.1—2.3 выведены уравнения, выражающие законы сохранения массы, количества движения и энергии (включая тепловую энергию) для неустановившихся двумерных потоков. При выводе этих уравнений законы для потоков тепла и количества движения в вязкой теплопроводной жидкости (гл. 1) рассматриваются применительно к контрольному объему. Уравнения для трехмерного течения содержат дополнительные члены, но основаны на тех же принципах (см. задачи 2.1 и 2.4). Поскольку в большинстве практических задач теплообмена течение является турбулентным, используется обычное представление скорости и параметров жидкости в виде суммы средней и пульсационной составляющих и затем проводится осреднение уравнений, как описано в разд. 2.4.

Уравнения, выражающие законы сохранения массы (неразрывности), количества движения и энергии (или энтальпии)¹⁾, можно вывести, анализируя характеристики потока, втекающего и вытекающего из бесконечно малого контрольного объема (КО) типа показанного на рис. 2.1. Длины сторон dx и dy достаточно малы, так что можно пренебречь величинами порядка dx^2 и dy^2 . В двумерных потоках величина dz несущественна. Закон сохранения любой величины Q можно записать для контрольного объема (КО) следую-

¹⁾ В монографии для описания движения среды используются эйлеровы, а не лагранжевы переменные. — *Прим. ред.*

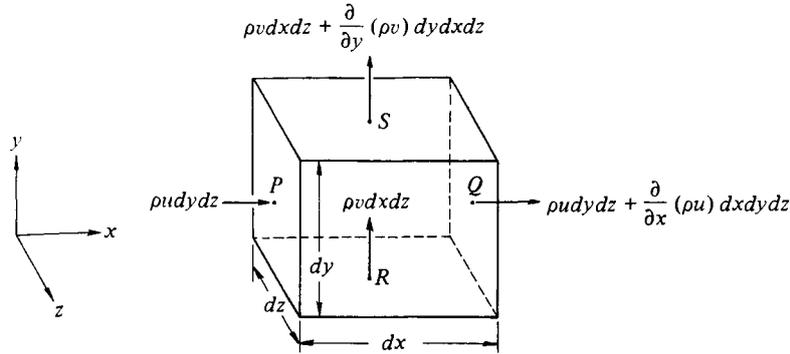


Рис. 2.1. Бесконечно малый контрольный объем, рассматриваемый при выводе уравнения сохранения массы.

щим образом:

Изменение Q в КО по времени	-	Поток Q через ограничивающие поверхности внутрь КО	+	Поток Q через ограничивающие поверхности из КО	=	Сумма источников и стоков Q в КО	(2.1)
-------------------------------	---	------------------------------------------------------	---	--------------------------------------------------	---	------------------------------------	-------

2.1. Уравнение неразрывности

Чтобы получить уравнение неразрывности из общего уравнения (2.1), выберем контрольный объем, как показано на рис. 2.1, и примем $Q = \text{масса} = \text{плотность} \times \text{объем}$. Поскольку источники или стоки массы отсутствуют, член в правой части уравнения (2.1) равен нулю и уравнение показывает, что изменение массы жидкости в контрольном объеме по времени равно результирующему потоку массы через поверхности контрольного объема. Масса жидкости в контрольном объеме равна $\rho dx dy dz$, ее изменение по времени составляет величину

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz,$$

которая равна нулю для потока несжимаемой жидкости. Поток массы через грань, перпендикулярную направлению x , с центром в точке P равен произведению плотности на составляющую скорости, перпендикулярную грани, и на площадь грани, т. е. $\rho u dy dz$.

Соответствующий поток массы через параллельную грань с центром в точке Q равен $(\rho u + \partial(\rho u)/(\partial x \cdot dx)dydz$, а результирующий поток массы из контрольного объема через грани с центрами в точках P и Q равен

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz.$$

Аналогично результирующий поток массы из контрольного объема через грани, перпендикулярные направлению y , выражается в виде

$$\frac{\partial \rho v}{\partial y} dx dy dz.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (2.1), находим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = - \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right) dx dy dz.$$

Разделив обе части этого уравнения на объем контрольного объема, получаем уравнение сохранения массы (*уравнение неразрывности*) для двумерного неустановившегося течения сжимаемой жидкости (газа)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0. \quad (2.2a)$$

Из уравнения (2.2a) следует, что при постоянной плотности уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.2b)$$

как для установившегося, так и для неустановившегося течений. В случае установившегося течения сжимаемой жидкости уравнение (2.2a) сводится к следующему:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0. \quad (2.2c)$$

2.2. Уравнения движения

Рассматривая аналогичным образом контрольный объем, можно вывести уравнения сохранения количества движения, называемые в случае вязкой жидкости *уравнениями Навье—Стокса*. Поскольку количество движения является векторной величиной, получаются три уравнения движения. Чтобы вывести уравнение движения, скажем, в направлении x , применим второй закон Ньютона (принцип

сохранения количества движения) и для контрольного объема, показанного на рис. 2.1, сохраняя подход, использованный при выводе уравнения (2.1), найдем

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\text{Изменение по времени } x\text{-составляющей количества движения жидкости в КО}} - \boxed{\text{Поток } x\text{-составляющей количества движения в КО}} + \\
 + \boxed{\text{Поток } x\text{-составляющей количества движения из КО}} = \boxed{\text{Сумма } x\text{-составляющих сил, приложенных к жидкости в КО}}. \quad (2.3)
 \end{array}$$

Составляющая количества движения жидкости в контрольном объеме в направлении x (x -составляющая) равна величине u , умноженной на массу жидкости в этом объеме, т. е. $\rho u dx dy dz$. Следовательно.

$$\boxed{\text{Изменение по времени } x\text{-составляющей количества движения жидкости в КО}} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) dx dy dz. \quad (2.4)$$

Поток x -составляющей количества движения, подводимый в контрольный объем через грань с центром в точке R (перпендикулярную направлению y), равен x -составляющей количества движения на единицу массы u , умноженной на поток массы через эту грань $\rho v dx dz$, т. е.

$$\rho u v dx dz.$$

Отметим отличие между направлениями составляющей количества движения и составляющей потока массы, переносящей это количество движения, в нашем случае x и y соответственно. Поток x -составляющей количества движения, отводимый через противоположную грань (с центром в точке S), равен

$$\left[\rho u v + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) dy \right] dx dz,$$

так что результирующий поток x -составляющей количества движения из контрольного объема через рассмотренную пару граней равен

$$\frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) dx dy dz.$$

Можно записать аналогичные соотношения для результирующего потока x -составляющей количества движения из контрольного объема через пару граней, центрами которых являются точки P и Q . Результирующий поток x -составляющей количества движения выражается соотношением

$$\boxed{\text{Поток } x\text{-составляющей количества движения из КО}} - \boxed{\text{Поток } x\text{-составляющей количества движения в КО}} =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uw) \right] dx dy dz. \quad (2.5)$$

На жидкость, находящуюся в контрольном объеме, действуют объемные и поверхностные силы. Простейшим примером объемных сил являются силы тяжести; жидкость, находящаяся в контрольном объеме, испытывает воздействие силы тяжести, равной произведению g на массу, т. е. $\rho g dx dy dz$. Ясно, что объемная сила является векторной величиной; для плоского течения в плоскости (x, y) она имеет две составляющие на единицу массы, f_x и f_y . Поверхностные силы (т. е. силы, действующие на воображаемые грани контрольного объема) обусловлены молекулярными напряжениями в жидкости. Одним из видов молекулярного напряжения является давление, которое воздействует даже на покоящуюся жидкость. Оно направлено по нормали к поверхности, на которую оно воздействует. Если элементарный объем жидкости изменяется во времени по форме или размерам, появляются дополнительные напряжения, обусловленные вязкостью, которые могут действовать либо по нормали, либо по касательной к поверхности (напряжение сдвига). Различные составляющие нормальных и сдвиговых напряжений, *исключая давление*, определяются, как показано на рис. 2.2: первый индекс у σ обозначает направление действия напряжения, второй — направление нормали к поверхности. Положительным считается напряжение, действующее на жидкость, заключенную в контрольном объеме, в направлении внешней нормали, а касательное напряжение считается положительным на гранях, отстоящих дальше от начала координат. Следовательно, напряжение σ_{xy} действует в положительном направлении x на видимой (верхней) грани, перпендикулярной оси y ; соответствующее напряжение сдвига на невидимой (нижней) грани действует перпендикулярно оси y , в отрицательном направлении x . Для нормальной «ньютоновской» вязкой жидкости нормальные вязкие напряжения σ_{xx} , σ_{yy} и напряже-

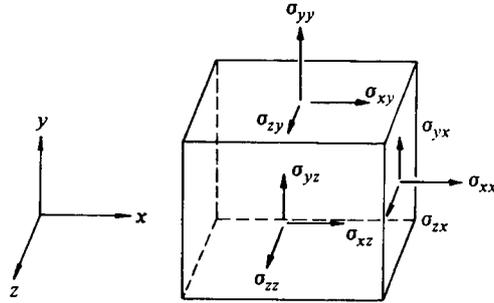


Рис. 2.2. Определения составляющих напряжений (исключая давление), действующих со стороны окружающей жидкости на грани контрольного объема.

Составляющие сил равны составляющим напряжений, умноженным на площади соответствующих граней.

ния сдвига σ_{xy} , σ_{yx} определяются следующими, довольно сложными формулами:

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\beta - \frac{2}{3}\mu \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (2.6a)$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\beta - \frac{2}{3}\mu \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (2.6b)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (2.6c)$$

Здесь β — объемная вязкость, вызывающая возникновение вязкого нормального напряжения, действующего в каждом направлении и прямо пропорционального скорости расширения (скорости увеличения объема) жидкости. В выражениях для σ_{xx} , σ_{yy} и σ_{zz} появляется слагаемое $-2\mu/3$, так что сумма этих трех напряжений равна нулю. Сумма нормальных напряжений, обусловленных движением молекул, считается составляющей давления, а не вязких напряжений. В несжимаемой жидкости, когда выполняется уравнение (2.2b), выражения для нормальных напряжений сводятся к следующим:

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.6d)$$

Однако формулы для напряжений сдвига остаются прежними.

Результирующая сила давления, действующая на контрольный объем в направлении x (рис. 2.1), равна разности сил давления, дей-

ствующих на грани с центрами в точках P и Q , умноженной на площадь каждой грани, а именно

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy dz.$$

Здесь минус появляется ввиду того, что по определению положительным считается давление, действующее в направлении внутренней нормали. Лишь *градиент* давления, а не постоянное давление дает результирующую силу, действующую на элементарный контрольный объем. Составляющие давления, действующие на грани с центрами в точках R и S , не дают вклада в эту результирующую силу, поскольку они перпендикулярны направлению x .

Рассуждая аналогичным образом, как и при анализе давления, можно найти результирующую силу в направлении x , обусловленную напряжениями σ_{xx} и σ_{xy} , а именно

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}\right) dx dy dz.$$

Следовательно,

Сумма сил, действующих на жидкость в КО	=	$\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho f_x\right) dx dy dz.$	(2.7)
--------------------------------------------------	---	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------

Подставив (2.4), (2.5) и (2.7) в (2.3) и разделив все члены на $dx dy dz$, получаем *уравнение движения в направлении x* для неустановившегося двумерного течения сжимаемого газа

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho u^2 + \frac{\partial}{\partial y} \rho uv = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho f_x. \quad (2.8)$$

Умножая уравнение неразрывности (2.2a) на u и вычитая полученное уравнение из (2.8), получаем после деления на плотность ρ *альтернативную форму уравнения движения в направлении x*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}\right) + f_x. \quad (2.9)$$

Для краткости записи вводится *субстанциональная производная*, определяемая для неустановившегося течения соотношением

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.10)$$

Она представляет собой скорость изменения некоторого параметра по времени с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с жидкостью. Применяя это обозначение, можно записать уравнение (2.9) в виде

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) + f_x. \quad (2.11)$$

Отметим, что уравнения (2.9) и (2.11) справедливы для течений как сжимаемой, так и несжимаемой жидкости. Кроме того, укажем, что величина du/dt представляет собой составляющую ускорения, действующую в направлении x , т. е. изменение по времени скорости элементарного объема движущейся жидкости. Любое уравнение, левую часть которого можно выразить в виде $d\phi/dt$, называется уравнением переноса. Как показывает решение задачи 2.1, уравнение неразрывности (2.2a) является уравнением переноса для ρ .

Таким же образом можно получить уравнение движения в направлении y , аналогичное уравнению (2.8) (см. задачу 2.2), и полученное уравнение можно записать в форме уравнения (2.11)

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) + f_y. \quad (2.12)$$

Если вместо напряжений использовать общее обозначение σ , то представленные выше уравнения справедливы для любой жидкости с произвольным соотношением между напряжениями и скоростями деформации. Член, содержащий σ , для жидкости с переменными вязкостью и плотностью выражается довольно сложным соотношением, но для течений с постоянными свойствами уравнения (2.11) и (2.12) можно записать при использовании уравнения неразрывности следующим образом:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f_x, \quad (2.11a)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + f_y. \quad (2.12a)$$

Для плоского течения третье уравнение движения имеет вид $dw/dt = 0$.

2.3. Уравнения внутренней энергии и энтальпии

Уравнение внутренней (кинетической и тепловой) энергии

Вывод уравнения внутренней энергии для течения жидкости основан на использовании первого начала термодинамики. Если для простоты пренебречь потенциальной энергией, то внутренняя энергия единицы массы жидкости представляет собой сумму кинетической энергии $(u^2 + v^2)/2$ и *тепловой* внутренней энергии $e \equiv c_v T$. Первое начало термодинамики утверждает, что

$$dE = dQ + dW, \quad (2.13)$$

где dE — приращение внутренней (кинетической плюс тепловой) энергии системы, dQ — тепловая энергия, подведенная к системе, а dW — работа, произведенная *над* системой.

Затем запишем уравнение (2.13), применяя понятие субстанциональной производной d/dt , определенной соотношением (2.10). Получим уравнение переноса E в движущейся системе

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \frac{dW}{dt} \quad (2.14)$$

и применим его для элемента жидкости (небольшой массы движущейся жидкости, которую на вполне законном основании можно считать термодинамической системой). В результате получим

Изменение энергии E элемента жидкости	=	Тепловой поток к элементу жидкости	+	Изменение по времени работы над элементом жидкости поверхностными и объемными силами
-----------------------------------------	---	------------------------------------	---	--------------------------------------------------------------------------------------

(2.15)

Также для удобства рассмотрим фиксированный контрольный объем, а не элемент движущейся жидкости [это равносильно просто замене субстанциональной производной d/dt ее определением (2.10)] и запишем уравнение (2.15) в виде

Изменение по времени E в КО	-	Поток E через поверхность в КО	+	
+		Поток E через поверхность из КО	=	Изменение по времени работы над КО поверхностными и объемными силами

(2.16a)

Уравнение (2.16а) записано в форме уравнения сохранения (2.1) величины E . При выводе уравнения движения мы использовали обычное предположение о том, что воздействие вязкости эквивалентно воздействию напряжений; однако на самом деле оно определяется результирующими скоростями молекулярного переноса количества движения и при такой трактовке должно войти в левую часть уравнения (2.3) вместо суммы сил, стоящей в правой части. С другой стороны, молекулярный перенос тепла (теплопроводность) всегда рассматривается именно как перенос и, следовательно, должен учитываться во втором и третьем членах левой части уравнения (2.16а). Точно так же, как и при выводе уравнения движения, удобно отделить перенос *течением* от молекулярного переноса. Поэтому (1) мы считаем кондуктивную передачу тепловой энергии *переносом тепла* и (2) объединяем все соответствующие члены в отдельный член и включаем его в правую часть уравнения (2.16а), которое принимает вид

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\text{Изменение по времени } E \text{ в КО}} - \boxed{\text{Поток } E, \text{ вносимый в КО течением}} + \boxed{\text{Поток } E, \text{ уносимый из КО течением}} = \\
 \\
 = \boxed{\text{Тепловой поток в КО за счет теплопроводности}} + \boxed{\text{Изменение по времени работы над КО поверхностными и объемными силами}}. \quad (2.16b)
 \end{array}$$

Теперь рассмотрим по порядку члены, входящие в уравнение (2.16b), для контрольного объема, показанного на рис. 2.3.

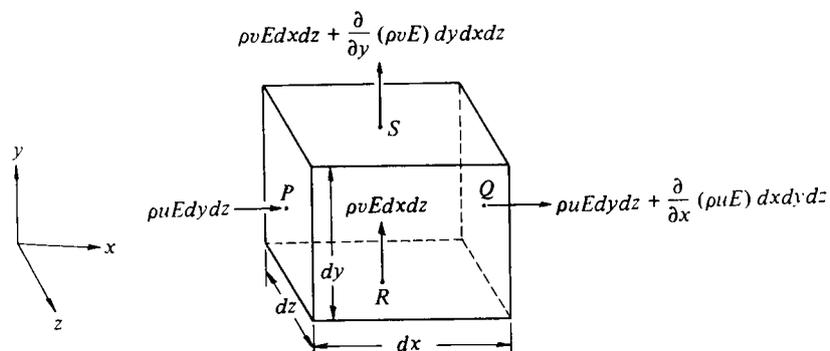


Рис. 2.3. Перенос энергии сквозь грани контрольного объема, перпендикулярные осям x и y .

Выражения для членов, входящих в левую часть уравнения (2.16b), получаются таким же способом, как и для уравнения движения в направлении x (2.8). Принимая величину E равной энергии единицы массы, получаем

$$\boxed{\text{Изменение по времени } E \text{ в КО}} = \frac{\partial \rho E}{\partial t} dx dy dz, \quad (2.17)$$

а результирующий поток энергии, доставляемый в контрольный объем течением (см. рис. 2.3), равен

$$\boxed{\text{Поток } E, \text{ уносимый из КО течением}} - \boxed{\text{Поток } E, \text{ вносимый в КО течением}} = \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u E) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v E) \right] dx dy dz. \quad (2.18)$$

Сумма левых частей (2.17) и (2.18) позволяет найти выражение для левой части (2.16b). Применяя уравнение неразрывности (2.2a) и определение d/dt (2.10), это выражение можно записать в виде

$$\rho dx dy dz \frac{d}{dt} \left(e + \frac{u^2 + v^2}{2} \right). \quad (2.19)$$

Первый член в правой части уравнения (2.16b) выражает кондуктивный перенос тепла в контрольный объем. Если через \dot{q} обозначить плотность теплового потока, имеющую составляющие \dot{q}_x и \dot{q}_y в направлениях x и y соответственно, то результирующий поток тепла в контрольный объем можно найти, прибегая при рассмотрении этого объема к стандартным рассуждениям, подобным тем, которые приводятся при анализе напряжений σ , и получая в итоге

$$\boxed{\text{Поток тепла в КО}} = - \left(\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} \right) dx dy dz, \quad (2.20)$$

где знак минус появляется потому, что поток тепла считается положительным, если он направлен в сторону возрастания координаты.

Рассмотрим теперь члены уравнения (2.16b), содержащие объемные и поверхностные силы.

Работа, совершаемая в единицу времени силами давления на одной стороне движущейся в жидкости плоской поверхности, равна произведению давления на площадь поверхности и на нормальную

составляющую скорости — частный случай общего соотношения: *работа, совершаемая в единицу времени = сила × скорость*. Рассматривая контрольный объем, можно видеть, что эта величина для жидкости, втекающей в объем через левую грань, перпендикулярную оси x , равна $p u dy dz$, а соответствующая величина для жидкости, вытекающей из объема через противоположную грань, перпендикулярную оси x , равна

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} du\right) dy dz$$

и (в приближении первого порядка) результирующая работа сил давления в единицу времени при течении через две грани, перпендикулярные оси x , составляет

$$-\frac{\partial}{\partial x}(p u) dx dy dz.$$

Суммируя это выражение с аналогичным выражением, определяющим результирующую работу сил давления в единицу времени для другой пары граней, получаем

Изменение по времени работы, совершаемой над КО силами давления	$= -\left[\frac{\partial}{\partial x}(p u) + \frac{\partial}{\partial y}(p v)\right] dx dy dz.$ (2.21)
-----------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------

Аналогичным образом можно найти работу, совершаемую в единицу времени нормальными напряжениями σ_{xx} и σ_{yy} , не забывая при этом, что положительными считаются значения σ , направленные наружу из контрольного объема (растягивающие напряжения; см. рис. 2.2), в то время как давление p положительно, когда оно направлено внутрь контрольного объема. Получаем

Изменение по времени работы, совершаемой над КО нормальными напряжениями	$= \left[\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx} u) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yy} v)\right] dx dy dz.$ (2.22)
--------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Изменение по времени работы, совершаемой *напряжениями сдвига* для каждой грани фиксированного контрольного объема, равно произведению напряжения на площадь поверхности и на *касательную* составляющую скорости (т. е. на составляющую скорости в направлении действия напряжения). Например, сила, обусловленная

напряжением сдвига, действующим в направлении x на *нижней* грани, перпендикулярной оси y , равна $-\sigma_{xy} dx dz$, а работа, совершаемая этой силой в единицу времени, равна $-\sigma_{xy} u dx dz$. Результирующая работа, совершаемая в единицу времени напряжением σ_{xy} на двух гранях, перпендикулярных оси y , составляет

$$-\sigma_{xy} u dx dz + \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) dx dz,$$

или, если пренебречь малыми величинами в приближении первого порядка,

$$\frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{xy} u) dx dy dz.$$

Второй член, который учитывает вклад в работу напряжений сдвига в плоском потоке, обусловленный напряжением σ_{yx} , действующим на две грани, площадь которых равна $dy dz$, составляет

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{yx} v) dx dy dz.$$

Наконец, находим изменение по времени работы составляющих объемной силы \mathbf{f} на единицу массы, применяя еще раз соотношение: *работа, совершаемая в единицу времени = сила \times скорость*, и получая в результате

Изменение по времени работы, совершаемой над КО объемными силами	= $(uf_x + vf_y) \rho dx dy dz$. (2.23)
------------------------------------------------------------------	------------------------------------------

Теперь можно переписать уравнение «переноса» для внутренней энергии (2.16b), суммируя члены, выраженные соотношениями (2.19)—(2.23) и проводя деление на $\rho dx dy dz$. В итоге получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[e + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right] = & -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (pu) + \frac{\partial}{\partial y} (pv) \right] + \\ & + uf_x + vf_y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i), \end{aligned} \quad (2.24)$$

где в тензорных обозначениях последний член можно представить (при $i, j = 1, 2$ для плоского течения) как сумму членов, выведенных выше

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} u_i \equiv \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx} u) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{xy} u) + \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{yx} v) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{yy} v). \quad (2.25)$$

Отметим, что довольно сложное уравнение (2.24) является выражением первого начала термодинамики (2.13) для жидкости, внутренние напряжения и перенос тепла в которой представлены членами σ и q .

Чтобы получить уравнение только для *тепловой* внутренней энергии, нужно из уравнения (2.24) для суммарной (кинетической плюс тепловой) энергии вычесть уравнение кинетической энергии, левая часть которого равна $d/dt[(u^2 + v^2)/2]$. Уравнение кинетической энергии можно получить из уравнений движения просто путем математических преобразований без привлечения дополнительных физических соображений; этот вывод предлагается в качестве задачи 2.6, а уравнение кинетической энергии приведено в разделе, завершающем эту главу (уравнение (P2.3)). Вычитая уравнение (P2.3) из уравнения (2.24), находим уравнение переноса для *тепловой* внутренней энергии

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} \right) - \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\Phi}{\rho}, \quad (2.26)$$

которое несколько проще уравнения (2.24). Входящий в это уравнение диссипативный член Φ выражается соотношением

$$\Phi = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma_{yx} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.27a)$$

и для ньютоновской вязкой жидкости с переменными свойствами — соотношением

$$\Phi = 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\beta - \frac{2}{3}\mu \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2, \quad (2.27b)$$

причем входящие в это соотношение члены являются произведениями вязких напряжений на соответствующие скорости деформации. Величина Φ выражает отнесенное к единице *объема* изменение по времени работы против вязких напряжений при деформации жидкости; это другой частный случай общего соотношения: *работа, совершаемая в единицу времени = сила × скорость*, когда скорость одной грани контрольного объема относительно противоположной грани равна произведению скорости деформации на расстояние между гранями.

Применяя указанный в гл. 1 закон теплопроводности, из которого следует, что $\dot{q}_x = -k\partial T/\partial x$ и $\dot{q}_y = -k\partial T/\partial y$, можно свести уравнение (2.26) к следующему:

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] - \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\Phi}{\rho}. \quad (2.28)$$

Уравнение энтальпии

Определим энтальпию единицы массы жидкости в виде

$$h \equiv e + \frac{p}{\rho}. \quad (2.29)$$

Чтобы получить уравнение для dh/dt , можно просто прибавить $d(p/\rho)/dt$ к уравнению (2.26). Тогда

$$\frac{d(p/\rho)}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}. \quad (2.30)$$

Если переписать уравнение неразрывности (2.2а) в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.31)$$

и подставить выражение для $d\rho/dt$ в (2.30), то, используя (2.26), получим

$$\frac{dh}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\Phi}{\rho}. \quad (2.32)$$

Предполагая, что удельная теплоемкость жидкости постоянна, так что

$$h = c_p T = e + (c_p - c_v) T = e + RT, \quad (2.33)$$

и выражая \dot{q}_x и \dot{q}_y с помощью закона теплопроводности, можно привести уравнение (2.32) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &\equiv c_p \frac{dT}{dt} = c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \Phi \right]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Если отношение характерного перепада давлений к абсолютному давлению мало по сравнению с отношением характерного перепада температур к абсолютной температуре, из уравнения состояния для совершенного газа $p = \rho RT$ или $dp/p = d\rho/\rho + dT/T$ следует, что изменение давления оказывает слабое влияние на температуру; это соответствует случаю «низкоскоростного» течения (т. е. течения с малым числом Маха M). Кроме того, при низких скоростях диссипативный член Φ мал, поскольку он пропорционален квадрату характерной скорости (разд. 3.3). Следовательно, в случае низкоскоростного течения в уравнении (2.34) можно пренебречь работой сил давления и диссипативным членом.

Если член $d(p/\rho)/dt$ прибавить не к уравнению (2.26), а к уравнению (2.24), то получится уравнение относительно $d[h + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)]/dt$, где величина $h + (u^2 + v^2)/2 \equiv H$ называется *полной энтальпией*, а параметр H/c_p называется *полной температурой*, или *температурой торможения*, T_0 (этот параметр имеет смысл вводить лишь в том случае, если величина c_p постоянна). Упрощенный вариант уравнения полной энтальпии получен в разд. 3.3, а полный вывод этого уравнения предлагается в качестве задачи 2.7.

Наконец, если изменения температуры в (низкоскоростном) течении невелики, так что величину k можно считать постоянной, уравнение (2.34) сводится к следующему:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (2.35)$$

где $\kappa \equiv k/\rho c_p$ — коэффициент температуропроводности, введенный в гл. 1. Уравнение (2.35) можно применять в задачах о диффузии с постоянным коэффициентом диффузии D (гл. 1), если κ заменить на D , а T — на массовую концентрацию.

2.4. Уравнения сохранения для турбулентного течения

Выведенные в предыдущих разделах уравнения сохранения массы, количества движения и энергии для течений газа применимы и к турбулентным течениям при условии, что теплофизические свойства и неизвестные параметры заменены их мгновенными значениями. Прямой подход к решению проблемы турбулентного течения состоит в том, чтобы решить уравнения для заданной системы *средних* граничных или начальных условий, но при различных начальных значениях пульсационных составляющих и рассчитать

средние величины для ансамбля решений. Даже для самых простых течений это сложная вычислительная задача, поскольку неустановившееся вихревое движение, обусловленное турбулентностью, имеет очень широкий спектр масштабов. Начальные сведения о физическом механизме турбулентности содержатся в работе [1], количественный анализ — в гл. 6, но мы не пытались сколько-нибудь подробно рассчитать статистические характеристики вихревого движения. В качестве стандартной методики используют осреднение уравнений, а не их решений. В течениях с установившимися граничными условиями можно применить довольно простые способы осреднения по времени; в («сопряженных») течениях с переменными свойствами можно использовать как обычный метод осреднения по времени (примененный нами), так и способ «взвешенного по массе» осреднения по времени (осреднение по Фавру), описанный Себиси и Смитом [2].

Чтобы получить уравнения сохранения для турбулентного потока, заменим мгновенные значения параметров, входящих в уравнения, суммой средней и пульсационной составляющих этих параметров. Например, скорость и плотность записываются следующим образом:

$$u = \bar{u} + u', \quad \rho = \bar{\rho} + \rho', \quad (2.36)$$

где \bar{u} и $\bar{\rho}$ — осредненные по времени значения скорости и плотности, а u' и ρ' — наложенные пульсационные составляющие скорости и плотности. Обозначения составляющих скорости показаны на рис. 2.4. Разумеется, в (несопряженных) течениях с постоянными свойствами пульсации плотности пренебрежимо малы; даже в том случае, если изменения средней плотности велики, $\rho' / \bar{\rho}$ обычно яв-

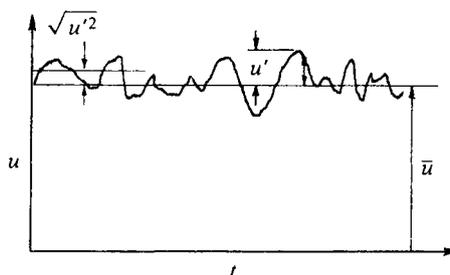


Рис. 2.4. Изменение скорости турбулентного течения по времени.

\bar{u} — средняя составляющая скорости; u' — пульсационная составляющая скорости (относительно среднего значения). Для простоты черта над средней составляющей скорости опускается, если смысл этой величины ясен из контекста.

ляется величиной порядка u' / \bar{u} . В разд. 3.2 представлены результаты оценки величины пульсаций плотности в тонком сдвиговом слое. Осредненное по времени значение переменного по времени параметра $f(t)$ обозначается через \bar{f} и определяется соотношением

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (2.37)$$

В дальнейшем для простоты будем опускать черту над осредненными по времени основными параметрами u, v, ρ, ρ' и T , а также над молекулярными свойствами типа k и μ . Для остальных параметров будет оставлена черта сверху над осредненными по времени значениями, например $\overline{u'^2}$ и $\overline{u'v'}$ — это осредненные по времени величины u'^2 и $u'v'$. Осредненное по времени значение пульсационных составляющих типа u' по определению равно нулю, но величина $\overline{u'^2}$, разумеется, положительна, так как всегда $u'^2 \geq 0$ (см. задачу 2.8).

Уравнения неразрывности и движения

Рассмотрим вначале уравнение неразрывности для двумерного неустановившегося течения газа (2.2а). Подставляя вместо ρ, u и v соответствующие мгновенные (представляющие собой сумму средней и пульсационной составляющих) значения $\rho + \rho', u + u'$ и $v + v'$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho + \rho') + \frac{\partial}{\partial x}[(\rho + \rho')(u + u')] + \frac{\partial}{\partial y}[(\rho + \rho')(v + v')] = 0. \quad (2.38)$$

Среднее значение произведения $(\rho + \rho')(u + u')$, определяемое соотношением (2.37) и обозначаемое $\overline{(\rho + \rho')(u + u')}$ равно $\rho u + \rho' \overline{u'}$. (Среднее значение $\rho u'$ равно нулю, поскольку среднее значение u' равно нулю, а средняя плотность ρ не зависит от времени. Аналогичные рассуждения применимы и к $\rho' u$.) Применяя такие же соображения и к остальным членам, можно записать уравнение неразрывности для двумерного установившегося турбулентного течения газа следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u + \overline{\rho' u'}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v + \overline{\rho' v'}) = 0. \quad (2.39)$$

Этот подход можно применить и при выводе уравнения движения. Представляя аналогичным образом мгновенные значения,

можно записать уравнение движения в направлении x (2.8) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho + \rho')(u + u')}{\partial t} + \frac{\partial(\rho + \rho')(u + u')^2}{\partial x} + \frac{\partial(\rho + \rho')(u + u')(v + v')}{\partial y} = \\ = - \frac{\partial(p + p')}{\partial x} + (\rho + \rho')(\bar{f}_x + \overline{f'_x}) + \text{Градиенты вязких напряжений} \end{aligned} \quad (2.40)$$

и аналогичное уравнение движения в направлении y . Предполагается, что вязкие напряжения являются *мгновенными* значениями, получающимися после подстановки $u + u'$, $\mu + \mu'$ и т. п. в соотношения (2.6a) и (2.6b). Пульсационные составляющие в сложных выражениях для вязких членов после осреднения по времени полностью выпадают и ими пренебрегается. После осреднения по времени получается осредненное уравнение Навье — Стокса (иногда называемое *уравнением Рейнольдса*) в направлении x для двумерного установившегося турбулентного течения сжимаемой жидкости

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\rho u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho u' v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\rho' u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho' u' v'}}{\partial y} + \frac{\partial (2u \overline{\rho' u'})}{\partial x} + \\ + \frac{\partial (u \overline{\rho' v'} + v \overline{\rho' u'})}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho \bar{f}_x + \overline{\rho' f'_x}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

где σ_{xx} и σ_{xy} — молекулярные напряжения, определенные для простой вязкой жидкости соотношениями (2.6). Вычитая из уравнения (2.41) уравнение неразрывности (2.39), умноженное на u , и выполняя математические преобразования, получим другую форму уравнения (2.41)

$$\begin{aligned} (\rho u + \overline{\rho' u'}) \frac{\partial u}{\partial x} + (\rho v + \overline{\rho' v'}) \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho \bar{f}_x + \overline{\rho' f'_x} + \\ + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [- (\overline{\rho u'^2} + \overline{\rho' u'^2} + u \overline{\rho' u'})] \right\} + \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [- (\overline{\rho u' v'} + \overline{\rho' u' v'} + v \overline{\rho' u'})] \right\}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Дополнительные члены в первой строчке обусловлены вкладом пульсаций в средний массовый расход $(\rho + \rho')(u + u') \equiv \rho u + \overline{\rho' u'}$. Члены, заключенные в фигурные скобки, можно считать градиентами дополнительных напряжений (стоящих в круглых скобках), обусловленных турбулентным переносом количества движения. Эти дополнительные составляющие вязких напряжений называются *напряжениями Рейнольдса*. Везде, за исключением так

называемого вязкого подслоя, примыкающего к стенке, напряжения Рейнольдса существенно больше напряжений, обусловленных молекулярной вязкостью. Чтобы получить инженерные решения задач о турбулентном течении, требуются соотношения (или более сложные дифференциальные уравнения), выражающие напряжения Рейнольдса и (что менее важно) члены типа $\overline{\rho' u'}$. Градиенты вязких и турбулентных напряжений в направлении y можно объединить в виде

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma_{xy} - (\overline{\rho u'v'} + \dots) \right],$$

так что, по аналогии с σ_{xy} , турбулентные составляющие можно рассматривать как напряжения, действующие в направлении x на плоскости, перпендикулярной оси y (см. разд. 2.1). В качестве простого правила укажем, что $-\rho u'_i u'_j$ — это напряжение, действующее в направлении x_i на плоскости, перпендикулярной оси x_j .

Уравнение движения в направлении y для двумерного турбулентного течения газа можно получить, следуя методике, примененной при выводе уравнения движения в направлении x ,

$$\begin{aligned} (\rho u + \overline{\rho' u'}) \frac{\partial v}{\partial x} + (\rho v + \overline{\rho' v'}) \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho \bar{f}_y + \overline{\rho' f'_y} - \\ - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho u'v'} + \overline{\rho' u'v'} + \overline{u\rho'v'}) \right\} - \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho v'^2} + \overline{\rho' v'^2} + \overline{v\rho'v'}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Для течения несжимаемой жидкости все члены, содержащие ρ' , становятся равными нулю и уравнение (2.42) после деления на ρ принимает следующий вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \overline{u'^2} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} + \bar{f}_x. \quad (2.44)$$

Применяя соотношения (2.6с) и (2.6d), можно выразить градиенты вязких напряжений, как и для ламинарного течения,

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2.45)$$

если не только ρ , но и ν является постоянной величиной.

Аналогичным образом в случае течения с постоянными свойствами уравнение (2.43) сводится к следующему:

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \overline{u'v'} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'^2} + \bar{f}_y. \quad (2.46)$$

Уравнение энтальпии

В случае турбулентного течения дополнительные члены появляются и в уравнении энтальпии (2.34). Если умножить его левую часть на ρ и подставить величины $u + u'$, $v + v'$, $\rho + \rho'$ и $T + T'$ вместо соответствующих средних значений, то получим

$$\begin{aligned} (\rho + \rho')c_p \frac{\partial(T + T')}{\partial t} + (\rho + \rho')(u + u')c_p \frac{\partial(T + T')}{\partial x} + \\ + (\rho + \rho')(v + v')c_p \frac{\partial(T + T')}{\partial y}. \end{aligned}$$

Теперь, аналогичным образом представляя скорость и плотность в уравнении неразрывности (2.2а) и умножая его на $c_p(T + T')$, получаем

$$c_p(T + T') \left(\frac{\partial(\rho + \rho')}{\partial t} + \frac{\partial(\rho + \rho')(u + u')}{\partial x} + \frac{\partial(\rho + \rho')(v + v')}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.47)$$

Суммируя эту нулевую величину с приведенным выше соотношением и проводя затем осреднение по времени, после некоторых преобразований приходим к соотношению

$$\begin{aligned} c_p \left[\frac{\partial \rho u T}{\partial x} + \frac{\partial \rho v T}{\partial y} + \frac{\partial \rho \overline{T' u'}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \overline{T' v'}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho' T' u'}) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho' T' v'}) + \frac{\partial}{\partial x} (T \overline{\rho' u'} + u \overline{\rho' T'}) + \frac{\partial}{\partial y} (T \overline{\rho' v'} + v \overline{\rho' T'}) \right], \quad (2.48) \end{aligned}$$

аналогичному по форме левой части уравнения Рейнольдса в направлении x для турбулентного течения (2.41).

В правую часть уравнения энтальпии для турбулентного течения входит ряд осредненных произведений пульсационных составляющих различных параметров, как нетрудно убедиться, сделав все подстановки в правой части уравнения (2.34), но на практике существенное значение имеют лишь те из них, которые входят в осредненный по времени диссипативный член Φ . Поскольку скорости турбулентного переноса тепла обычно существенно выше скоростей кондуктивного переноса, корреляционными моментами пульсаций коэффициента теплопроводности и температуры можно пренебречь, как и корреляционными моментами пульсаций коэффициента вязкости и скорости. В области, где кондуктивный тепловой поток

велик, т. е. в «ламинарном подслое», примыкающем к стенке (разд. 4.2), пульсационные члены вообще малы. Осредненные произведения пульсаций, обусловленных членами, содержащими давление, имеют порядок второстепенных членов в уравнении сохранения *кинетической энергии турбулентности*, определяемой величиной $(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})/2$ на единицу массы; они пренебрежимо малы по сравнению с остальными членами уравнения энергии осредненного течения.

Если подставить в диссипативный член Φ , определенный соотношением (2.27), только составляющие средней скорости, то в турбулентном течении он будет выражать вязкую диссипацию кинетической энергии (среднего потока), переходящей в тепловую внутреннюю энергию; дополнительные турбулентные члены, которые будем обозначать $\rho\varepsilon$, выражают диссипацию кинетической энергии *турбулентности*, переходящей в тепловую внутреннюю энергию. Кинетическая энергия турбулентности редко превышает несколько процентов кинетической энергии среднего течения, но скорость ее диссипации вследствие сил вязкости, действующих на турбулентные вихри наименьшего масштаба, значительно больше скорости диссипации кинетической энергии среднего течения, поскольку пульсации скоростей деформации малых турбулентных вихрей значительно больше скорости деформации в среднем течении.

Окончательный вид уравнения энтальпии для турбулентного течения, аналогичного уравнению движения в направлении x (2.42), можно получить, перенося некоторые члены соотношения (2.48) из левой части в правую. После некоторых преобразований уравнение энтальпии для двумерного турбулентного течения газа принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} c_p \left[(\rho u + \overline{\rho' u'}) \frac{\partial T}{\partial x} + (\rho v + \overline{\rho' v'}) \frac{\partial T}{\partial y} \right] = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \\ - c_p \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho u' T'} + \overline{\rho' u' T'} + \overline{u \rho' T'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho v' T'} + \overline{\rho' v' T'} + \overline{v \rho' T'}) \right] + \\ + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \Phi + \rho\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Отметим, что в правой части уравнения энтальпии, как и в уравнении движения (2.42), появляются дополнительные члены.

Эти члены, представляющие собой тепловые аналоги градиентов напряжений Рейнольдса, входящих в уравнение (2.42), называются *градиентами плотности турбулентного теплового потока*. И вновь, чтобы решить осредненные по времени уравнения, требуются эмпирические соотношения, выражающие турбулентный тепловой поток.

Входящая в уравнение (2.49) скорость диссипации энергии турбулентности ε определяется соотношением, аналогичным по своей форме выражению для Φ в случае простой вязкой жидкости (2.27b),

$$\begin{aligned} \rho\varepsilon = 2\mu & \left[\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)^2} \right] + \\ & + \mu \left[\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z}\right)^2} \right] + \\ & + \left(\beta - \frac{2\mu}{3}\right) \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}\right)^2}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Отметим, что, даже если среднее течение является двумерным ($w = 0$), w' представляет собой величину того же порядка, что u' и v' .

Для течения несжимаемой жидкости можно пренебречь Φ , ε и пульсациями плотности, и тогда уравнение (2.49) сводится к следующему:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial \overline{T' u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{T' v'}}{\partial y} \right), \quad (2.51)$$

которое отличается от уравнения (2.35) членами, выражающими градиенты плотности турбулентного теплового потока.

2.5. Уравнения движения. Общие замечания

Все рассмотренные в этой главе уравнения следуют из законов сохранения массы, количества движения и (тепловой и(или) кинетической) энергии для жидкости с простой линейной зависимостью внутреннего напряжения от скорости деформации и плотности теплового потока от градиента температуры. В общем случае получаются взаимозависимые (сопряженные) нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных. Эти основные уравнения и их граничные условия обсуждаются в работах [3, 4], а в разд. 3.5 рассматриваются граничные условия для сдвиговых слоев. Уравне-

ния в частных производных, описывающие течение жидкости, могут иметь установившиеся (не зависящие от времени) решения для ламинарных потоков, но они могут иметь очень сложные неустановившиеся решения для течений, которые называются *турбулентными*. Получить эти решения численными методами чрезвычайно сложно и дорого и, хотя турбулентные течения очень важны в технике и в естественных науках, приходится осреднять уравнения по времени, чтобы получить их численные решения. Осреднение по времени обедняет информацию, и чтобы получить «замкнутую» систему уравнений для турбулентного течения, приходится использовать экспериментальные данные. Как будет показано в гл. 6, простой и не слишком ограниченный способ использования эмпирических данных о характеристиках турбулентного течения состоит в применении понятия «турбулентной вязкости», определенной как отношение кажущегося внутреннего напряжения к соответствующей осредненной по времени скорости деформации. Турбулентные напряжения, как и молекулярные, являются в действительности результатом переноса количества движения; вязкие напряжения обусловлены взаимодействием молекул, а турбулентные напряжения обусловлены взаимодействием движущихся турбулентных образований (вихрей), и оба этих процесса не связаны друг с другом непосредственно, но с математической точки зрения вполне законно ввести турбулентную вязкость, если допустить, что она в общем случае является сложной функцией статистических характеристик турбулентности, а не свойством жидкости. Если выразить интенсивность переноса тепла турбулентными вихрями с помощью выражения для коэффициента турбулентной вязкости и соответствующего выражения для «коэффициента турбулентной теплопроводности» (также приведенного в гл. 6), являющихся корреляционными соотношениями экспериментальных данных, то осредненные по времени уравнения движения для турбулентного течения можно привести к такой же форме, которую имеют уравнения для установившегося ламинарного течения вязкой жидкости. Это позволяет совместно решать задачи для ламинарного и турбулентного течений, и поэтому в монографии ламинарным течениям уделяется значительно больше внимания, чем они этого заслуживают по своей практической значимости. Даже при использовании усовершенствованных моделей турбулентности, которые позволяют получить в явном виде номинально точные соотношения для кажущихся турбулентных напряжений и плотностей тепловых потоков, можно для упрощения расчетов ввести коэффициенты турбулентной вязкости и турбулентной теплопроводности.

Задачи

- 2.1. а. Рассматривая контрольный объем, вывести уравнение неразрывности для трехмерного неустановившегося течения и показать, что уравнение (2.2а) можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0. \quad (\text{P2.1})$$

- б. Получить из уравнения (P2.1) уравнения неразрывности для трехмерного установившегося или неустановившегося течения несжимаемой жидкости и для трехмерного установившегося течения газа, соответствующие уравнениям (2.2б) и (2.2с) для двумерного течения.
- в. Показать, что уравнение (P2.1) можно представить в виде уравнения переноса для ρ , применяя трехмерную форму оператора d/dt , определенного соотношением (2.10).
- 2.2. Повторяя рассуждения, использованные при выводе уравнения движения в направлении x (2.11), показать, что уравнение движения в направлении y имеет форму (2.12). Проверить полученный ответ путем «поворота» координат в уравнении движения в направлении x (т. е. подставляя везде x вместо y , y вместо x , u вместо v и v вместо u).
- 2.3. Показать, что оператор

$$\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \equiv \frac{d}{dt}$$

выражает скорость изменения по времени с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с элементом жидкости.

- 2.4. Обобщая соображения, приведенные при выводе уравнения движения в направлении x для двумерного течения (2.9), показать, что для трехмерного течения это уравнение примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) + f_x,$$

где для ньютоновской жидкости

$$\sigma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

- 2.5. Показать, что в случае двумерного течения член $\partial(\sigma_{ij}u_i)/\partial x_j$, входящий в соотношение (2.25), можно представить в виде

$$\frac{\partial \sigma_{xx}u}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}v}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}u}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}v}{\partial y}$$

и, следовательно, с помощью уравнений (2.6) для ньютоновской жидкости — в виде

$$\begin{aligned} & \mu \left(\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial u^2}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{d}{dt} \left[\left(\beta - \frac{2}{3} \mu \right) \nabla u \right] + \\ & + \left(\beta - \frac{2}{3} \mu \right) (\nabla u)^2 + \mu e_{xy}^2 + e_{xy} \left[v \frac{\partial \mu}{\partial x} + u \frac{\partial \mu}{\partial y} \right] + \mu v \frac{\partial e_{xy}}{\partial x} + \mu u \frac{\partial e_{xy}}{\partial y}, \end{aligned}$$

где

$$\nabla u = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y, \quad e_{xy} = \partial v / \partial x + \partial u / \partial y,$$

а d/dt — оператор переноса, определенный соотношением (2.10).

- 2.6. Если умножить уравнение движения в направлении x (2.9) на u и применить определение субстанциональной производной d/dt (2.10), то будет получено уравнение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = - \frac{u}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{u}{\rho} \left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right] + u f_x. \quad (P2.2)$$

После суммирования с соответствующим уравнением для $d(v^2/2)/dt$, которое проще всего получить, проводя циклическую замену переменных в уравнении (P2.2), итоговое уравнение, в котором V — результирующая скорость, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} V^2 \right) = & - \frac{1}{\rho} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{u}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{v}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) + \\ & + u f_x + v f_y. \end{aligned} \quad (P2.3)$$

Уравнение (P2.3) является уравнением кинетической энергии. Его левая часть представляет собой изменение по времени кинетической энергии единицы массы жидкости при движении вдоль линии тока. Члены, входящие в правую часть, которые можно записать в тензорных обозначениях следующим образом:

$$\frac{u_i}{\rho} \left(- \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \right),$$

выражают соответственно изменение по времени работы над единицей массы жидкости, совершенной силами давления, вязкими или турбулентными напряжениями σ и поверхностными силами, отнесенными к единице массы, f .

- 2.7. Суммируя $d(\rho/\rho)/dt$ с уравнением полной энергии $e + (u^2 + v^2)/2$, вывести уравнение полной энтальпии $H \equiv h + (u^2 + v^2)/2$.

Указание. Следовать выводу уравнения статической энтальпии из уравнения внутренней энергии и учесть, что d/dt — оператор переноса, определенный соотношением (2.10).

- 2.8. Найти средние значения u и T , пульсационные (зависящие от времени) составляющие u' и T' , среднеквадратичные пульсационные составляющие $\overline{u'^2}$ и $\overline{T'^2}$ и среднее произведение скорости на температуру («ковариацию» $\overline{u' T'}$) для следующих законов изменения мгновенных значений скорости и температуры по времени:

(а) $u + u' = a + b \sin \omega t, \quad T + T' = c + d \sin(\omega t - \phi),$

(б) $u + u' = a + b \sin^2 \omega t, \quad T + T' = c + d \sin^2(\omega t - \phi).$

Укажем, что осреднение по времени можно проводить лишь для одного цикла $0 < \omega t < 2\pi$.

- 2.9. Повторяя рассуждения, использованные при выводе осредненного по времени уравнения движения в направлении x для турбулентного течения (2.42), показать, что осредненное по времени уравнение движения в направлении y имеет вид

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho \overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \overline{v'^2}) \right],$$

где членами, содержащими пульсационную составляющую плотности ρ , пренебрегается, а члены, содержащие σ , учитывают только вклад вязких напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bradshaw P., Turbulence, in Science Progress, **67**, 185 Oxford, 1981.
2. Cebeci T., Smith A.M.O., Analysis of Turbulent Boundary Layers, Academic, N.Y., 1974.
3. Hildebrand F.B., Advanced Calculus for Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
4. Cebeci T., Bradshaw P., Momentum Transfer in Boundary Layers, Hemisphere, Washington, DC, 1977.

Задачи переноса количества движения и тепла, рассматриваемые в данной монографии, описываются так называемыми уравнениями пограничного слоя (или тонкого сдвигового слоя), которые являются приближенными формами точных уравнений сохранения, выведенных в разд. 2.1—2.4. Термин «тонкий сдвиговый слой» применяется здесь к любому типу течений в пограничных слоях, струях, следах и в длинных узких каналах. Сам пограничный слой служит простейшим примером для описания основных закономерностей явления. В следующих трех разделах приближение пограничного слоя последовательно применяется для несопряженных течений (жидкости с постоянными свойствами) и сопряженных течений (газа с переменными свойствами) и получены уравнения тонкого сдвигового слоя для установившихся плоских и осесимметричных течений.

Уравнения, рассматриваемые в разд. 3.1 и 3.3, являются дифференциальными уравнениями в частных производных. Обыкновенные дифференциальные уравнения, получающиеся после интегрирования уравнений в частных производных поперек сдвигового слоя, имеют простой физический смысл как уравнения сохранения количества движения и энтальпии для сдвигового слоя в целом. В прошлом они составляли основу практически всех расчетных методов, но теперь чаще применяются методы, основанные на решении системы уравнений в частных производных. «Интегральные» уравнения (т. е. уравнения в обыкновенных производных) содержат меньше информации, чем уравнения в частных производных, но с целью сравнения результатов и обсуждения закономерностей рассматриваемого явления они выведены в разд. 3.4. В конце главы помещен раздел, посвященный граничным условиям, при которых нужно решить уравнения для типичных задач, подробно рассмотренных в последующих главах.

3.1. Несопряженные течения

В приближении пограничного слоя учитывается факт, что в течениях с высокими числами Рейнольдса градиенты напряжения или плотности теплового потока велики, как правило, в сравнительно тонких слоях, приблизительно параллельных направлению основно-

го потока. Таким образом, в простейшем случае плоского течения в направлении x касательное напряжение $\mu(du/dy)$ велико лишь в ограниченном интервале значений y , скажем, в области пограничного слоя, примыкающего к твердой стенке в плоскости $y = 0$. Вне этой области du/dy является величиной того же порядка, что и, скажем, du/dx , но внутри сдвигового слоя выполняется неравенство

$$\frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.1)$$

и толщина слоя δ , согласно определению «тонкого» сдвигового слоя, развивающегося в направлении x , удовлетворяет условию

$$\frac{d\delta}{dx} \ll 1. \quad (3.2)$$

Если число Прандтля (разд. 1.3) не слишком мало, аналогичные соображения применимы и для градиентов энтальпии, скажем, в пограничном слое на *нагретой* поверхности в плоскости $y = 0$. Для простоты будем рассматривать градиенты температуры. Итак,

$$\frac{\partial T}{\partial y} \gg \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (3.3)$$

$$\frac{d\delta_t}{dx} \ll 1, \quad (3.4)$$

где δ_t — толщина *теплового* пограничного слоя (рис. 3.1, *a*). Эти оценки можно применить при анализе порядка величины членов в уравнениях, выведенных в гл. 2 и представленных ниже, чтобы получить в итоге уравнения пограничного слоя. По существу, эти уравнения отличаются от уравнений Навье — Стокса тем, что в них отброшены малые члены в уравнении движения в направлении x , а уравнение движения в направлении y сводится к равенству $\partial p/\partial y = 0$, т. е. к утверждению, что изменением давления поперек сдвигового слоя *можно пренебречь*.

В случае стационарного плоского несопряженного течения уравнения сохранения, выведенные в разд. 2.1—2.4, можно записать следующим образом:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.5)$$

уравнение движения в направлении x

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) + f_x, \quad (3.6)$$

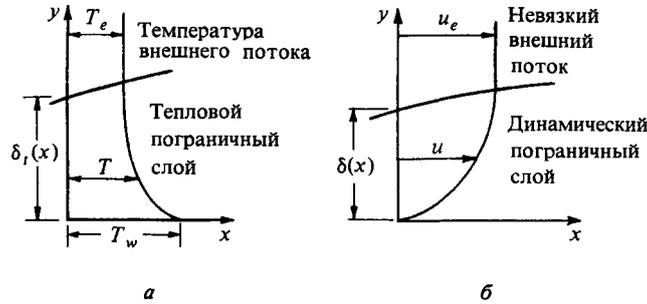


Рис. 3.1. Профили температуры (а) и скорости (б) при обтекании твердой поверхности.

уравнение движения в направлении y

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'^2}) - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'v'}) + f_y, \quad (3.7)$$

уравнение энергии

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{T'u'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{T'v'}). \quad (3.8)$$

Эти уравнения описывают любое установившееся плоское несопряженное течение, в том числе течение в тонком сдвиговом слое и течение, в котором области больших вязких напряжений не являются тонкими слоями, параллельными направлению основного потока (пример — зона возвратного течения непосредственно за уступом). Они допускают наличие градиентов давления и диффузии в двух взаимно перпендикулярных направлениях, и поэтому при постановке какой-либо задачи необходимо знать граничные условия для каждой переменной или ее градиента на всех четырех границах области решения, которая для простоты предполагается прямоугольной.

Как отмечалось выше, наиболее интересный результат анализа порядка величины членов, входящих в уравнения Навье — Стокса для тонкого сдвигового слоя, состоит в том, что давление примерно равно значению на границе пограничного слоя и, следовательно, на одну искомую функцию в уравнениях становится меньше. С учетом этого факта и обстоятельства, что градиентами напряжений в направлении x (диффузией количества движения в направлении x вследствие вязкости или турбулентности) пренебрегается, можно

сделать вывод, что возмущение, вносимое в сдвиговый слой в некотором сечении x_0 , не вызывает существенного возмущения течения выше по потоку от этого сечения (в предположении, что величина u положительна), пока оно косвенным образом не возмущает давление *вне* сдвигового слоя. Такое отсутствие передачи влияния возмущения вверх по потоку означает, что уравнения тонкого сдвигового слоя можно решать численно маршевым методом, начиная с некоторого исходного сечения и переходя затем к следующим сечениям, расположенным ниже по потоку. В отличие от этого уравнения Навье — Стокса допускают передачу влияния вверх по потоку, и их нужно решать, многократно применяя маршевый метод до достижения сходимости решения¹⁾. Математически это означает, что уравнения Навье — Стокса для установившегося течения являются «эллиптическими», а уравнения тонкого сдвигового слоя — «параболическими». Ниже будет показано, что уравнение энтальпии из эллиптического также становится параболическим.

Подробный анализ уравнений тонкого сдвигового слоя начнем с рассмотрения самого простого случая — ламинарного несопряженного течения.

Ламинарное течение

Если толщина пограничного или другого тонкого сдвигового слоя равна δ , а скорость на границе слоя u_e , то характерное значение градиента скорости поперек слоя du/dy составляет величину порядка u_e/δ (рис. 3.1, б); характерное значение du/dx составляет величину порядка u_e/x , где x — расстояние от начала пограничного слоя. Следовательно, отношение $(du/dx)/(du/dy)$ является величиной порядка δ/x , или, что более удобно, $d\delta/dx$. Из уравнения неразрывности (3.5) следует, что производная dv/dy также является величиной порядка u_e/x , и поэтому значение v вблизи границы пограничного слоя составляет величину порядка $u_e\delta/x$ или $u_e d\delta/dx$. Повторяя рассуждения, использованные при оценке $(du/dx)/(du/dy)$, можно показать, что отношение $(\partial^2 u/\partial x^2)/(\partial^2 u/\partial y^2)$ является величиной порядка $(\delta/x)^2$ или $(d\delta/dx)^2$ (см. задачу 3.1).

Теперь применим результаты этого анализа порядка величины членов для уравнения движения в направлении x (3.6), пренебрегая

¹⁾ Иными словами, при решении уравнений пограничного слоя в направлении вектора скорости набегающего потока решается задача Коши с граничными условиями только в начальном сечении, а при решении уравнений Навье — Стокса — краевая задача с условиями на замкнутой границе области. — *Прим. ред.*

градиентами турбулентных напряжений. Поскольку u является величиной порядка u_e , оба члена в левой части уравнения (3.6) имеют порядок u_e^2/x . Как было показано выше, производная $\partial^2 u/\partial x^2$ в $(\delta/x)^2$ раз меньше производной $\partial^2 u/\partial y^2$, а последняя является величиной порядка u_e/δ^2 . Следовательно, производной $\partial^2 u/\partial x^2$ можно пренебречь по сравнению с $\partial^2 u/\partial y^2$. В общем можно ожидать, что, поскольку вне сдвигового слоя справедливо уравнение Бернулли, $(-1/\rho)\partial p/\partial x$ будет величиной того же порядка, что и $u_e du_e/dx$ (в сдвиговом слое обе величины, разумеется, равны друг другу, если p слабо зависит от y), т. е. порядка u_e^2/x . Часть f_x , которая не уравновешивается градиентом «гидростатического» давления, не может быть величиной более высокого порядка, чем ускорение, т. е. u_e^2/x . Таким образом, если пренебречь градиентом напряжения в направлении x , т. е. $\partial^2 u/\partial x^2$, то для ламинарного несопряженного тонкого сдвигового слоя, в котором δ/x или $d\delta/dx \ll 1$, уравнение движения в направлении x является упрощенной формой уравнения (3.6) (без членов, выражающих турбулентные напряжения) и имеет вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_x. \quad (3.9)$$

Член $\nu \partial^2 u/\partial y^2$, являющийся величиной порядка $\nu u_e/\delta^2$, не может иметь более высокий порядок, чем остальные члены (т. е. u_e^2/x), а если он имеет более низкий порядок, то вязкие напряжения не существенны во всей области течения. Итак, в тонком сдвиговом слое $\nu u_e/\delta^2$ является величиной порядка u_e^2/x и, следовательно, δ является величиной порядка $\sqrt{\nu x/u_e}$. На основании аналогичных соображений $d\delta/dx$ является величиной порядка $(u_e x/\nu)^{-1/2}$ или $(u_e \delta/\nu)^{-1}$; число Рейнольдса $u_e \delta/\nu$ можно записать в виде $\rho u_e^2/(\mu u_e/\delta)$, т. е. в виде отношения характерного скоростного напора к характерному вязкому напряжению.

Подобным же образом проводится анализ порядка величины членов, входящих в уравнение движения в направлении y (3.7), причем турбулентными членами снова пренебрегается. Первый член в левой части уравнения (3.7) $u(\partial v/\partial x)$ является величиной порядка $u_e v/x$ или $u_e^2 \delta/x^2$, как и второй член $v(\partial v/\partial y)$. Наибольший из членов вязких напряжений $\partial^2 v/\partial y^2$ также является величиной порядка $u_e^2 \delta/x^2$, поскольку ν имеет тот же порядок, что и $\delta^2/u_e x$. В итоге получаем, что учитывающий давление член в этом уравнении $(-1/\rho)\partial p/\partial y$ имеет наибольший порядок $u_e^2 \delta/x^2$ и (если пренебречь влиянием поверхностных сил, о чем уже упоминалось выше), изменение давления поперек сдвигового слоя толщиной δ является вели-

чиной порядка $\rho u_e^2 (\delta/x)^2$. Это означает, что изменение $\partial p/\partial x$ поперек сдвигового слоя пренебрежимо мало.

Как утверждалось выше, член $(-1/\rho)\partial p/\partial x$ вне сдвигового слоя и *внутри* него, как это следует из полученных результатов анализа, можно заменить членом $u_e du_e/dx$, получая в итоге

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_x, \quad (3.10a)$$

или

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_x. \quad (3.10b)$$

Таким образом, совместно с прежним уравнением неразрывности (3.5) получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными u и v в установившемся плоском несопряженном ламинарном пограничном слое.

Приближение тонкого сдвигового слоя непосредственно применимо к уравнению энтальпии. По тем же самым соображениям, как и высказанные выше, но примененным для *теплового* пограничного слоя или другого тонкого сдвигового слоя с $\delta \delta_i/dx \ll 1$, можно в уравнении (3.8) пренебречь производной $\partial^2 T/\partial x^2$ по сравнению с $\partial^2 T/\partial y^2$, так что в случае установившегося плоского ламинарного течения с постоянными свойствами уравнение (3.8) сводится к следующему:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \equiv \frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (3.11)$$

которое аналогично уравнению (3.10), записанному без членов, выражающих силы давления и поверхностные силы. Отметим, что, поскольку пренебрегается производной $\partial^2 T/\partial x^2$, уравнение (3.11) несправедливо в области непосредственно за ступенькой температуры стенки. Однако в реальных теплообменниках благодаря продольной теплопроводности в твердой стенке изменение температуры обычно довольно плавное на сравнительно большой длине, так что уравнение (3.11) остается справедливым. Ниже будет показано, что при проведении расчетов также удобно сглаживать ступеньки температуры.

Для оценки величины δ_i можно применить такой же анализ, который проводился выше и из которого следует, что δ является величиной порядка $\sqrt{\nu x/u_e}$. Если характерный перепад температуры поперек сдвигового слоя равен ΔT , то $u(\partial T/\partial x)$ является величиной

порядка $u_e \Delta T / x_i$, где координата x_i измеряется от начала *теплового* слоя. Если этот член имеет тот же порядок, что и член $(\nu / Pr) \partial^2 T / \partial y^2$, являющийся величиной порядка $(\nu / Pr) \Delta T / \delta_i^2$, то, следовательно, δ_i имеет порядок $\sqrt{[(\nu / Pr) x_i / u_e]}$.

Турбулентное течение

К турбулентному течению можно применить такие же соображения, как и к ламинарному течению, и показать, что членом $\nu (\partial^2 u / \partial x^2)$ в уравнении движения в направлении x (3.6) можно пренебречь по сравнению с членом $\nu (\partial^2 u / \partial y^2)$. Рассматривая турбулентные напряжения, можно показать на основании экспериментальных данных, что $\overline{u'^2}$ имеет тот же порядок, что и $\overline{u'v'}$, так что $\overline{du'^2/dx}$ меньше $\overline{du'v'/dy}$ в δ/x раз. Анализируя уравнение движения в направлении y , можно показать, что члены в его левой части и наибольший из двух вязких членов вновь имеют порядок $u_e^2 \delta / x^2$, а, поскольку $\overline{u'^2}$ и $\overline{u'v'}$ — величины одного порядка, $\overline{du'v'/dx}$ имеет порядок $(\delta/x) (\overline{dv'^2/dy})$. Так как в уравнении движения в направлении x ожидается, что $\overline{du'v'/dy}$ имеет одинаковый порядок с членами ускорения в левой части уравнения (т. е. u_e^2/x), член $\overline{dv'^2/dy}$ в уравнении движения в направлении y является величиной порядка u_e^2/x , так что перепад давления поперек слоя должен быть величиной порядка $\rho u_e^2 \delta / x$. Остальные члены в уравнении движения в направлении y малы, так что член $\overline{dv'^2/dy}$ приблизительно уравнивается членом $(-1/\rho) \partial p / \partial y$ (см. задачу 3.2.)¹⁾.

Итак, при рассмотрении турбулентного течения опять можно пренебречь членом с градиентом напряжения в направлении x , в данном случае $\overline{du'^2/dx}$, и также пренебречь изменением давления поперек сдвигового слоя. Однако оба этих члена в δ/x раз меньше оставшихся членов, в то время как для ламинарного течения они были меньше в $(\delta/x)^2$ раз. Это не отражает непосредственно того факта, что в турбулентном течении величина $d\delta/dx$ больше, чем в ламинарном, но оба этих факта, взятые вместе, свидетельствуют о том, что для турбулентного течения приближение тонкого сдвигового слоя справедливо в меньшей степени, чем для ламинарного.

¹⁾ Это означает, что $p + \rho \overline{v'^2}$ не зависит от y и, поскольку вне сдвигового слоя или на твердой стенке составляющая v' равна нулю, изменение давления поперек слоя является величиной *меньшего* порядка, чем $\rho u_e^2 \delta / x$; однако именно такой порядок величины имеют изменения давления на участке между границей слоя и зоной максимальных значений v'^2 .

Итак, с точностью до членов порядка δ/x уравнение движения в направлении x для несопряженного турбулентного течения записывается в виде

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} + f_x, \quad (3.12)$$

причем опять было использовано условие $\partial p/\partial y = 0$ и дифференциальная форма уравнения Бернулли для несжимаемой жидкости

$$u_e \frac{du_e}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp_e}{dx}. \quad (3.13)$$

По аналогии с уравнением движения для турбулентного течения следует считать, что в уравнении (3.8) $\overline{T'u'}$ и $\overline{T'v'}$ являются величинами одного порядка, но можно пренебречь величиной $\partial \overline{T'u'}/\partial x$ по сравнению с величиной $\partial \overline{T'v'}/\partial y$. В результате уравнение энтальпии для несопряженного турбулентного течения с точностью до членов порядка δ/x записывается следующим образом:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{T'v'}. \quad (3.14)$$

Осесимметричные течения

Для простоты все предыдущие уравнения были выведены только для плоского течения, а величина w и производные всех осредненных по времени величин по z полагались равными нулю. Трехмерное течение с ненулевыми производными по z описывается уравнениями, содержащими больше членов (например, задача 2.4). Однако частный случай осесимметричного течения, к которому относятся течение в круглой трубе, круглой струе или пограничном слое на поверхности тела с круглым поперечным сечением (тела вращения), можно рассматривать, записывая уравнение для трехмерного течения в цилиндрической системе координат (x, y, θ) , а затем полагая равными нулю производные параметров в направлении окружной координаты θ . Это очень удачный подход для описания течения в круглой трубе или струе, распространяющегося вдоль оси или под малыми углами к ней в соответствии с приведенными выше качественными соображениями для тонкого сдвигового слоя, которые можно принять без изменений, если y заменить на r . Однако при решении задачи о пограничном слое на теле вращения необходимо применить криволинейную систему координат (x, y) , показанную на рис. 3.2, в которой уравнения неразрывности, дви-

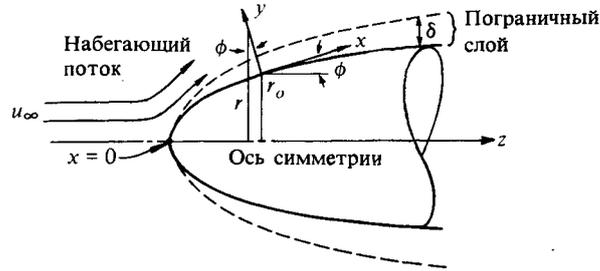


рис. 3.2. Обозначения и система координат для обтекания осесимметричного тела.

жения и энтальпии для несопряженного тонкого сдвигового слоя можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial r^K u}{\partial x} + \frac{\partial r^K v}{\partial y} = 0, \quad (3.15)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho r^K} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^K \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right) \right] + f_x, \quad (3.16)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\rho c_p} \frac{1}{r^K} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^K \left(k \frac{\partial T}{\partial y} - \rho c_p \overline{T'v'} \right) \right]. \quad (3.17)$$

Здесь показатель K равен единице для осесимметричного течения и нулю для плоского течения¹⁾. Отметим, что μ и k подведены под знак производной просто ради удобства, они пока еще постоянны.

В общем случае координата r связана с r_0 , радиусом поперечного сечения поверхности $y = 0$, соотношением

$$r(x, y) = r_0(x) + y \cos \phi(x), \quad (3.18)$$

где

$$\phi = \arctg \frac{dr_0}{dx}. \quad (3.19)$$

Используя параметр

$$t \equiv \frac{y \cos \phi}{r_0}, \quad (3.20)$$

можно записать соотношение (3.18) в виде

$$\frac{r}{r_0} = 1 + t. \quad (3.21)$$

¹⁾ В отечественной литературе для течений, параметры которых зависят от двух декартовых координат x, y , редко употребляется термин *двумерные течения* (two-dimensional flows), а используется термин *плоские течения*. — Прим. ред.

Параметр t , выражающий отклонение r от r_0 , называется параметром *поперечной кривизны*. Во многих задачах осесимметричного течения радиус тела намного больше толщины пограничного слоя, так что влиянием поперечной кривизны можно пренебречь. В таком случае уравнения (3.15)—(3.17) записываются в виде

$$\frac{1}{r_0^K} \frac{\partial}{\partial x} (r_0^K u) + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.22)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right) + f_x, \quad (3.23)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} - \rho c_p \overline{T'v'} \right), \quad (3.24)$$

где r_0 зависит только от x , но не от y . Отметим, что уравнения (3.23) и (3.24) по своей форме совпадают с уравнениями (3.12) и (3.14) для плоского течения. В задаче 3.5 рассматривается *преобразование Манглера*, позволяющее преобразовать уравнения для осесимметричного течения при малых t к эквивалентным уравнениям для плоского течения.

Для описания течений в круглых трубах и струях опять используются уравнения (3.15)—(3.17), причем $K = 1$, а параметры r_0 и ϕ , входящие в соотношение (3.18), равны нулю, так что $y = r$. Обычно для компактности уравнения (3.16) и (3.17) оставляют без изменений, не раскрывая правую часть уравнения с использованием тривиального соотношения $\partial r / \partial r \equiv 1$. Уравнение (3.15) можно, разумеется, записать в упрощенном виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) = 0, \quad (3.25)$$

поскольку $\partial r / \partial x = 0$. Следует отметить и понять разницу между уравнениями (3.22) и (3.25).

3.2. Оценка пульсаций плотности в сопряженных турбулентных течениях

Пульсации плотности в чистом газе связаны с пульсациями температуры и давления уравнением состояния $p = \rho RT$, записанным в дифференциальной форме (после логарифмирования)

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{T'}{\bar{T}}. \quad (3.26)$$

Пульсации температуры не входят непосредственно в уравнения движения; они оказывают воздействие на турбулентность путем влияния на коэффициенты вязкости и теплопроводности, а также на плотность, но во всех случаях вязкость слабо влияет на характеристики крупномасштабного турбулентного движения, которое вносит наибольший вклад в турбулентное напряжение. Пульсации давления и, разумеется, градиенты среднего давления входят в уравнения для мгновенного движения даже в случае (несопряженно-го) течения с постоянной плотностью, но, если отношение пульсационной составляющей давления p' к среднему абсолютному давлению p мало, влияние пульсаций давления будет примерно таким же, как в случае, когда это отношение *пренебрежимо*. Ниже будет показано, что в высокоскоростных сдвиговых слоях пульсации плотности обусловлены в основном пульсациями температуры; величина p'/\bar{p} мала по сравнению с $\rho'/\bar{\rho}$. Поэтому при рассмотрении влияния сжимаемости можно учитывать только $\rho'/\bar{\rho}$ или T'/\bar{T} ; в дальнейшем там, где для удобства применяется отношение T'/\bar{T} , читатель, рассматривающий близкие к изотермическим газовые смеси, должен иметь в виду отношение $\rho'/\bar{\rho}$.

Морковин [1], анализируя экспериментальные данные, полученные в работах Морковина и Финни [2], а также Кистлера [3], установил, что в сверхзвуковых пограничных слоях с низкими тепловыми потоками в стенку пульсации температуры торможения намного меньше пульсаций (статической) температуры. Согласно данным, представленным на рис. 3.3, среднеквадратичная пульсационная составляющая температуры торможения, отнесенная к параметру, который позволяет приблизительно скоррелировать результаты измерений при различных числах Маха, не превышает 0,05. Приведенное ниже соотношение (3.28) показывает, что пульсационная составляющая *статической* температуры, нормализованная таким же образом, в несколько раз больше и составляет около $2\sqrt{u'^2}/u_c$. Мгновенное значение температуры торможения определяется выражением

$$T_0 + T'_0 = T + T' + \frac{1}{2c_p} [(u + u')^2 + (v + v')^2 + (w + w')^2], \quad (3.27a)$$

но все пульсационные составляющие скорости малы по сравнению с u и в двумерном тонком сдвиговом слое течения, направленного вдоль оси x , $v \ll u$ и $w = 0$. В таком случае, разлагая квадратичные члены и пренебрегая малыми величинами, получаем

$$T_0 + T'_0 = T + T' + \frac{u^2}{2c_p} + \frac{uu'}{c_p}. \quad (3.27b)$$

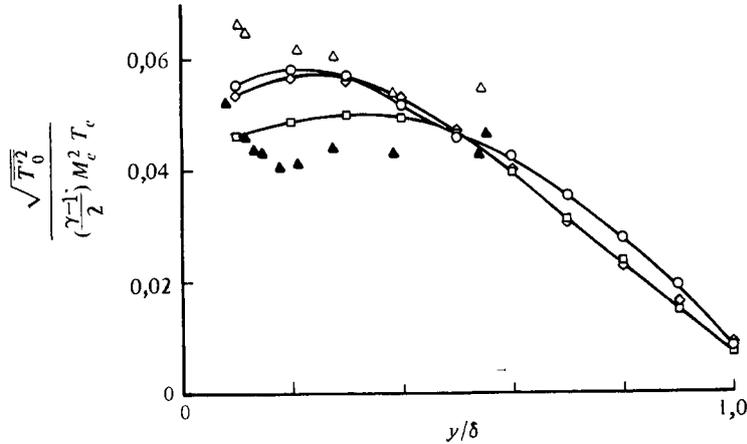


Рис. 3.3. Среднеквадратичная пульсационная составляющая температуры торможения в сверхзвуковых пограничных слоях (по данным Морковина [1]).

Если пульсация температуры торможения T_0' мала по сравнению с пульсацией (статической) температуры T' , то, вычитая из соотношения (3.27b) осредненную по времени величину $T_0 = T + u^2/2c_p$, приходим к выражению

$$T' \approx -\frac{uu'}{c_p}. \quad (3.28)$$

Этот результат качественно применим для высокоскоростных пограничных слоев, поскольку средняя температура высока там, где низка скорость (вблизи поверхности, где наиболее велика диссипация кинетической энергии в тепловую под действием вязких и турбулентных напряжений), и, следовательно, можно ожидать, что в любой момент времени *пульсации* скорости и температуры противоположны по знаку. Учитывая, что скорость звука a определяется формулой

$$a^2 = (\gamma - 1)c_p T, \quad (3.29)$$

а местное число Маха M — выражением

$$M = \frac{u}{a}, \quad (3.30)$$

можно переписать соотношение (3.28) в виде приближенного равенства

$$\frac{T'}{T} \approx -(\gamma - 1)M^2 \frac{u'}{u}, \quad (3.31)$$

из которого сразу же можно заключить, что, поскольку отношение u'/u обычно мало, величина T'/T , как правило, мала, если значение $(\gamma - 1)M^2$ не слишком велико по сравнению с единицей. Если пульсации давления малы, дифференциальная форма уравнения состояния (3.26) сводится к следующему соотношению:

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \approx -\frac{T'}{T}, \quad (3.32)$$

и в итоге получаем ключевой результат для высокоскоростных течений

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \approx (\gamma - 1)M^2 \frac{u'}{u}. \quad (3.33)$$

В низкоскоростном пограничном слое на нагретой стенке пульсации скорости и температуры также могут иметь противоположные знаки. Однако, поскольку движущий перепад температур $T_w - T_e$ действует независимо от перепада скоростей u_e , в то время как в высокоскоростном потоке они взаимосвязаны, соотношение (3.33) становится несправедливым. Вместо этого в случае точной аналогии между процессами переноса тепла и количества движения и слабого влияния отличия числа Прандтля Pr от единицы получаем соотношение

$$\frac{T'}{T_w - T_e} \approx -\frac{u'}{u_e}, \quad (3.34a)$$

или

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = \frac{-T'}{T} = \left(\frac{T_w - T_e}{T} \right) \frac{u'}{u_e}. \quad (3.34b)$$

Соотношения (3.31)—(3.34), разумеется, остаются справедливыми, если вместо мгновенных значений пульсационных составляющих подставить соответствующие среднеквадратичные значения (например, $\sqrt{u'^2}$ вместо u').

Теперь с помощью соотношений (3.33) и (3.34) можно приближенно оценить величины пульсаций плотности соответственно в высокоскоростных пограничных слоях и в сильно нагретых низкоскоростных пограничных слоях, чтобы определить, насколько малы члены в уравнениях неразрывности, движения и энергии, в которые входят пульсации плотности. По-видимому, эти соотношения менее точны для свободных сдвиговых слоев, в которых пульсации скорости и температуры слабее связаны друг с другом, но все еще пригодны для приближенных оценок.

Наибольшее значение $\sqrt{u'^2}/u_e$, достигаемое в низкоскоростном пограничном слое при нулевом градиенте давления, составляет примерно 0,1. Соответствующие значения для высокоскоростных потоков могут быть даже ниже, но, используя значения для низкоскоростных потоков в рассматриваемых соотношениях, записанных для «среднеквадратичных» параметров, можно получить верхнюю оценку $\sqrt{T'^2}/T$ или $\sqrt{\rho'^2}/\rho$ для высокоскоростного пограничного слоя или для низкоскоростного пограничного слоя на сильно нагретой поверхности. Типичные значения приведены в табл. 3.1. Чтобы выразить значения пульсационной составляющей температуры в высокоскоростном потоке, отнесенные к T_e , мы предположили, что максимальная величина пульсационной составляющей температуры достигается при $u/u_e = 0,5$. Значения для бесконечно больших величин отношения температур или числа Маха нереальны, но они приведены для того, чтобы показать, что отношение пульсационной составляющей температуры к местной температуре (или температуре) стенки не возрастает неограниченно. В этом нетрудно убедиться, рассматривая соотношение (3.34), которое в случае $T_w/T_e \rightarrow \infty$ сводится к выражению $\sqrt{T'^2}/T_w = \sqrt{u'^2}/u_e$. Анализируя соотношение (3.33), можно дать следующее объяснение стрем-

Таблица 3.1. Результаты приближенной оценки пульсационной составляющей температуры в предположении $\sqrt{u'^2}/u_e = 0,1$

а. Низкоскоростное течение около нагретой стенки							
$(T_w - T_e)/T_e$		0,25	0,5	1	2	4	∞
$T_w - T_e$	при $T_e = 300$ К	75	150	300	600	1200	∞
$\sqrt{T'^2}/T_e$	по уравнению (3.34)	0,025	0,05	0,1	0,2	0,4	∞
$\sqrt{T'^2}/T_w$		0,02	0,033	0,05	0,067	0,08	0,10
б. Высокоскоростное течение около теплоизолированной стенки (тепловой поток в стенку равен нулю) (T_r — температура «восстановления» (3.36))							
M_e		1	2	3	4	5	∞
$(T_r - T_e)/T_e$		0,178	0,712	1,6	2,85	4,45	∞
$\sqrt{T'^2}/T_e$	по уравнению (3.33)	0,04	0,16	0,36	0,64	1,0	∞
$\sqrt{T'^2}/T_r$		0,017	0,047	0,069	0,083	0,092	0,112

Примечание. Последняя строка каждой части таблицы наиболее важна, поскольку пульсационная составляющая температуры максимальна вблизи стенки.

лению пульсационной составляющей температуры к асимптотическому значению: если тепловой поток от высокоскоростного течения к поверхности не слишком велик, то температура стенки не намного меньше температуры торможения внешнего течения и, следовательно, быстро возрастает с увеличением числа Маха. При расчете значений, представленных в табл. 3.1, п. б, за характерную температуру была принята температура «восстановления», т. е. температура теплоизолированной стенки.

Температура восстановления всегда *меньше* температуры торможения внешнего течения H_e/c_p везде, кроме окрестности критической точки, независимо от того, больше единицы число Прандтля или меньше. Разность между ними обычно характеризуется коэффициентом восстановления

$$r = \frac{h_{w,ad} - h_e}{H_e - h_e}, \quad (3.35)$$

где индекс ad относится к условиям на теплоизолированной стенке. Для совершенного газа, если заменить $T_{w, ad}$ на T_r и использовать определения полной энтальпии и числа Маха, выражение (3.35) сводится к следующему:

$$r = \frac{T_r - T_e}{u_e^2/2c_p} = \frac{T_r/T_e - 1}{\frac{1}{2}(\gamma - 1)M_e^2}, \quad (3.36a)$$

или

$$T_r = T_e \left[1 + \frac{r}{2}(\gamma - 1)M_e^2 \right], \quad (3.36b)$$

Проведенный анализ не слишком точен, поскольку пренебрегается снижением типичных значений $\sqrt{u'^2}/u_e$ при возрастании M_e , но он дает столь малые величины отношения среднеквадратичной пульсационной составляющей температуры (или плотности) к средней температуре (или плотности), что даже при больших ошибках в анализе можно сделать вывод, что на практике пульсации плотности малы как в низкоскоростном течении с интенсивным теплообменом, так и в высокоскоростном течении на теплоизолированной стенке.

Итак, большинство членов, содержащих ρ' , выпадает из уравнений неразрывности, движения и энтальпии для тонкого сдвигового слоя. Например, рассмотрим уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u + \overline{\rho' u'}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v + \overline{\rho' v'}) = 0. \quad (2.39)$$

Применяя соотношение (3.33), для высокоскоростного пограничного слоя получаем

$$\overline{\rho'v'} \approx (\gamma - 1)M^2 \rho \frac{\overline{u'v'}}{u} = \rho v \left[(\gamma - 1)M^2 \frac{\overline{u'v'}}{uv} \right]. \quad (3.37)$$

Нельзя ожидать, что в любом высокоскоростном потоке ($M > 1$) величина, стоящая в квадратных скобках, будет иметь порядок меньше единицы. Следовательно, в уравнении неразрывности или движения *нельзя* пренебрегать значением $\overline{\rho'v'}$ по сравнению с ρv . (Строго говоря, следует рассматривать градиенты ρv и $\overline{\rho'v'}$ в направлении y , но, согласно рассуждениям, приведенным в разд. 3.1, они примерно равны характерным значениям самих этих параметров, умноженным на $1/\delta$.)

Отношение $\overline{\rho'u'}/\rho u$ можно приближенно оценить тем же способом — фактически просто заменяя v на u и v' на u' в уравнении (2.39) (см. задачу 3.6). В итоге получается, что величина $\overline{\rho'u'}$ пренебрежимо мала по сравнению с ρu , если только $(\gamma - 1)M^2$ не на порядок больше единицы.

При оценке величины членов типа $\overline{\partial(\rho'u'^2)}dx$ приходится рассматривать тройные произведения пульсационных составляющих скорости, в данном случае u'^3 . Мы просто отметим, что эти члены еще меньше членов типа $\overline{\partial(u\rho'u')}dx$ и практически во всех случаях ими можно пренебречь [4].

3.3. Уравнения для сопряженных турбулентных течений

Выведенные в разд. 2.4 уравнения сохранения для газа довольно громоздки, и здесь мы не будем повторять ни уравнения неразрывности для плоского турбулентного потока газа (2.39), ни уравнения движения в направлении x (2.41) или (2.42). Форма уравнения движения в направлении x , справедливого для ламинарного или турбулентного течения газа в тонком сдвиговом слое, снова определяется путем анализа порядка величины членов. Соображения, относящиеся к основным членам, остаются точно такими же, как и в случае течения с постоянными свойствами, но при рассмотрении членов, содержащих пульсации плотности в турбулентном течении, требуется известная осторожность. Поэтому данный раздел посвящен в основном «пульсационным» членам, а уравнения для сопряженного ламинарного течения, разумеется, являются частным случаем уравнений для турбулентного течения.

Как отмечалось в разд. 3.2, члены с $\overline{\rho'u'}$ и $\overline{\rho'v'}$ имеют обычно одинаковый порядок, а величина $\overline{\rho'v'}$ может быть сравнима с ρv даже при умеренных сверхзвуковых числах Маха или в низкоскоростных течениях со сравнительно небольшими изменениями абсолютной температуры (не более 2:1). Однако $\overline{\rho'u'} \ll \rho u$, и этой величиной можно пренебречь как в первом члене, так и в членах, заключенных в скобках, в уравнении (2.42). Обычно можно пренебречь величиной $\overline{\rho'u'^2}$ по сравнению с величиной $\overline{\rho u'^2}$ и $\overline{\rho'u'v'}$ по сравнению с $\overline{\rho u'v'}$, так как отношение $\overline{\rho'}/\overline{\rho}$ сравнительно мало. Однако в сдвиговых слоях с большими изменениями средней плотности значение $\overline{\rho'u'v'}$ может составлять несколько процентов $\overline{\rho u'v'}$.

Уравнения неразрывности и движения

Применим анализ порядка величины членов, аналогичный приведенному в разд. 3.1, к оставшимся членам уравнения (2.42). Члены, содержащие вязкие напряжения, имели в уравнении (2.42) настолько сложный вид, что мы не раскрывали их, обозначив просто σ . Теперь они существенно упрощаются, поскольку входящие в соотношения (2.6) для напряжений σ члены объемной вязкости, содержащие скорость изменения объема $du/dx + dv/dy$, малы. В итоге получаем

$$\rho u \frac{du}{dx} + \overline{\rho v} \frac{du}{dy} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho u'v'} + \overline{\rho'u'v'}) + \rho f_x + \overline{\rho'f'_x}, \quad (3.38)$$

где $\overline{\rho v}$ — сокращенная запись параметра $\rho v + \overline{\rho'v'}$. Мы оставили в уравнении член $\overline{\rho'u'v'}$, хотя в дальнейшем им все-таки пренебрегается.

Если применить упомянутые выше соображения относительно величины $\overline{\rho'v'}$ и соответствующих параметров, то можно показать, что в случае тонкого сдвигового олюя уравнение неразрывности (2.39) принимает вид

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho v} = 0. \quad (3.39)$$

Уравнение движения в направлении y обычно имеет вид $\overline{dp/dy} = 0$, так что в потоке с постоянной плотностью $\overline{dp/dx}$ можно заменить величиной $-\rho_e u_e du_e/dx$, где ρ_e — плотность внешнего потока.

При больших числах Маха изменения давления, обусловленные кривизной линий тока в плоскости (x, y) или градиентом напряжения Рейнольдса в направлении y , $\partial(\rho v'^2 + \rho' v'^2)/\partial y$, могут составлять существенную часть абсолютного давления. Перепад давления поперек сдвигового слоя, обусловленный кривизной линий тока $1/R$, является величиной порядка $\rho_e u_e^2 \delta/R$, где ρ_e и u_e — соответственно плотность и скорость на границе (скажем) сдвигового слоя. Поскольку число Маха на границе пограничного слоя M_e определяется формулой $M_e^2 = \rho_e u_e^2 / \gamma p_e$, отношение перепада давления, обусловленного кривизной линий тока, к давлению на границе пограничного слоя p_e является величиной порядка $\gamma M_e^2 \delta/R$. Изменение давления, обусловленное напряжением Рейнольдса, равно приблизительно $\rho v'^2$, а эта величина имеет такой же порядок, что и $\rho u' v'$, а в случае пограничного слоя — такой же порядок, что и напряжение поверхностного трения τ_w . Поэтому отношение типичного изменения давления, обусловленного напряжением Рейнольдса, к абсолютному давлению является величиной порядка τ_w/p_e ; выражая p_e через M_e , получаем

$$\frac{\tau_w}{p_e} = \frac{\tau_w}{\rho_e u_e^2 / 2} \left(\frac{\gamma M_e^2}{2} \right) = c_f \frac{1}{2} \gamma M_e^2.$$

Хотя c_f уменьшается с увеличением M_e , отношение индуцированного напряжением Рейнольдса давления к абсолютному давлению возрастает, особенно на холодной стенке, на которой величина c_f выше.

Уравнение энтальпии

Уравнение энтальпии для газа остается несколько более сложным, чем уравнение для потока с постоянными свойствами, даже после упрощений, связанных с приближением тонкого сдвигового слоя, но диссипативный член Φ , определенный соотношением (2.27), существенно упрощается, поскольку нужно учитывать лишь производные в направлении y , но даже в этом случае производная $\partial v/\partial y$ всегда мала. Для плоского установившегося течения из уравнения (2.49) получаем

$$\begin{aligned} c_p \left(\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \overline{\rho v} \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - c_p \frac{\partial}{\partial y} (\rho T' v' + \rho' T v') + u \frac{dp}{dx} + \\ &+ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \rho \epsilon. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Отметим, что в соответствии с приближением тонкого сдвигового слоя ρ для плоского течения зависит только от x .

Вопрос о том, можно ли пренебречь в уравнении энтальпии членом с градиентом давления и членом, выражающим вязкую диссипацию, зависит от величины числа Маха и не имеет ничего общего с вопросом о справедливости приближения тонкого сдвигового слоя. Однако в данный момент удобно обсудить этот вопрос, поскольку в тонком сдвиговом слое упомянутые члены имеют значительно более простую математическую форму. Можно ли пренебречь в уравнении (3.40) диссипативным членом $\mu(\partial u/\partial y)^2$ по сравнению с членом, выражающим молекулярную теплопроводность, зависит от величины критерия

$$\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \ll \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right).$$

Если провести анализ порядка величины членов для течения с характерным перепадом температур ΔT в направлении y и характерной скоростью u_e , равной, например, скорости потока на внешней границе пограничного слоя, то это соотношение сводится к следующему:

$$\nu \left(\frac{u_e}{\delta} \right)^2 \ll \frac{k}{\rho} \frac{\Delta T}{\delta^2},$$

или, умножая обе части на $\delta^2/[(\gamma - 1)c_p T_e \nu]$, где T_e — температура на границе пограничного слоя, получаем

$$\frac{u_e^2}{(\gamma - 1)c_p T_e} \equiv M_e^2 \ll \frac{1}{(\gamma - 1)Pr} \frac{\Delta T}{T_e}.$$

Поскольку в газовых потоках $(\gamma - 1)Pr$ является величиной порядка единицы, пренебречь диссипативным членом в уравнении энтальпии можно в том случае, если число Маха намного меньше квадратного корня из относительного перепада температур, обусловленного теплообменом с потоком. Если $\Delta T = 10$ К и $T = 300$ К, то должно выполняться условие $M \ll 0,2$. Используя приближенный результат для тонкого сдвигового слоя $\delta^2 \sim \nu x/u_e$, можно получить аналогичное условие для ламинарного пограничного слоя, при выполнении которого можно пренебречь членом $u(dp/dx)$. Для турбулентного пограничного слоя получается даже более слабое условие (см. задачу 3.7). В высокоскоростных потоках, где диссипация — основной источник тепла, диссипативный и кондуктивный члены обязательно являются величинами одного порядка, откуда следует, что в данном случае отношение $\Delta T/T$ имеет порядок M^2 .

Если членами с градиентом давления и вязкой диссипацией можно пренебречь, а в этом случае можно пренебречь и членом $\rho' T' v'$, то уравнение (3.40) сводится к следующему:

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - c_p \frac{\partial}{\partial y} (\rho \overline{T'v'}). \quad (3.41)$$

Уравнение полной энтальпии

При использовании приближения тонкого сдвигового слоя осредненная по времени полная энтальпия для двумерного турбулентного потока

$$H \equiv h + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (3.42a)$$

выражается упрощенной формулой

$$H = h + \frac{1}{2} u^2, \quad (3.42b)$$

которая для случая совершенного газа принимает вид

$$H = c_p T + \frac{1}{2} u^2. \quad (3.42c)$$

Уравнение сохранения полной энтальпии для любого течения, полученное из уравнения сохранения тепловой и кинетической энергии, суммированное с уравнением «сохранения» $h - e \equiv p/\rho$ (см. задачу 2.7), становится довольно сложным, если добавить члены, обусловленные турбулентностью. Однако в приближении тонкого сдвигового слоя можно использовать определение (3.42c) и суммировать уравнение сохранения кинетической энергии $u^2/2$ и уравнение сохранения (статической) энтальпии (3.40). Уравнение сохранения кинетической энергии $u^2/2$ получается после умножения на u уравнения движения в направлении x (3.38) и проведения некоторых преобразований

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \overline{\rho v} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) = -u \frac{dp}{dx} + u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - u \frac{\partial}{\partial y} (\rho \overline{u'v'} + \rho' \overline{u'v'}) + \\ + \rho u f_x + u \overline{\rho' f'_x}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Суммируя это уравнение с уравнением (3.40) и используя определение H (3.42c), получаем

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \overline{\rho v} \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} + \mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right) - c_p \frac{\partial}{\partial y} (\rho \overline{T'v'} + \rho' \overline{T'v'}) - \\ - u \frac{\partial}{\partial y} (\rho \overline{u'v'} + \rho' \overline{u'v'}) + \rho \epsilon + \rho u f_x + u \overline{\rho' f'_x}. \end{aligned} \quad (3.44a)$$

Применяя соотношение (3.42с) и определение числа Прандтля $Pr = \mu c_p / k$, можно получить другую форму уравнения

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \bar{\rho} v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} + \mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) u \frac{\partial u}{\partial y} \right] - c_p \frac{\partial}{\partial y} (\rho \overline{T'v'} + \bar{\rho}' \overline{T'v'}) - u \frac{\partial}{\partial y} (\rho \overline{u'v'} + \bar{\rho}' \overline{u'v'}) + \rho \varepsilon + \rho u f_x + u \bar{\rho}' f_x'.$$

Теперь ε , скорость диссипации кинетической энергии турбулентности в тепловую внутреннюю энергию, в большей части области течения приблизительно равна скорости производства энергии турбулентности, которая в свою очередь равна произведению турбулентного напряжения трения $\rho u'v' + \bar{\rho}' u'v'$ на градиент средней скорости du/dy (произведение напряжения на скорость деформации равно работе, совершаемой в единицу времени). Ошибка, вносимая предположением о равенстве этого произведения скорости диссипации энергии, по порядку величины сравнима с ошибками, обусловленными указанными выше предположениями, например, при переходе от соотношения (3.42а) к соотношению (3.42б). Поэтому объединим член, учитывающий касательное напряжение и диссипативный член (тождественно равный члену производства энергии) в один член $\partial[\mu(\rho u'v' + \bar{\rho}' u'v')]/\partial y$. Если теперь для краткости записать

$$\tau \equiv \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} - \bar{\rho}' \overline{u'v'}, \quad (3.45a)$$

$$\dot{q} \equiv -k \frac{\partial T}{\partial y} + c_p \rho \overline{T'v'} + c_p \bar{\rho}' \overline{T'v'}, \quad (3.45b)$$

то уравнение (3.44а) примет вид

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \bar{\rho} v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-\dot{q} + u\tau) + \rho u f_x + u \bar{\rho}' f_x'. \quad (3.46)$$

В случае ламинарного течения уравнение (3.44б) сводится к следующему:

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} + \mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) u \frac{\partial u}{\partial y} \right]. \quad (3.47a)$$

Если число Прандтля равно единице, уравнение полной энтальпии принимает вид

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial H}{\partial y} \right). \quad (3.47b)$$

Осесимметричные течения

Уравнения для сопряженного осесимметричного течения, аналогичные уравнениям (3.15)—(3.17), в случае совершенного газа можно записать без дополнительных комментариев следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}(r^K \rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(r^K \bar{\rho} v) = 0, \quad (3.48)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{\rho} v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{r^K} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^K \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \bar{\rho}' u' v' - \bar{\rho}' u' v' \right) \right] + \rho f_x + \bar{\rho}' f'_x, \quad (3.49)$$

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \bar{\rho} v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{c_p}{r^K} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^K \left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial y} - \bar{\rho}' T' v' - \bar{\rho}' T' v' \right) \right]. \quad (3.50)$$

«Осесимметричный» вариант уравнения полной энтальпии (3.44а) имеет следующую форму:

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \bar{\rho} v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{r^K} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ r^K \left[k \frac{\partial T}{\partial y} - \rho c_p \bar{T}' v' - c_p \bar{\rho}' T' v' + u \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \bar{\rho}' u' v' - \bar{\rho}' u' v' \right) \right] \right\} + \rho \epsilon + \rho u f_x + \bar{u} \bar{\rho}' f'_x. \quad (3.51a)$$

Аналогичным образом «осесимметричный» вариант уравнения (3.44b) записывается в виде

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \bar{\rho} v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{r^K} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ r^K \left[\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} + \mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) u \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right\} - \frac{c_p}{r^K} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^K (\bar{\rho}' T' v' + \bar{\rho}' T' v') \right] - \frac{u}{r^K} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^K (\bar{\rho}' u' v' + \bar{\rho}' u' v') \right] + \rho u f_x + \bar{u} \bar{\rho}' f'_x. \quad (3.51b)$$

Используя обозначения (3.45), уравнения (3.49)—(3.51а) можно также представить следующим образом:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{\rho} v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{r^K} \frac{\partial}{\partial y} (r^K \tau) + \rho f_x + \bar{\rho}' f'_x, \quad (3.52)$$

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \bar{\rho} v \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{1}{r^K} \frac{\partial}{\partial y} (-r^K \dot{q}), \quad (3.53)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \bar{\rho} v \frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{1}{r^K} \frac{\partial}{\partial y} [r^K (-\dot{q} + u\tau)] + \rho u f_x + \bar{u} \bar{\rho}' f'_x. \quad (3.54)$$

Как и прежде, в этих уравнениях показатель K равен единице для осесимметричного течения и нулю для плоского течения.

3.4. Интегральные уравнения

Полезно рассмотреть уравнения, которые получаются после интегрирования уравнений движения и энтальпии поперек сдвигового слоя (т. е. от $y = 0$ до $y = \delta$) и которые применяются в простых методах расчета, называемых *интегральными методами*. Будет дан вывод этих уравнений для плоского течения, а в конце раздела будут приведены без вывода соответствующие уравнения для осесимметричного течения.

Плоское течение

Сначала рассмотрим уравнение движения (3.52). Пренебрегая объемными силами, обозначая сумму вязкого и турбулентного касательных напряжений через τ и заменяя $-dp/dx$ членом $\rho_e u_e (du_e/dx)$, получаем

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \overline{\rho v} \frac{\partial u}{\partial y} = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y}. \quad (3.55)$$

Затем умножим уравнение неразрывности (3.48) на u и сложим полученное уравнение с уравнением (3.55)

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (u \overline{\rho v}) = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y}. \quad (3.56)$$

Теперь проинтегрируем это уравнение по y поперек сдвигового слоя, выбрав в качестве верхнего предела интегрирования $y = h$, где величина h не зависит от x и достаточно велика по сравнению с толщиной сдвигового слоя δ , так что все параметры при $y = h$ равны соответствующим значениям во внешнем потоке: $u \rightarrow u_e$ и т. д. После интегрирования уравнение (3.56) принимает вид

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) dy + u_e \rho_h v_h = \int_0^h \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} dy - \tau_w, \quad (3.57)$$

где τ_w — напряжение поверхностного трения. Из уравнения неразрывности (3.39) следует соотношение

$$\rho_h v_h = - \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dy.$$

В таком случае

$$\int_0^h \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) - u_e \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) - \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} \right] dy = - \tau_w \quad (3.58)$$

и после преобразования

$$\int_0^h \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} [\rho u (u_e - u)] - \frac{du_e}{dx} (\rho_e u_e - \rho u) \right\} dy = -\tau_w. \quad (3.59)$$

Поскольку $u_e - u = 0$ при $y \geq h$, оба слагаемых подынтегральной функции вносят свой вклад только при $y < h$ независимо от h . Следовательно, первую составляющую интеграла можно записать в виде

$$-\frac{d}{dx} \int_0^h \rho u (u_e - u) dy,$$

причем теперь производная по x становится обыкновенной, а не частной, так как определенный интеграл не зависит от y . После небольшого преобразования, изменения знака и замены h на ∞ , поскольку подынтегральная функция равна нулю при больших y , получаем

$$\frac{d}{dx} \left[\rho_e u_e^2 \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy \right] + \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) dy = \tau_w. \quad (3.60)$$

Толщина потери импульса θ , определяемая формулой

$$\theta = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(\frac{u_e - u}{u_e} \right) dy \quad (3.61)$$

выражает уменьшение плотности потока количества движения, обусловленное наличием пограничного слоя. Аналогичным образом можно определить толщину вытеснения δ^* , которая выражает уменьшение массового расхода,

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) dy. \quad (3.62)$$

Подставляя (3.61) и (3.62) в (3.60), получаем

$$\frac{d}{dx} (\rho_e u_e^2 \theta) + \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} \delta^* = \tau_w, \quad (3.63a)$$

или

$$\frac{d}{dx} (\rho_e u_e^2 \theta) = \tau_w + \delta^* \frac{d\rho}{dx}. \quad (3.63b)$$

Применяя соотношение для изоэнтропного течения

$$\frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} = -\frac{M_e^2}{u_e} \frac{du_e}{dx}, \quad (3.64)$$

а также используя определения местного коэффициента поверхностного трения

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_e u_e^2} \quad (3.65)$$

и формпараметра

$$H = \frac{\delta^*}{\theta}, \quad (3.66)$$

можно записать уравнение (3.63) в виде

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} (H + 2 - M_e^2) = \frac{c_f}{2}. \quad (3.67)$$

В результате получено интегральное уравнение количества движения для плоского ламинарного или турбулентного течения газа. Для течения жидкости оно принимает вид

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} (H + 2) = \frac{c_f}{2}, \quad (3.68)$$

где теперь θ , δ^* и c_f определяются выражениями

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy, \quad (3.69a)$$

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy, \quad (3.69b)$$

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u_e^2}. \quad (3.69c)$$

Уравнение (3.67) применимо и для свободного сдвигового слоя, если начало координаты $y = 0$ расположить на нижней границе слоя или ниже нее и принять $c_f = 0$.

Вывод интегрального уравнения энтальпии для плоского течения газа при отсутствии объемных сил начнем с рассмотрения уравнения полной энтальпии (3.46). Используя уравнение неразрывности (3.39), можно записать уравнение (3.46) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u H) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v H) = \frac{\partial}{\partial y} (-\dot{q} + u\tau). \quad (3.70)$$

Теперь проинтегрируем это уравнение по y от $y = 0$ до $y = h > \delta$ и получим в результате

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x} (\rho u H) dy + \rho_h v_h H_e = \dot{q}_w. \quad (3.71)$$

Как и при выводе интегрального уравнения количества движения, выражаем $\rho_h v_h$ с помощью уравнения неразрывности, переписываем уравнение (3.71) следующим образом:

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x} [\rho u (H_e - H)] dy = -\dot{q}_w \quad (3.72)$$

и преобразуем его к виду

$$\frac{d}{dx} \left[\rho_e u_e \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{H}{H_e} \right) dy \right] = -\frac{\dot{q}_w}{H_e}, \quad (3.73)$$

применяя те же соображения, которые были использованы при переходе от уравнения (3.59) к уравнению (3.60). Поскольку при $y \geq h$ равенство $H_e - H = 0$ выполняется (с достаточной точностью), подынтегральная функция в уравнении (3.73) не равна нулю лишь при $y < h$ независимо от h .

Согласно уравнению (3.73), изменение потерь полной энтальпии на единицу ширины (в направлении z) равно плотности теплового потока от жидкости к омываемой поверхности. Сравнивая это уравнение с уравнением (3.60), можно видеть, что изменение потери рассматриваемого параметра в каждом случае связано с переносом к стенке (переносом энтальпии $-\dot{q}_w$ и количества движения τ_w). В интегральное уравнение количества движения входит дополнительный член, зависящий от градиента давления, но, как было показано в разд. 3.3, величина *полной энтальпии* не зависит от градиента давления как такового.

Если ввести величину θ_H , определенную формулой

$$\theta_H = \int_0^h \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(\frac{H - H_e}{H_w - H_e} \right) dy, \quad (3.74)$$

то интегральное уравнение полной энтальпии для плоского ламинарного или турбулентного течения газа (3.72) можно записать в виде

$$\frac{d}{dx} [\rho_e u_e (H_w - H_e) \theta_H] = \dot{q}_w. \quad (3.75)$$

Входящая в это уравнение величина θ_H выражает *избыточную* плотность потока полной энтальпии, обусловленную наличием теплового пограничного слоя. Для течения жидкости в случае, когда полная энтальпия H равна статической энтальпии h , толщина потери полной энтальпии θ_H равна толщине потери статической энтальпии

$$\theta_h = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(\frac{h - h_e}{h_w - h_e} \right) dy, \quad (3.76)$$

где вместо h можно подставить $c_p T$, если величина c_p постоянна. Учитывая это и принимая плотность ρ постоянной, можно записать уравнение (3.75) для течения жидкости в виде

$$\frac{d}{dx} [u_e (T_w - T_e) \theta_h] = \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p}. \quad (3.77)$$

Если стенка имеет *постоянную* температуру, то уравнение (3.77) можно переписать следующим образом:

$$\frac{1}{u_e} \frac{d}{dx} (u_e \theta_T) = St, \quad (3.78a)$$

или

$$\frac{d\theta_T}{dx} + \frac{\theta_T}{u_e} \frac{du_e}{dx} = St. \quad (3.78b)$$

В эти уравнения входят число Стантона St

$$St = \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p (T_w - T_e) u_e}, \quad (3.79)$$

и толщина потери энергии

$$\theta_T = \int_0^h \frac{u}{u_e} \left(\frac{T - T_e}{T_w - T_e} \right) dy. \quad (3.80)$$

Осесимметричное течение

Аналогичным образом можно вывести интегральное уравнение количества движения для осесимметричного течения газа. Используя параметры θ и δ^* , которые определяются теперь несколькими формулами

$$\theta = \int_0^\infty \frac{r}{r_0} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy, \quad (3.81a)$$

$$\delta^* = \int_0^\infty \frac{r}{r_0} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) dy, \quad (3.81b)$$

это уравнение можно записать следующим образом:

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} (H + 2 - M_e^2) + \frac{\theta}{r_0} \frac{dr_0}{dx} = \frac{c_f}{2}, \quad (3.82a)$$

или

$$\frac{1}{r_0} \frac{d}{dx} (r_0 \theta) + \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} (H + 2 - M_e^2) = \frac{c_f}{2}. \quad (3.82b)$$

Аналогично получается интегральное уравнение полной энтальпии

$$\frac{1}{r_0} \frac{d}{dx} [r_0 \rho_e u_e \theta_H (H_w - H_e)] = \dot{q}_w. \quad (3.83)$$

Для случая течения жидкости при постоянной температуре стенки уравнение (3.83) с использованием соотношения (3.79) сводится к следующему:

$$\frac{d\theta_T}{dx} + \frac{\theta_T}{u_e} \frac{du_e}{dx} + \frac{\theta_T}{r_0} \frac{dr_0}{dx} = St. \quad (3.84)$$

3.5. Граничные условия

Для решения полной системы уравнений движения и переноса тепла, рассмотренной в гл. 2, требуется задать граничные условия на всех границах области решения. (Более подробное обсуждение приводится в гл. 4 работы [5], а общий анализ дифференциальных уравнений в частных производных — в работе [6].) В случае плоского установившегося течения необходимо задать значения всех переменных или их градиентов на четырех границах двумерной области расчета, которую для простоты будем считать прямоугольной. Уравнения тонкого сдвигового слоя являются параболическими, и для них требуются граничные условия лишь на трех границах прямоугольной области решения. Условия на границе, расположенной ниже по потоку, задавать не нужно, поскольку при использовании уравнений такого типа передача влияния вверх по потоку, скажем от сечения $x = x_1$ (рис. 3.4) к сечению $x < x_1$, не допускается. Это одно из основных упрощений, которые достигаются при использовании уравнений тонкого сдвигового слоя, так как решение можно получить маршевым методом, начиная с сечения, расположенного выше по потоку, и двигаясь к сечению, расположенному ниже по потоку.

Несопряженные течения

Для простоты рассмотрим вначале несопряженные течения. Граничные условия для поля скоростей, накладываемые на u и v , обычно заключаются в том, что продольная составляющая средней скорости u задается на трех границах области расчета, в то время как v определяется только на одной границе, обычно на нижней. В уравнениях тонкого сдвигового слоя давление *не является* неизвестной величиной, так как уравнением движения в направлении y пре-

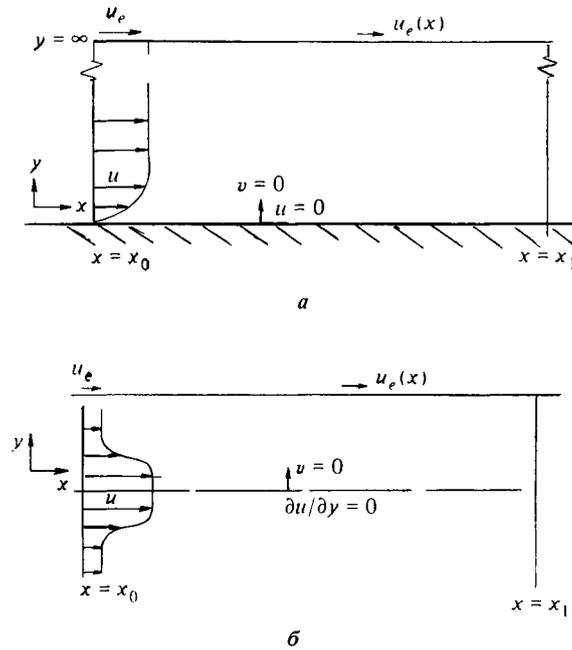


Рис. 3.4. Граничные условия для тонких сдвиговых слоев.

небрегается, а это означает, что изменение давления поперек слоя не оказывает влияния на решение. Если сдвиговой слой развивается в «невязком» потоке и применимо уравнение Бернулли, то заданная продольная составляющая скорости на внешней границе слоя равносильно заданию давления, поскольку нормальная составляющая скорости достаточно мала, так что ее вкладом в полное давление можно пренебречь.

Итак, обычные начальные и граничные условия для уравнений тонкого сдвигового слоя, применяемые при расчете пограничного слоя на плоскости $z = 0$, (рис. 3.4, а) имеют следующий вид:

$$0 < y < \infty, \quad u = u(y), \quad x = x_0 \quad (\text{начальные условия}), \quad (3.85a)$$

$$\left. \begin{aligned} y = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \\ y = \infty, \quad u = u_e(x), \end{aligned} \right\} x \geq x_0. \quad (3.85b)$$

Здесь через ∞ обозначено значение y , большое по сравнению с толщиной сдвигового слоя; на практике внешнее граничное условие можно задавать при значении y (скажем, y_e), примерно в 1,5 раза большем обычной «суммарной» толщины сдвигового слоя, т. е.

расстояния от точки $y = 0$ до точки, в которой $u = 0,995 u_e$. Эти граничные условия применимы для течения в пограничном слое. Большинство свободных сдвиговых слоев симметричны относительно линии $y = 0$ и, следовательно, на этой линии $v = 0$, но условие $u = 0$ на линии $y = 0$ должно быть заменено условием $du/dy = 0$, представляющим собой условие симметрии течения относительно линии $y = 0$, так что граничные условия для симметричного свободного тонкого сдвигового слоя, развивающегося на большом расстоянии от твердых поверхностей (рис. 3.4, б), имеют вид

$$\begin{aligned} y = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \\ y = \infty, \quad u = u_e. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Следовательно, необходимо проводить расчет, скажем, только для верхней половины области течения. В других случаях для несимметричных свободных сдвиговых слоев типа слоя смещения непосредственно за срезом сопла необходимо задавать две величины u_e , при $y = -\infty$ и $y = \infty$, связанных уравнением Бернулли, и условие постоянства статического давления поперек сдвигового слоя. В таких случаях необходимо задать v при некотором значении y (обычно из решения для внешнего течения).

Простейшими являются течения, в которых u_e не зависит от x ; в случае пограничного слоя — это безградиентное (с постоянным давлением) обтекание плоской пластины, а в случае турбулентной струи — течение с $u_e = \text{const} = 0$ (затопленная струя, распространяющаяся в «неподвижном воздухе»). Как будет показано ниже, в этих задачах и в задаче о следе с $u_e = \text{const}$ и малым дефектом скорости (величина $(u_e - u)$ мала во всей области течения) решение уравнений тонкого сдвигового слоя выражается простыми функциями

$$\frac{u}{\Delta u} = f\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad (3.87a)$$

или

$$\frac{u_e - u}{\Delta u} = f\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad (3.87b)$$

где Δu — изменение скорости поперек сдвигового слоя (например, скорости на оси струи, распространяющейся в неподвижном воздухе), а сами функции не зависят от x , если не считать слабой зависимости δ от x . Это — *автомодельные (подобные) решения*. Такое название они получили потому, что если уравнения движения преобразовать

таким образом, что они станут уравнениями относительно функции f , они превратятся в обыкновенные дифференциальные уравнения относительно $f(y/\delta)$ и все профили скорости $u(y)$ будут геометрически подобны, если построить их в форме соотношений (3.87). Ниже будет показано, что в реальных сдвиговых слоях отклонения от автомодельных решений часто достаточно малы, и это позволяет существенно ослабить зависимость решения от x ; другими словами, функция $f(y/\delta)$ значительно слабее зависит от x , чем $u(y)$, и поэтому ее легче рассчитать.

Для турбулентных течений на практике могут потребоваться дополнительные граничные условия, хотя в принципе приведенные выше граничные условия справедливы и в этом случае, если их применять как к осредненной, так и к пульсационной составляющим скорости. Подробности зависят от используемой модели турбулентности, и одна из основных трудностей заключается в том, что турбулентное течение вблизи твердой поверхности (в вязком подслое (разд. 6.1)) чрезвычайно сложно с физической точки зрения, хотя и определяется небольшим числом переменных. Следовательно, можно без особого труда скоррелировать экспериментальные данные для подслоя таким образом, чтобы найти верное значение средней скорости на границе подслоя, но довольно трудно распространить рациональным образом какую-либо модель турбулентности на подслое. Поэтому в некоторых расчетных методах на самом деле применяется не реальное граничное условие на стенке, а искусственное граничное условие на границе подслоя, полученное с помощью экспериментальных данных. В гл. 6 будут рассмотрены оба метода расчета характеристик течения в подслое.

Аналогичные соображения применимы для уравнений, описывающих поле температур. Если не используется приближение тонкого сдвигового слоя, температура должна быть задана на всех границах; можно задавать и плотность теплового потока, но это реально только для поверхностей твердых тел, нагреваемых с помощью электрической или ядерной энергии. В теплообменниках температура стенки и плотность теплового потока связаны теплофизическими свойствами твердого тела, и решения уравнений движения жидкости и теплопроводности в твердом теле должны быть сопряжены. Простейшие начальные и граничные условия для тонкого сдвигового слоя имеют следующий вид:

$$0 < y < \infty, \quad T = T(y), \quad x = x_0 \quad (\text{начальные условия}), \quad (3.88a)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0, \quad T = T_w(x), \\ y = \infty, \quad T = 0, \end{array} \right\} \quad x \geq x_0, \quad (3.88b)$$

причем снова для простоты взят случай пограничного слоя на твердой поверхности $y = 0$ в предположении, что температура стенки T_w (индекс w относится к условиям на стенке) известна. Можно задать граничное условие и иначе, предположив, что известна величина $\dot{q}_w = -k(\partial T/\partial y)_w$, т. е. задав «градиентное» граничное условие, а не условие симметрии для поля скоростей (3.86). Симметричные нагретые струи и следы, разумеется, подчиняются условию $\dot{q} = -k(\partial T/\partial y) = 0$ на линии симметрии.

Как отмечалось выше, при расчете тонкого сдвигового слоя обычно предполагается, что заранее известна скорость внешнего потока, в то время как на самом деле сдвиговый слой может оказывать существенное влияние на внешний поток, так что расчеты для обеих областей течения следует проводить совместно методом последовательных приближений [7]. На начальном участке канала пограничные слои развиваются на стенках канала, и до тех пор, пока они не сомкнутся, течение между ними остается невязким (молекулярным и турбулентным переносом количества движения и тепла можно пренебречь) и практически параллельным оси канала. Следовательно, можно предположить, что поперек ядра потока давление и осевая составляющая скорости постоянны, так что течение в ядре можно считать невязким и одномерным. Поэтому расчет вязко-невязкого взаимодействия довольно прост, хотя и не тривиален; нужно рассчитать скорость в ядре потока, которая обеспечивает постоянный массовый расход в канале (предполагается, что стенки канала непроницаемы), но ускорение потока в ядре и градиент давления, действующий на пограничный слой, связаны уравнением Бернулли. После смыкания пограничных слоев уравнение Бернулли становится несправедливым для ядра потока, и необходимо рассчитать характеристики взаимодействия пограничных слоев, развившихся на стенках канала. Общая схема расчета остается той же самой, но во всей области течения следует использовать уравнение тонкого сдвигового слоя, а не уравнение Бернулли в ядре потока. Эти затруднения при решении уравнения движения не оказывают существенного влияния на решение уравнений переноса тепла, поскольку поле скоростей известно.

Сопряженные течения

При анализе несопряженного течения можно сначала рассчитать поле скоростей, а затем использовать полученные результаты как входные данные для расчета поля температур. Этот подход справедлив, если предположить, что плотность и коэффициент вязкости не зависят от температуры, а влиянием выталкивающих сил можно

пренебречь. Однако, если температура изменяется достаточно сильно, вызывая существенные изменения коэффициента вязкости и плотности (отметим, что в газовых потоках существенные изменения давления обычно *связаны* с существенными изменениями температуры и нет необходимости рассматривать отдельно этот случай), уравнения, описывающие поле скоростей, становятся сопряженными с уравнениями, описывающими поле температур, как это отмечалось в разд. 1.3. В этих случаях те и другие уравнения необходимо решать совместно. Как будет показано в гл. 13, особую трудностей при этом не возникает, поскольку уравнения, описывающие поле скоростей, являются нелинейными и их приходится решать итерационным методом на каждом «шаге» маршевого процесса в направлении течения. Следовательно, в итерационный цикл довольно просто включить решение уравнений, описывающих поле температур, чтобы учесть изменение теплофизических свойств рабочего тела при решении уравнений для поля скоростей.

Граничные условия для сопряженных течений остаются такими же, как и для несопряженных. Методика сращивания с характеристиками подслоя для пристенных турбулентных течений становится более сложной, поскольку теперь приходится одновременно решать уравнения для скоростей и температур, и поэтому желательно распространить модель турбулентности до стенки.

Граничные условия для тонких сдвиговых слоев при наличии выталкивающих сил также не вызывают особых затруднений независимо от того, учитываются или считаются пренебрежимо малыми изменения плотности во всех членах, кроме самого члена, учитывающего архимедовы силы. Конечно, выталкивающие силы усложняют задачу и приводят к возникновению течений (типа факелов), не имеющих аналогов среди течений, в которых влияние выталкивающих сил пренебрежимо мало.

3.6. Уравнения тонкого сдвигового слоя.

Общие замечания

Приближение тонкого сдвигового слоя, рассмотренное в этой главе, является формальным приближением (в отличие от эмпирических приближений, используемых, например, при анализе турбулентных течений) и становится точным, когда скорость роста толщины сдвигового слоя (пограничного слоя, струи или следа) стремится к нулю. Основное преимущество приближения тонкого сдвигового слоя или пограничного слоя заключается в том, что уравнение сохранения составляющей количества движения по нормали к

сдвиговому слою может вырождаться, так что изменением давления поперек сдвигового слоя можно пренебречь. Кроме того, приближение тонкого сдвигового слоя позволяет пренебречь переносом количества движения и тепла в направлении течения, так что из уравнения сохранения следует, что скорость изменения рассматриваемого параметра вдоль линии тока среднего течения равна сумме результатов молекулярного или турбулентного переноса *поперек* сдвигового слоя и результатов, обусловленных градиентами давления, поверхностными силами и источниками тепла. Разумеется, результаты расчета характеристик тонкого сдвигового слоя должны сопрягаться с решением для течения вне этого слоя. В потоках, более сложных по сравнению с течениями в простых каналах или около профилей и лопаток, приближение тонкого сдвигового слоя может приводить к менее точным результатам, но оно полезно для инженерного решения практически всех задач теплообмена в условиях безотрывного обтекания твердой поверхности и может применяться с известной осторожностью даже для некоторых отрывных течений.

Хотя многие течения, представляющие инженерный интерес, являются трехмерными, лишь «умеренно трехмерные» течения типа обтекания стреловидного крыла можно рассчитать достаточно точно с разумными затратами машинного времени, а выбор метода расчета и модели турбулентности требует значительно более полных сведений в области гидромеханики, чем представленные в данной книге. Поэтому мы ограничились обсуждением плоских и осесимметричных течений. Однако следует подчеркнуть, что трехмерные течения содержат больше независимых переменных, а не физических принципов.

Законы сохранения, рассмотренные в гл. 2 и 3, выполняются для любой среды, но уравнения, конечно, упрощаются, если среда подчиняется уравнению состояния идеального газа и имеет постоянную удельную теплоемкость. Все уравнения, выведенные в гл. 2 и 3, справедливы и для более общих уравнений состояния, за исключением тех, при выводе которых непосредственно использовалось уравнение состояния газа. На практике лишь в газовых потоках кинетическая энергия составляет заметную часть тепловой энергии, поскольку потоки жидкости обычно имеют низкие скорости. Приближение постоянной плотности оправдано для большинства гидродинамических задач и даже для многих газодинамических задач, за исключением тех, в которых существенную роль играют выталкивающие силы; соответствующие члены в уравнениях могут быть велики даже в том случае, если относительное изменение плотности мало.

Задачи

- 3.1. Показать, что в плоском пограничном слое, толщина которого увеличивается со скоростью db/dx , отношение $\partial^2 u/\partial x^2$ к $\partial^2 u/\partial y^2$, которое при выводе уравнения (3.9) предполагалось малым, в действительности является величиной порядка $(db/dx)^2$.
- 3.2. Показать, что в приближении тонкого сдвигового слоя уравнение движения в направлении x в этом слое можно переписать следующим образом:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_\psi = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y},$$

где $P = p + \rho(u^2 + v^2)/2$ — полное давление, а $(\partial/\partial s)_\psi$ — градиент вдоль средней линии тока (дуги длиной s). Рассмотреть порядок величины отброшенных членов.

- 3.3. Рассмотреть плоское течение в плоскости (x, y) и, применяя уравнения баланса массы, количества движения и энергии в контрольном объеме размерами dx, dy , находящемся внутри пограничного слоя, где

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

вывести уравнения (3.5), (3.10b) и (3.11). Указать все использованные при выводе предположения.

- 3.4. Показать, что в ламинарном потоке при наличии теплообмена член, выражающий «работу сжатия», $u(dp/dx)$ в уравнении энтальпии (3.40) мал по сравнению с членом, выражающим плотность теплового потока, $(1/c_p)(\partial/\partial y)(k\partial T/\partial y)$, если температурный перепад поперек сдвигового слоя ΔT велик по сравнению с $\text{Pr} u_0^2/c_p$.
- 3.5. Поскольку основные уравнения для плоского и осесимметричного течений отличаются друг от друга только радиальной координатой $r(x, y)$, уравнения для осесимметричного течения (3.15)—(3.17) можно привести к форме уравнений для плоского течения с помощью так называемого преобразования Манглера. В случае обтекания осесимметричного тела радиусом r_0 (зависящим от x) можно показать, что если толщина пограничного слоя мала по сравнению с r_0 , так что $r(x, y) = r_0(x)$, то это преобразование позволяет привести указанные уравнения точно к форме уравнений для плоского течения. Преобразование Манглера, определенное соотношениями

$$d\bar{x} = \left(\frac{r_0}{L}\right)^{2K} dx, \quad d\bar{y} = \left(\frac{r}{L}\right)^K dy, \quad (\text{P3.1})$$

позволяет преобразовать осесимметричное течение в координатах (x, y) в плоское течение в координатах (\bar{x}, \bar{y}) . Величина L , входящая в соотношения (P3.1), — произвольный характерный линейный размер. Если функция тока в переменных Манглера (\bar{x}, \bar{y}) связана с функцией тока ψ в переменных (x, y) соотношением

$$\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{L}\right)^K \psi(x, y),$$

то

- а) показать, что преобразованные по Манглеру составляющие скорости u, v в координатах (x, y) связаны с составляющими скорости u, v в координатах

(x, y) следующими соотношениями:

$$u = \bar{u},$$

$$v = \left(\frac{L}{r}\right)^K \left[\left(\frac{r_0}{L}\right)^{2K} \bar{v} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \bar{u} \right], \quad (\text{P3.2})$$

б) подставляя соотношения (P3.2) в уравнения (3.15)—(3.17), показать, что для ламинарного течения преобразованные по Манглеру уравнения неразрывности и движения имеют вид

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0,$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\bar{x}} + \nu \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[(1+t)^{2K} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right], \quad (\text{P3.3})$$

$$\bar{u} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[(1+t)^{2K} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} \right], \quad (\text{P3.4})$$

где

$$t = -1 + \left(1 + \frac{2L \cos \phi}{r_0^2} \bar{y} \right)^{1/2}. \quad (\text{P3.5})$$

Укажем, что при $t = 0$ уравнения (P3.3) и (P3.4) в координатах (\bar{x}, \bar{y}) имеют точно такой же вид, что и соответствующие уравнения для плоского течения в координатах (x, y).

- 3.6. Повторяя рассуждения, использованные для вывода типичной величины $\rho'v'$, входящей в уравнение (3.37), показать, что типичная величина $\rho'u'$ в близком к адиабатному высокоскоростном сдвиговом слое равна

$$\rho(\gamma - 1) M^2 \frac{\bar{u}^2}{u},$$

где M — число Маха.

- 3.7. Показать, что в сопряженном турбулентном течении можно пренебречь в уравнении энтальпии (3.40) членом, учитывающим «работу сжатия», $u(dp/dx)$ по сравнению с членом «переноса тепла», скажем $c_p \partial(\rho T'v')/\partial u$ при условии

$$M_e^2 \ll \frac{1}{10} \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\Delta T}{T_e}.$$

Указание. Коэффициент 0,1 приближенно выражает величину θ/δ для турбулентного пограничного слоя.

- 3.8. Показать, что в пограничном слое толщиной δ на поверхности с радиусом продольной кривизны R при числе Маха внешнего потока M_e отношение изменения давления поперек слоя к абсолютному давлению на границе слоя составляет величину порядка $\gamma M_e^2 \delta/R$.
- 3.9. Показать, что в турбулентном пограничном слое отношение изменения давления, обусловленного нормальным напряжением Рейнольдса, к абсолютному давлению на границе слоя является величиной порядка $\gamma M_e^2 c_f/2$, где c_f — коэффициент поверхностного трения.

Указание. Предположить, что $\overline{\rho v'^2}$ является величиной того же порядка, что и касательное напряжение $-\rho u'v'$.

- 3.10. Показать, что если в замедляющемся турбулентном пограничном слое в расширяющемся канале (диффузоре) пренебречь членом поверхностного трения в интегральном уравнении количества движения (3.68), а величину H принять постоянной, то из уравнения (3.68) следует

$$\frac{\theta}{\theta_{0-}} = \left(\frac{u_e}{u_{e,0}} \right)^{-(H+2)},$$

где индекс 0 относится к начальным условиям.

- 3.11. Показать, что при безградиентном по давлению обтекании несжимаемой жидкостью поверхности, имеющей постоянную температуру, уравнение (3.78) сводится к следующему:

$$\frac{d\theta_T}{dx} = \text{St}. \quad (\text{P3.6})$$

- 3.12. Уравнение (3.10b) выражает закон сохранения количества движения для любой точки пограничного слоя, а уравнение (3.67) выражает закон сохранения количества движения для пограничного слоя в целом. Еще одним полезным соотношением является так называемое интегральное уравнение кинетической энергии, которое отражает тот физический факт, что скорость изменения плотности потока дефекта кинетической энергии в пограничном слое равна скорости диссипации кинетической энергии под действием вязкости. Он выражается соотношением

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \rho u_e^3 \delta^{**} \right) = \mu \int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy, \quad (\text{P3.7})$$

где δ^{**} — толщина потери кинетической энергии, которая определяет плотность потока дефекта кинетической энергии в пограничном слое по сравнению с невязким течением. В случае течения с постоянной плотностью она выражается формулой

$$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u^2}{u_e^2} \right) dy. \quad (\text{P3.8})$$

Предлагается вывести уравнение (P3.7), применяя следующую методику:

- Умножить уравнение (3.10b) на u и проинтегрировать полученное соотношение поперек пограничного слоя.
- Проинтегрировать по «частям» член, содержащий v .
- Показать, что справедливо равенство

$$\int_0^\infty u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = - \int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy.$$

- Применить результаты, полученные на этапах б и в, в соотношении, полученном на этапе а, и после умножения на -2 показать, что итоговое соотношение можно привести к виду уравнения (P3.7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Morkovin M. V., Effects of compressibility on turbulent flows, in the *Mechanics of Turbulence*, 367 Gordon and Breach, N. Y., 1961.
2. Morkovin M. V., Phinney R. E., Extended applications of hot-wire anemometry to high speed turbulent boundary layers, Dept. of Aeronautics, J. Hopkins Univ. Rept AFOSR TN-58-469, AD-158279, 1958.
3. Kistler A. L., Fluctuation measurements in a supersonic turbulent boundary layer, *Phys. Fluids*, **2**, 290 (1959).
4. Bradshaw P., Compressible turbulent shear layers, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **9**, 33 (1977).
5. Cebeci T., Bradshaw P., *Momentum Transfer in Boundary Layers*, Hemisphere, Washington, DC, 1977.
6. Hildebrand F. B., *Advanced Calculus for Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.
7. Cebeci T. (ed.), *Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows II*, Springer-Verlag, N. Y., 1984.

Несопряженные ламинарные пограничные слои

4

В этой и следующей главах теоретические концепции и уравнения, рассмотренные в предыдущих главах, применяются для простейшего случая ламинарного течения со столь малыми изменениями температуры или концентрации, что плотность, коэффициент вязкости и коэффициент теплопроводности, входящие в уравнения неразрывности, движения и энтальпии, можно принять постоянными, а в этом случае уравнения становятся несопряженными. Ниже, в гл. 6, 7 и 11, будут рассмотрены более сложные проблемы, в которых нужно учитывать турбулентность и переменную плотность, а в гл. 9 будет рассмотрено влияние выталкивающих сил на перенос количества движения и тепла. Даже для несопряженных течений необходимо определить «характерную» температуру, при которой рассчитываются теплофизические свойства жидкости. В слабо сопряженных течениях иногда бывает достаточно рассчитать теплофизические свойства при некоторой средней температуре жидкости, а затем использовать *несопряженные* уравнения. Для пограничного слоя очевидным значением является среднеарифметическая величина температуры стенки и температуры внешнего потока $T_m \equiv (T_w + T_e)/2$, которая называется *средней температурой слоя*; для течений в каналах, рассмотренных в гл. 5, применяется более сложное понятие *среднемассовой температуры*, определенной соотношением (5.4).

Хотя в общем турбулентные течения имеют более важное практическое значение, области турбулентного течения, разумеется, предшествует область ламинарного течения, заканчивающаяся зоной «перехода», как, например, на поверхности турбинной лопатки. Кроме того, существенные участки ламинарного течения обнаружены в самых мелких кровеносных сосудах человеческого тела, в небольших гидроустройствах и радиальных подшипниках. В ряде практически важных задач предпринимаются попытки удлинить область ламинарного пограничного слоя с целью снизить суммарное сопротивление или общие тепловые нагрузки. В противоположность этому в некоторых течениях с малыми числами Рейнольдса возникают нежелательные зоны ламинарного течения, вызывающие отрыв потока или снижение интенсивности теплообмена.

Хотя уравнения пограничного слоя, представленные в гл. 3, являются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, в ряде случаев путем преобразований их можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которые без особого труда решаются численными методами. Такой способ упрощения исходных уравнений, при котором используется подобие профилей скорости (и температуры) в преобразованных координатах, очень полезен для решения задач переноса количества движения и тепла (разд. 4.1). *Физические* особенности проблемы остаются такими же, как и для неавтомодельных случаев; поэтому автомодельные решения используются как простые, но не тривиальные примеры физических процессов. Кроме того, преобразование подобия помогает при отыскании численных решений даже для *неавтомодельных* течений.

В последующих разделах эта концепция автомодельности применяется при решении уравнений для внешнего обтекания тел, т. е. для сдвиговых слоев с практически бесконечным вязким потоком с одной стороны (или с обеих сторон) как для плоского, так и для осесимметричного течений. В разд. 4.2 рассматриваются автомодельные решения уравнений движения и энергии для плоских пограничных слоев, а в разд. 4.3 проводится обобщение на случай неавтомодельных течений. В разд. 4.4 рассматриваются осесимметричные течения.

Разд. 4.5 посвящен пристенным струям, т. е. струям, распространяющимся вдоль стенки (рис. 1.2, в), которые часто применяются в системах завесного охлаждения.

4.1. Анализ автомодельных течений

Рассмотрим плоское несопряженное ламинарное течение с пренебрежимо малыми поверхностными силами. Это течение описывается основными уравнениями (3.5), (3.10b) и (3.11)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.5)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.10b)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (3.11)$$

Используя уравнение Бернулли для внешнего потока, можно заменить $-(1/\rho)(dp/dx)$ в уравнении (3.10b) на $u_e du_e/dx$ и при заданных

значениях ν , Pr , $u_e(x)$, T_e и $T_w(x)$ записать решение этих уравнений в виде

$$\frac{u}{u_e} = \phi_1(x, y), \quad (4.1a)$$

$$\frac{T_w - T}{T_w - T_e} = \phi_2(x, y) \quad (4.1b)$$

при граничных условиях, определенных соотношениями (3.85b) и (3.88b), а именно

$$y = 0, \quad u = v = 0, \quad T = T_w, \quad (4.2a)$$

$$y = \delta, \quad u = u_e, \quad T = T_e. \quad (4.2b)$$

В отдельных случаях выражения (4.1) можно записать, применяя обозначение $\Delta T(x) = T_w - T_e$, в виде

$$\frac{u}{u_e} = \phi_1(\eta), \quad (4.3a)$$

$$\frac{T_w - T}{\Delta T} = \phi_2(\eta), \quad (4.3b)$$

где величина η , называемая *переменной подобия*, или *автомодельной переменной*, является функцией x и y . На практике, как будет показано ниже, η пропорциональна $y/\delta(x)$. В подобных случаях число независимых переменных уменьшается от двух (x и y) до одной (η), так что уравнения (3.5), (3.10b) и (3.11) становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями относительно u , v и T . Для струи, распространяющейся в неподвижном воздухе, u_e заменяется скоростью на оси струи u_c , а T_w — температурой на оси струи T_c и ΔT определяется как $T_c - T_e$. Для следа в равномерном потоке соотношения (4.3) принимают следующий вид:

$$\frac{u_c - u}{\Delta u} = \phi_1(\eta), \quad (4.4a)$$

$$\frac{T_c - T}{\Delta T} = \phi_2(\eta), \quad (4.4b)$$

где в данном случае характерный перепад скоростей $\Delta u = u_c - u_e$, а характерный перепад температур $\Delta T = T_c - T_e$.

Переменные подобия можно найти с помощью формального подхода, называемого групповым анализом дифференциальных уравнений, предложенным в работах [1, 2]. Его удобно применять к

одному уравнению, полученному после введения функции тока $\psi(x, y)$. Уравнение неразрывности (3.5) тождественно удовлетворяется, если ввести функцию тока, которая определяется соотношением

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.5)$$

Подставляя значения u и v , определенные этими соотношениями, в уравнение (3.10b) и пренебрегая, как и ранее, поверхностной силой f_x , получаем уравнение, содержащее лишь одну искомую функцию,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \quad (4.6)$$

Идея группового анализа состоит в использовании «линейного преобразования», определенного соотношением

$$x = A^{\alpha_1} \bar{x}, \quad y = A^{\alpha_2} \bar{y}, \quad \psi = A^{\alpha_3} \bar{\psi}, \quad u_e = A^{\alpha_4} \bar{u}_e. \quad (4.7)$$

Здесь α_k ($k = 1, \dots, 4$) — постоянные, а A называется *параметром преобразования*. После применения этого преобразования уравнение (4.6) принимает вид

$$A^{2\alpha_3 - \alpha_1 - 2\alpha_2} \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} \right) = A^{2\alpha_4 - \alpha_1} \bar{u}_e \frac{d\bar{u}_e}{d\bar{x}} + \nu A^{\alpha_3 - 3\alpha_2} \frac{\partial^3 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^3}. \quad (4.8)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (4.6), можно видеть, что эти два уравнения будут инвариантными (не изменяющимися при преобразовании), если степени A в каждом члене будут одинаковыми. Если это так, то из уравнения (4.8) следует

$$2\alpha_3 - \alpha_1 - 2\alpha_2 = 2\alpha_4 - \alpha_1 = \alpha_3 - 3\alpha_2. \quad (4.9)$$

Уравнение (4.9) имеет следующее частное решение:

$$\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \alpha_4 = 2\alpha_3 - \alpha_1. \quad (4.10)$$

Введем новую переменную $\alpha = \alpha_2/\alpha_1$ и перепишем соотношения (4.10) в виде

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 1 - \alpha, \quad \frac{\alpha_4}{\alpha_1} = 2\frac{\alpha_3}{\alpha_1} - 1 = 1 - 2\alpha. \quad (4.11)$$

Зная соотношения между α_k , можно найти соотношения между параметрами с черточкой и без черточки. Это можно сделать, исключая параметр преобразования A . Например, используя соотноше-

ния (4.7), можно записать

$$A = \left(\frac{x}{\bar{x}}\right)^{1/\alpha_1} = \left(\frac{y}{\bar{y}}\right)^{1/\alpha_2} = \left(\frac{\psi}{\bar{\psi}}\right)^{1/\alpha_3} = \left(\frac{u_e}{\bar{u}_e}\right)^{1/\alpha_4},$$

или

$$\frac{y}{x^\alpha} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}^\alpha}, \quad \frac{\psi}{x^{1-\alpha}} = \frac{\bar{\psi}}{\bar{x}^{1-\alpha}}, \quad \frac{u_e}{x^{1-2\alpha}} = \frac{\bar{u}_e}{\bar{x}^{1-2\alpha}}. \quad (4.12)$$

Как нетрудно видеть, комбинации переменных, определенные соотношениями (4.12), инвариантны относительно линейных преобразований (4.7); они называются *абсолютными переменными*. Согласно теореме Моргана [1], они являются переменными подобия при условии, что *граничные условия* для поля скоростей (4.2) можно также преобразовать и выразить соотношениями, не зависящими от x . Теперь примем

$$\eta = \frac{y}{x^\alpha}, \quad f(\eta) = \frac{\psi}{x^{1-\alpha}}, \quad (4.13)$$

$$h(\eta) = \frac{u_e}{x^{1-2\alpha}} = \text{const} = C, \quad (4.14)$$

где функция $h(\eta)$ является постоянной, поскольку скорость основного потока u_e зависит только от x и поэтому не может зависеть от η , так как в этом случае она зависела бы и от y .

В некоторых случаях удобнее записать второе из соотношений (4.13) в виде

$$\psi = x^{1-\alpha} f(\eta) \frac{x^\alpha}{x^\alpha} = x^{1-2\alpha} x^\alpha f(\eta),$$

или, применяя выражение (4.14), в виде

$$\psi = \frac{u_e}{C} x^\alpha f(\eta). \quad (4.15)$$

Используя первое из соотношений (4.5) и автомодельные переменные, определенные первым из соотношений (4.13) и соотношением (4.15), можно записать

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{u_e}{C} \frac{\partial f}{\partial \eta},$$

или, обозначая штрихом дифференцирование по η ,

$$\frac{u}{u_e} = \frac{f'(\eta)}{C}. \quad (4.16)$$

Теперь можно без труда преобразовать уравнение (4.6) и его граничные условия. В соответствии с обычными обозначениями, полагаем $m = 1 - 2\alpha$, так что

$$u_e = Cx^m; \quad (4.17)$$

$$\eta = \frac{y}{x^{(1-m)/2}} = \frac{y}{x^{1/2}} x^{m/2} = \left(\frac{u_e}{Cx}\right)^{1/2} y, \quad (4.18a)$$

$$\psi = \frac{u_e x^{(1-m)/2}}{C} f(\eta) = x^{(m+1)/2} f(\eta) = \left(\frac{u_e x}{C}\right)^{1/2} f(\eta). \quad (4.18b)$$

Величина ψ должна иметь размерность (скорость \times длина), а величина η [и $f(\eta)$] должна быть безразмерной. До сих пор мы пренебрегали параметром ν , несомненно входящим в основные уравнения, и если теперь ввести ν в соотношения (4.18), можно универсально скорректировать размерности, получая в итоге

$$\psi = (u_e \nu x)^{1/2} f(\eta), \quad (4.19a)$$

$$\eta = \left(\frac{u_e}{\nu x}\right)^{1/2} y. \quad (4.19b)$$

Это преобразование, называемое *преобразованием Фолкнера — Скэн*, будет широко использоваться при анализе течения в пограничном слое при внешнем обтекании тел. Из соотношения (4.19b) следует, что толщина «автомодельного» ламинарного пограничного слоя, соответствующая данному значению η , пропорциональна $\sqrt{\nu x/u_e}$, как это уже было показано в разд. 3.1. Выражение (4.19a) свидетельствует, что величина ψ пропорциональна $u_e \sqrt{\nu x/u_e}$, т. е. произведению скорости внешнего потока на толщину сдвигового слоя. Эта физическая интерпретация нормализации Фолкнера — Скэн применима для течений в каналах (гл. 5) и в свободных сдвиговых слоях (гл. 8), хотя соответствующие математические выражения могут несколько отличаться.

Применяя преобразование Фолкнера — Скэн, определенное соотношениями (4.19b), можно свести уравнения пограничного слоя (3.5), (3.10b) и (3.11) к обыкновенным дифференциальным уравнениям для автомодельных течений (см. задачу 4.1). Кроме того, его можно использовать для неавтомодельных течений с целью упрощения вычислительной работы, так как оно, как будет показано ниже, позволяет ослабить или даже вообще устранить зависимость решения от x . Для плоских несопряженных течений решение в неавтомодельном случае находится в предположении, что безразмерная

функция тока f зависит и от x

$$\psi = (u_e \nu x)^{1/2} f(x, \eta). \quad (4.19c)$$

Затем, используя правило дифференцирования сложной функции, чтобы связать параметры в плоскости (x, y) с параметрами в плоскости (x, η) , а именно

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_\eta + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)_x \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (4.20a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)_x \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (4.20b)$$

и определение функции тока (4.5) совместно с преобразованиями (4.19b) и (4.19c), получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_y &= f \frac{d}{dx} (u_e \nu x)^{1/2} + (u_e \nu x)^{1/2} \frac{\partial f}{\partial x} + (u_e \nu x)^{1/2} f' \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_x &= (u_e \nu x)^{1/2} f' \left(\frac{u_e}{\nu x}\right)^{1/2} = u_e f', \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u_e f'' \left(\frac{u_e}{\nu x}\right)^{1/2}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_y &= \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_\eta + T' \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_x = T' \left(\frac{u_e}{\nu x}\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по η . Выполнив эти действия и заменив в уравнении (3.10b) член $-(1/\rho)(dp/dx)$ на $u_e(du_e/dx)$, можно записать преобразованные уравнения движения и энергии для плоского несопряженного ламинарного течения следующим образом:

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m[1 - (f')^2] = x \left(f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (4.21)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} T'' + \frac{m+1}{2} f T' = x \left(f' \frac{\partial T}{\partial x} - T' \frac{\partial f}{\partial x} \right). \quad (4.22)$$

Здесь m , показатель степени в соотношении (4.17), является безразмерным параметром градиента давления, определяемым выражением

$$m = \frac{x}{u_e} \frac{du_e}{dx}. \quad (4.23)$$

Подобно тому как в безразмерном виде выражается u (например, $u/u_e = f'$), необходимо выразить в безразмерном виде и T .

Для течений с заданной температурой стенки удобно использовать относительную избыточную температуру

$$g = \frac{T_w - T}{T_w - T_e}, \quad (4.24)$$

которая, как и u/u_e , равна нулю на стенке и единице во внешнем потоке. Когда задана плотность теплового потока в стенку, такое определение неприемлемо, поскольку температура стенки T_w неизвестна. Поэтому вводится определение

$$T = T_e + T_e(1 - g)\phi(x), \quad (4.25)$$

где $g = g(x, \eta)$, а ϕ — функция, которую нужно найти.

При заданной температуре стенки выбирается

$$\phi(x) = \frac{T_w - T_e}{T_e} \quad (4.26a)$$

и тогда g вновь определяется выражением (4.24).

Если же задана плотность теплового потока в стенку

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = -\frac{\dot{q}_w(x)}{k} \text{ при } y = 0,$$

можно записать

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_w = -\frac{\dot{q}_w(x)}{k} \sqrt{\frac{\nu x}{u_e}}.$$

Дифференцируя соотношение (4.25) по η и приравнявая полученный результат приведенному выше соотношению (для простоты принимается $g'_w = 1$), можно получить следующее определение $\phi(x)$:

$$\phi(x) = \frac{\dot{q}_w(x)x}{k\sqrt{R_x}T_e}, \quad (4.26b)$$

где R_x — число Рейнольдса

$$R_x = \frac{u_e x}{\nu}. \quad (4.27)$$

Подставляя выражение (4.25) в уравнение (4.22), получаем безразмерное преобразованное уравнение энергии в виде

$$\frac{1}{Pr} g'' + \frac{m+1}{2} f g' + n(1-g)f' = x \left(f' \frac{\partial g}{\partial x} - g' \frac{\partial f}{\partial x} \right). \quad (4.28)$$

Здесь n , как и m , — безразмерный параметр. При заданной температуре стенки он определяется формулой

$$n = \frac{x}{(T_w - T_e)} \frac{d}{dx} (T_w - T_e), \quad (4.29a)$$

а при заданной плотности теплового потока в стенку — формулой

$$n = \frac{x}{\phi} \frac{d\phi}{dx}. \quad (4.29b)$$

Применяя переменные подобия и безразмерные параметры, из соотношений (4.2) можно найти граничные условия для уравнений движения и энергии. В случае заданной температуры стенки (с учетом теплообмена на поверхности) они записываются следующим образом:

$$\eta = 0, \quad f' = 0, \quad f = -\frac{1}{(u_e \nu x)^{1/2}} \int_0^x v_w dx, \quad g = 0, \quad (4.30a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad f' = 1, \quad g = 1. \quad (4.30b)$$

Из приведенных соотношений следует, что безразмерная температура, как и безразмерная продольная составляющая скорости u/u_e , равна нулю на стенке и единице на границе пограничного слоя. В случае заданной плотности теплового потока в стенку граничное условие для g в соотношениях (4.30a) заменяется условием

$$\eta = 0, \quad g' = 1. \quad (4.30c)$$

Довольно сложное выражение для безразмерной функции тока на стенке f_w в соотношениях (4.30a) отражает тот факт, что в условиях массообмена на поверхности стенка не является линией тока, поскольку нормальная составляющая скорости равна v_w . Для течений с отсосом величина f_w положительна, а для течений с вдувом величина f_w отрицательна; на непроницаемой твердой стенке она равна нулю.

Входящий в соотношения (4.30b) параметр η_e представляет собой (преобразованное) расстояние от стенки до точки, в которой скорость u становится равной u_e с достаточной для численных расчетов точностью, скажем $u = 0,9999u_e$; для ламинарного пограничного слоя обычно $\eta_e \leq 8$, так что величину $\eta_e = 8$ можно выбрать в качестве внешней границы области численного расчета. Она аналогична внешнему предельному значению h , рассмотренному в разд. 3.4. Отметим, что η_e несколько больше величины η , соответствующей точке $y = \delta$, в которой $u/u_e = 0,995$ согласно опреде-

лению δ , принятому в данной книге. В физических координатах толщины динамического и теплового пограничных слоев, $\delta(x)$ и $\delta_t(x)$ соответственно, обычно возрастают с увеличением продольной координаты как для ламинарного, так и для турбулентного режимов течения в пограничном слое. В преобразованных координатах величина η_e приблизительно постоянна для большинства ламинарных течений (важное преимущество с вычислительной точки зрения). При $Pr < 1$ или $Pr > 1$ преобразованная толщина теплового пограничного слоя δ_t соответственно больше или меньше преобразованной толщины динамического пограничного слоя δ , но отношение δ_t/δ , разумеется, остается постоянным по всей длине области *автомодельного течения*.

4.2. Плоские автомодельные течения

Для плоских несопряженных автомодельных ламинарных течений безразмерная функция тока f и безразмерная температура g зависят только от η . Поэтому в уравнениях (4.21) и (4.28) производные f, f' и g по x выпадают, и уравнения сводятся к следующим:

$$f''' + \frac{m+1}{2} ff'' + m[1 - (f')^2] = 0, \quad (4.31)$$

$$\frac{g''}{Pr} + \frac{m+1}{2} fg' + n(1-g)f' = 0. \quad (4.32)$$

Решения уравнений (4.31) и (4.32) не зависят от x , если граничные условия (4.30), а также параметры градиента давления m и градиента температуры n не зависят от x . Эти требования удовлетворяются, если f_w, m и n постоянны.

Если величина f_w постоянна, из соотношений (4.30) получаются следующие граничные условия для уравнений (4.31) и (4.32):

$$\eta = 0, \quad f = \text{const}, \quad f' = 0, \quad g = 0 \text{ или } g' = 1, \quad (4.33a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad f' = 1, \quad g = 1. \quad (4.33b)$$

При заданной температуре стенки требованию $m = \text{const}$ удовлетворяет соотношение (4.17), требованию $n = \text{const}$ — соотношение

$$T_w - T_e = C_1 x^n, \quad (4.34a)$$

а при заданной плотности теплового потока в стенку — соотношение

$$\phi = \frac{\dot{q}_w(x)x}{k\sqrt{R_x}T_e} = C_2 x^n, \quad (4.34b)$$

где C_1 и C_2 — постоянные. Следовательно, как отмечалось в разд. 4.1, автомодельные течения в пограничном слое, соответствующие автомодельным решениям уравнений движения и энергии, возможны при условии, что скорость внешнего потока изменяется в зависимости от координаты x вдоль поверхности по степенному закону (4.17), изменение температуры стенки или плотности теплового потока описывается соотношениями (4.34), а граничные условия не зависят от x . Отметим, что если удовлетворяется соотношение (4.17) и выполняются граничные условия (4.33), но не (4.34а) или (4.34б), то, хотя уравнение движения (4.21) будет иметь автомодельные решения, уравнение энергии (4.28) таких решений иметь не будет.

Решения для поля скоростей

Решения уравнения Фолкнера — Скэн (4.31) иногда называют решениями для *обтекания клина*. Течение отклоняется на угол $\beta\pi/2$ (рис. 4.1), где $\beta = 2m/(m+1)$ и может иметь любой знак; отрицательные значения в принципе могут достигаться при обтекании кормовой части тела. Решение уравнения Фолкнера — Скэн для присоединенных пограничных слоев ограничено значениями m в диапазоне $-0,0904 \leq m \leq \infty$. Установлено, что при $m = -0,0904$ производная f_w'' равна нулю (т. е. напряжение поверхностного трения τ_w равно нулю) и при всех x достигается точка отрыва пограничного слоя¹⁾.

Преобразование Фолкнера — Скэн используется в основном для облегчения численного расчета неавтомодельных пограничных слоев, и на практике обычно встречаются лишь два случая обтекания

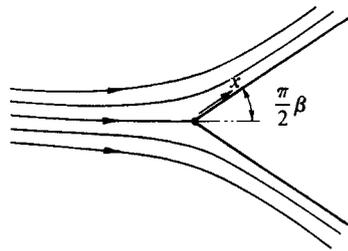


Рис. 4.1. Обтекание клина. В окрестности вершины клина распределение скорости внешнего течения описывается соотношением $u_e(x) = Cx^{\beta(2-\beta)}$.

¹⁾ Строго говоря, при «отрыве» пограничный слой отходит от поверхности (приближение $d\delta/dx \ll 1$ становится несправедливым). На практике это эквивалентно изменению знака напряжения поверхностного трения и направления течения вблизи стенки, т. е. возникновению возвратного течения.

клина. Обтекание плоской пластины под нулевым углом атаки при постоянной скорости набегающего потока u_e называется *течением Блазиуса* и соответствует $m = 0$. Случай $m = 1$ (обтекание клина с полууглом 90°) соответствует плоскому течению в окрестности критической линии, называемому *течением Хименца*.

Однако полезны решения и при других значениях m , поскольку они позволяют выявить основные особенности влияния градиента давления на характеристики пограничного слоя. В частности, можно показать, как изменяется форма профиля скорости, величина коэффициента поверхностного трения c_f , толщина вытеснения δ^* и толщина потери импульса θ . Применяя преобразованные переменные, можно переписать определения c_f , δ^* и θ (3.59) следующим образом:

$$c_f = \frac{2f_w''}{\sqrt{R_x}}, \quad (4.35)$$

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1}{\sqrt{R_x}} \int_0^{\eta_e} (1 - f') d\eta = \frac{\eta_e - f_e + f_w}{\sqrt{R_x}} \equiv \frac{\delta_1^*}{\sqrt{R_x}}, \quad (4.36)$$

$$\frac{\theta}{x} = \frac{1}{\sqrt{R_x}} \int_0^{\eta_e} f'(1 - f') d\eta \equiv \frac{\theta_1}{\sqrt{R_x}}. \quad (4.37)$$

В табл. 4.1 приведены значения этих характеристик и формпараметра $H = \delta^*/\theta$ при различных значениях m , а на рис. 4.2 представлены профили скорости, построенные в преобразованных переменных.

Используя приведенные выше соотношения и представленные в табл. 4.1 значения при рассмотрении течения с нулевым градиентом давления, получаем

$$c_f = \frac{0,664}{\sqrt{R_x}}, \quad \frac{\delta^*}{x} = \frac{1,72}{\sqrt{R_x}}, \quad \frac{\theta}{x} = \frac{0,664}{\sqrt{R_x}}.$$

Таблица 4.1. Решения уравнения Фолкнера — Скэн при отсутствии массообмена

m	f_w''	δ_1^*	θ_1	H
1	1,23259	0,64791	0,29234	2,216
$\frac{1}{3}$	0,75745	0,98536	0,42900	2,297
0	0,33206	1,72074	0,66412	2,591
-0,05	0,21351	2,1174	0,75148	2,818
-0,0904	0,0	3,427	0,86880	3,949

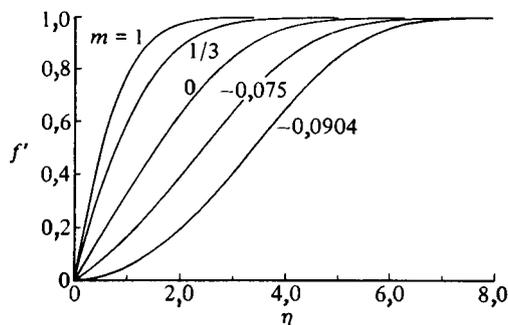


Рис. 4.2. Безразмерная скорость f' в зависимости от η при различных значениях m .

На практике и в учебниках применяются различные произвольные определения толщины пограничного слоя δ . Здесь мы будем определять эту величину как расстояние от стенки до точки, в которой $f' = 0,995$. Согласно данным, представленным на рис. 4.2, $\delta/x = 5,3/\sqrt{R_x}$ при $m = 0$.

В табл. 4.2 приведены некоторые характеристики решений уравнения Блазиуса (уравнение (4.31) при $m = 0$) в условиях вдува или отсоса на стенке, которые имеют важное значение для задач массообмена, когда загрязняющее вещество вдувается или абсорбируется на поверхности. На рис. 4.3 показаны соответствующие профили скорости при различных значениях параметра массообмена $f_w = -2v_w/u_e\sqrt{R_x}$. В этом случае автомодельность достигается

Таблица 4.2. Решения уравнения Блазиуса при наличии отсоса (положительные значения f_w) или вдува (отрицательные значения f_w) на стенке

$f_w = -2\frac{v_w}{u_e}\sqrt{R_x}$	f_w''	δ_1^*	θ_1	H
2,0	1,16812	0,73561	0,33624	2,188
1,50	0,94449	0,86761	0,38898	2,230
1,0	0,72828	1,04911	0,45646	2,30
0,5	0,52254	1,31187	0,54508	2,407
0	0,33206	1,72074	0,66412	2,591
-0,250	0,24492	2,03821	0,73984	2,755
-0,500	0,16507	2,46571	0,83014	2,970
-0,750	0,09433	3,1243	0,93866	3,328
-1,000	0,03618	4,36353	1,07236	4,069
-1,238	0,00017	12,8814	1,23834	10,402

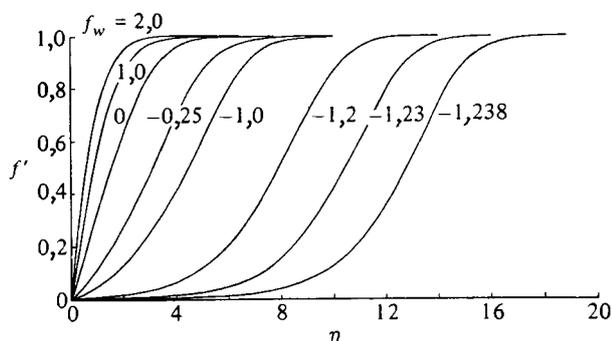


Рис. 4.3. Профили безразмерной скорости f' в пограничном слое на плоской пластине при наличии массообмена.

лишь при изменении скорости массообмена на стенке v_w по закону $1/\sqrt{x}$. Влияние параметра массообмена приблизительно аналогично влиянию параметра градиента давления: при возрастании скорости вдува, как и при увеличении положительного («противодействующего») градиента давления, наклон профиля скорости вблизи стенки уменьшается и при $f_w = -1,238$ становится равным нулю; при возрастании скорости отсоса, как и при увеличении отрицательного («благоприятного») градиента давления, наклон профиля скорости возрастает. Причина этой (приближенной) аналогии состоит в том, что при вдуве, например, в пограничный слой подводится новая жидкость с нулевой составляющей количества движения в направлении x , в то время как положительный градиент давления вызывает непосредственное уменьшение x -составляющей количества движения жидкости самого пограничного слоя.

Решения для поля температур

Уравнение Фолкнера — Скэн является нелинейным дифференциальным уравнением, и при его решении требуется проявлять особую осторожность, поскольку граничные условия ставятся на двух границах ($\eta = 0$ и $\eta = \eta_e$). Однако уравнение энергии (4.32) в автономной форме при указанных граничных условиях решается довольно просто, если найдено решение $f(\eta)$ уравнения Фолкнера — Скэн. Это обусловлено тем, что уравнение (4.32) является *линейным* относительно g (с переменными коэффициентами). Линейность означает, что если $\hat{g}(\eta)$ является решением уравнения (4.32), то решением является и произведение \hat{g} на любую постоянную, скажем

$\lambda \hat{g}$. Следовательно, если известно решение $\hat{g}(\eta)$, удовлетворяющее, скажем, граничным условиям

$$\hat{g}(0) = 0, \quad \hat{g}'(0) = 1, \quad (4.38)$$

то, выбирая постоянную $\lambda = 1/\hat{g}(\eta_e)$, можно получить решение, удовлетворяющее граничным условиям для уравнения энергии (4.33). Чтобы выполнить это численно, применим какой-либо стандартный метод, скажем метод Рунге — Кутта, который в действительности позволяет решить уравнение второго порядка (4.32), разделяя его на два уравнения первого порядка введением вспомогательной переменной p

$$\hat{g}' = p, \quad (4.39a)$$

$$p' = -\text{Pr} \frac{m+1}{2} fp - \text{Pr} n f'(1 - \hat{g}) \quad (4.39b)$$

с *односторонними* граничными условиями (начальными значениями) при $\eta = 0$

$$\hat{g}(0) = 0, \quad p(0) \equiv \hat{g}'(0) = 1. \quad (4.39c)$$

Затем решение уравнения (4.32), удовлетворяющее граничным условиям $g = 0$ при $\eta = 0$ и $g = 1$ при $\eta = \eta_e$, определяется соотношениями

$$g(\eta) = \frac{\hat{g}(\eta)}{\hat{g}(\eta_e)}, \quad (4.40a)$$

$$g'(\eta) = \frac{p(\eta)}{\hat{g}(\eta_e)}. \quad (4.40b)$$

Если температура стенки постоянна ($n = 0$), то решение уравнения энергии

$$g'' + \text{Pr} \frac{m+1}{2} fg' = 0 \quad (4.41)$$

можно свести к квадратуре, а именно к взвешенному интегралу $f(\eta)$. Уравнение (4.41) можно записать просто в виде

$$\frac{g''}{g'} \equiv (\ln g')' = -\frac{\text{Pr}}{2}(m+1)f. \quad (4.42)$$

Интегрируя это уравнение первый раз, получаем

$$g' = C \exp \left[\int_0^\eta -\frac{\text{Pr}}{2}(m+1)f(\eta) d\eta \right], \quad (4.43)$$

где C — постоянная интегрирования. Проводя интегрирование второй раз и замечая, что $g(0) = 0$, можно записать решение уравнения (4.41) в виде

$$g(\eta) = g(0) + C \int_0^\eta \exp \left[\int_0^\zeta - \text{Pr} \frac{m+1}{2} f(z) dz \right] d\zeta, \quad (4.44)$$

где z и ζ — переменные интегрирования. Величину C находим с помощью условия на границе пограничного слоя $g(\eta_e) = 1$. В итоге решение (4.44) сводится к следующему:

$$g = \frac{\int_0^\eta \exp \left[- \text{Pr} \frac{m+1}{2} \int_0^\zeta f(z) dz \right] d\zeta}{\int_0^{\eta_e} \exp \left[- \text{Pr} \frac{m+1}{2} \int_0^\zeta f(z) dz \right] d\zeta}. \quad (4.45)$$

Из соотношения (4.45) следует, что для расчета профиля температуры необходимо знать зависимость функции тока f от η при заданном значении m . Кроме того, согласно соотношению (4.45), число Прандтля Pr оказывает существенное влияние на поведение решения. Эти выводы справедливы и при переменной температуре стенки.

В случае пограничного слоя на плоской пластине $m = 0$ и решение (4.45) еще больше упрощается. Отмечая, что в результате первого интегрирования уравнения (4.31) при $m = 0$ получается равенство

$$-\frac{1}{2} \int f d\eta = \ln f'',$$

можно переписать решение (4.45) следующим образом:

$$g = \frac{\int_0^\eta (f'')^{\text{Pr}} d\eta}{\int_0^{\eta_e} (f'')^{\text{Pr}} d\eta}. \quad (4.46)$$

При $\text{Pr} = 1$ решение (4.46) сводится к соотношению (1.10), а именно

$$g = \frac{f' - f'(0)}{f'(\eta_e) - f'(0)} = f' = \frac{u}{u_e}. \quad (4.47)$$

Решения при очень малых или очень больших числах Прандтля

Интересно и не очень трудно исследовать решения уравнения энергии (4.41) при различных значениях m для жидкостей с очень малыми или очень большими числами Прандтля, когда решение (4.45) существенно упрощается. Рассмотрим вначале случай $Pr \ll 1$, соответствующий жидким металлам, имеющим высокий коэффициент теплопроводности, но низкий коэффициент вязкости, так что толщина динамического пограничного слоя очень мала по сравнению с толщиной теплового пограничного слоя. Можно в качестве достаточно точного приближения принять величину f' равной единице поперек всего теплового пограничного слоя, поскольку ошибка будет значительна лишь в пределах очень тонкого динамического пограничного слоя. Используя это приближение, соотношение (4.45) можно переписать в виде

$$g = \frac{\int_0^\eta e^{-(Pr/4)(m+1)\eta^2} d\eta}{\int_0^\eta e^{-(Pr/4)(m+1)\eta^2} d\eta}. \quad (4.48)$$

Применяя определение функции ошибок

$$\operatorname{erf}(u) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-\xi^2} d\xi,$$

можно записать выражение (4.48) следующим образом:

$$g = \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{(m+1)Pr}}{2} \eta\right). \quad (4.49)$$

Теперь, используя известные свойства функции ошибок, получаем

$$g'_w = \sqrt{\frac{(m+1)Pr}{\pi}} = 0,564\sqrt{(m+1)Pr}. \quad (4.50)$$

Следовательно, на основании соотношения (4.50) и определения местного числа Нуссельта

$$\operatorname{Nu}_x = -\frac{x}{T_w - T_e} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w, \quad (4.51a)$$

которое с использованием преобразованных переменных можно записать в виде

$$\operatorname{Nu}_x = g'_w \sqrt{R_x}, \quad (4.51b)$$

а также определения числа Стантона

$$St = \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p (T_w - T_e) u_e} = \frac{-k(\partial T / \partial y)_w}{\rho c_p (T_w - T_e) u_e} = \frac{Nu_x}{Pr R_x} \quad (4.51c)$$

находим

$$Nu_x = 0,564 \sqrt{(m+1)} Pr^{1/2} R_x^{1/2}, \quad (4.52a)$$

$$St = 0,564 \sqrt{(m+1)} Pr^{-1/2} R_x^{-1/2}. \quad (4.52b)$$

Поскольку c_f также изменяется по закону $R_x^{-1/2}$, приходим к выводу, что коэффициент аналогии Рейнольдса $St/(c_f/2)$ не зависит от x (табл. 4.3).

При $Pr \gg 1$ (тяжелые, вязкие масла) динамический пограничный слой намного толще теплового пограничного слоя. Подходящим приближением в этом случае является предположение о линейности профиля скорости в пределах теплового пограничного слоя, причем наклон профиля равен производной на стенке f_w'' . Итак, предполагая, что

$$f' = f_w'' \eta,$$

так что

$$f = \frac{f_w'' \eta^2}{2},$$

можно проинтегрировать соотношение (4.45) и найти g_w' . В резуль-

Таблица 4.3. Автономные решения уравнения энергии при обтекании равномерно нагреваемой поверхности

m	$g_w' = \frac{Nu_x}{\sqrt{R_x}}$				$\frac{St}{\frac{1}{2}c_f}$ при $Pr = 1$
	0,1	0,72	1	10	
1	0,2191	0,5017	0,5708	1,3433	0,463
$\frac{1}{3}$	0,1723	0,3884	0,4402	1,0135	0,581
0,1	0,1497	0,3315	0,3741	0,8414	0,753
0	0,1389	0,2957	0,3321	0,7289	1,000
-0,01	0,1373	0,2911	0,3267	0,7141	1,045
-0,05	0,1294	0,2680	0,2995	0,6386	1,40
-0,0904	0,1085	0,2031	0,2224	0,4071	∞

тате (см. задачу 4.11)

$$\text{Nu}_x = 1,12 \left(\frac{m+1}{12} f_w'' \right)^{1/3} \text{Pr}^{1/3} R_x^{1/2}. \quad (4.53)$$

Следовательно, теперь число Стантона изменяется по закону $\text{Pr}^{-2/3} R_x^{-1/2}$, а коэффициент аналогии Рейнольдса $\text{St}/(c_f/2)$ — по закону $\text{Pr}^{-2/3}$. Отметим, что, поскольку для обтекания плоской пластины $f_w'' = 0,332$, соотношение (4.53) принимает вид

$$\text{Nu}_x = 0,339 \text{Pr}^{1/3} R_x^{1/2}. \quad (4.54a)$$

Аналогичным образом для течения в окрестности критической линии, где $f_w'' = 1,23259$ (табл. 4.1), соотношение (4.53) сводится к следующему:

$$\text{Nu}_x = 0,661 \text{Pr}^{1/3} R_x^{1/2}. \quad (4.54b)$$

Примеры численных решений

Уравнение энергии в автомодельной форме (4.32) можно решить численно при различных значениях m , n и Pr . Ниже представлены результаты для равномерно нагретой поверхности ($n = 0$) при различных значениях m и Pr . В табл. 4.3 приведены значения безразмерного параметра теплообмена g_w' при различных значениях m и Pr , а на рис. 4.4 и 4.5 показаны соответствующие профили температуры. Приведенные на рис. 4.4 профили для жидкости с $\text{Pr} = 1$ показывают, что градиент давления оказывает некоторое влияние на профиль температуры, но оно существенно слабее оказываемого

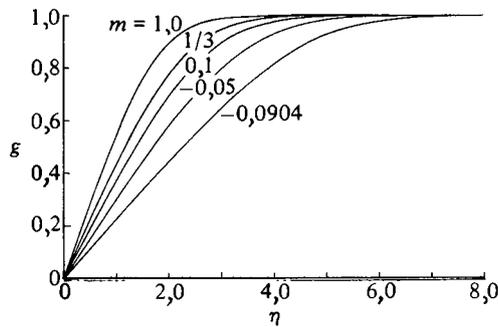


Рис. 4.4. Влияние градиента давления на профиль температуры при $\text{Pr} = 1$.

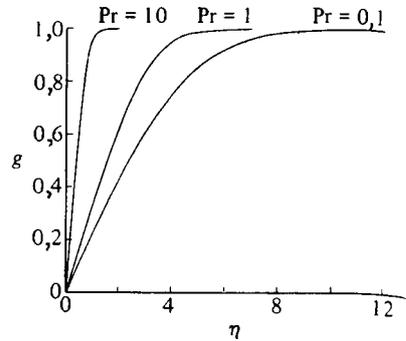


Рис. 4.5. Влияние числа Прандтля на профиль температуры для течения с нулевым градиентом давления ($m = 0$). Профиль скорости совпадает с профилем $g(\eta)$ при $Pr = 1$.

им влияния на профиль скорости (рис. 4.2). Разумеется, этот эффект обусловлен изменением профиля скорости, поскольку сам градиент давления не входит непосредственно в уравнение энергии для течения с постоянными свойствами (3.11). На рис. 4.5 представлены профили температуры при обтекании плоской пластины жидкостями с различными числами Прандтля. Число Прандтля существенно влияет на толщину теплового пограничного слоя, но оказывает довольно слабое влияние на форму профиля.

На рис. 4.6 представлены зависимости параметра $Nu_x/\sqrt{R_x} (\equiv g'_w)$ от числа Прандтля при $m = 1$ и 0 . Приведенные на рис. 4.6 резуль-

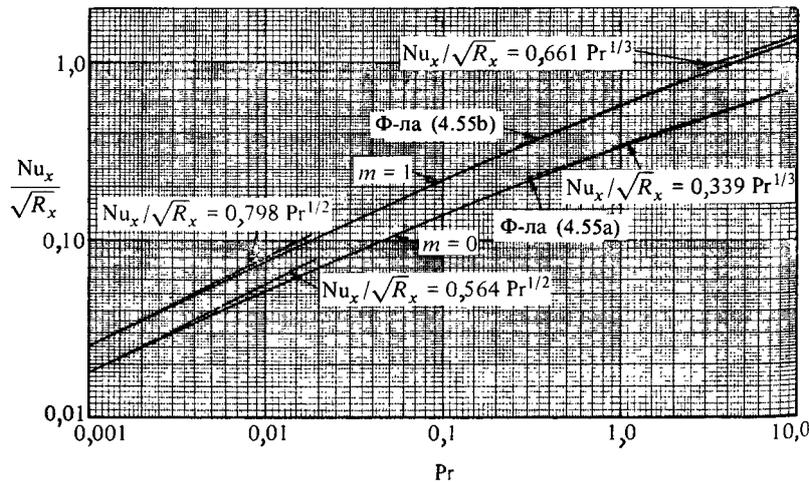


Рис. 4.6. Отношение $Nu_x/\sqrt{R_x}$ в зависимости от числа Прандтля при двух значениях m .

Сплошными линиями показаны численные решения уравнения энергии (4.32) при $n = 0$.

таты численного расчета показывают, что при $Pr \geq 0,01$ хорошее приближение обеспечивает аналитическое решение для малых чисел Прандтля (4.52), а при $Pr \geq 1$ ($m = 0$) и $Pr > 2$ ($m = 1$) достаточно точным приближением является решение для больших чисел Прандтля (4.54). Объясняется это тем, что приближенное решение для малых чисел Прандтля получено при условии $\delta_i \gg \delta$, в то время как приближенное решение для больших чисел Прандтля получено просто при условии $du/dy = \text{const}$, которое (рис. 4.2) является хорошим приближением в случае $m = 0$, если δ_i меньше примерно $0,7\delta$. Кроме того, согласно результатам, представленным на рис. 4.6, если число Прандтля близко к единице, то зависимость параметра $Nu_x/\sqrt{R_x}$ от числа Прандтля при $m = 0$ можно приближенно выразить соотношением

$$Nu_x = 0,332Pr^{0,33}R_x^{1/2}, \quad (4.55a)$$

а при $m = 1$ — соотношением

$$Nu_x = 0,57Pr^{0,40}R_x^{1/2}. \quad (4.55b)$$

В этих соотношениях показатель степени 0,5 при числе Рейнольдса является теоретическим, а числовые значения коэффициентов — эмпирическими, поскольку они подобраны с целью обеспечить наиболее точное соответствие численным решениям. В частности, показатель степени 0,33 при числе Прандтля в соотношении (4.55a) не является асимптотически точным результатом, каким служит показатель множителя $Pr^{1/3}$ в формуле (4.54). Отметим, что в последней строке табл. 4.3 приведены характеристики «отрывного» профиля (табл. 4.1), для которого напряжение поверхностного трения равно нулю, но тепловой поток не обращается в нуль. Следовательно, аналогия Рейнольдса между процессами переноса тепла и количества движения применима в лучшем случае, лишь когда влияние градиента давления не слишком велико, поскольку существенное отличие между уравнением, описывающим поле скоростей, и уравнением, описывающим поле температур, состоит в том, что в случае несопряженного течения градиент давления входит лишь в первое.

4.3. Плоские неавтономные течения

Если изменение скорости внешнего потока не подчиняется закону (4.17), т. е. если величина m не постоянна, или в том случае, когда в течении с массообменом величина m постоянна, но безразмерная функция тока на стенке f_w (соотношение (4.30a)) не постоянна, то

поле скоростей становится неавтомоделным и автомоделное уравнение, описывающее поле скоростей (разд. 4.2), становится несправедливым. Поскольку необходимым (но не достаточным) условием автомоделности решения уравнения энергии является автомоделность поля скоростей, решение уравнения энергии также становится неавтомоделным и его нельзя получить с помощью автомоделных решений, рассмотренных в предыдущем разделе.

При решении задачи о неавтомоделном течении можно воспользоваться каким-либо из следующих методов:

Дифференциальные методы. Позволяют решить описанные в гл. 3 дифференциальные уравнения в частных производных, выражающие законы сохранения массы, количества движения и энергии, так что погрешности решения обусловлены только самим приближением тонкого сдвигового слоя или ошибками конечно-разностного приближения, связанными с конкретной численной схемой.

Интегральные методы. Основаны на решении обыкновенных дифференциальных уравнений с координатой x в качестве независимой переменной и различными интегральными параметрами типа толщины потери импульса θ и формпараметра профиля H в качестве искомым функций. При использовании этих методов применяются приближенные корреляционные соотношения, полученные на основе экспериментальных данных, которые имеют ограниченный диапазон применимости, но зато интегральные методы требуют значительно меньших затрат машинного времени, чем дифференциальные методы.

Хотя интегральные методы полезны для проведения быстрого приближенного расчета переноса количества движения в неавтомоделных течениях, они не позволяют достаточно точно рассчитать характеристики переноса тепла в случаях, когда профили температуры существенно неавтомоделны, поскольку температура стенки или плотность теплового потока сильно изменяется по x . Тем не менее мы приводим пример расчета интегральным методом течения с нулевым градиентом давления и два примера расчета течений с градиентами давления. Представленные здесь результаты достаточно надежны и позволяют глубже понять закономерности неавтомоделных течений. Дифференциальные методы, которые с развитием мощных ЭВМ в значительной степени вытеснили интегральные методы, рассмотрены в гл. 13 и 14, однако здесь будет приведен один пример применения дифференциального метода после описания некоторых примеров применения интегральных методов.

Метод Польгаузена

Одним из простейших интегральных методов расчета ламинарного пограничного слоя является метод Польгаузена, при использовании которого отыскиваются профили скорости и температуры, удовлетворяющие интегральному уравнению количества движения (3.68), интегральному уравнению энергии (3.78b) и граничным условиям (4.2). Кроме того, используются дополнительные «граничные» условия, полученные на основании уравнения движения (3.10b) на стенке при $v_w = 0$, а именно

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -u_e \frac{du_e}{dx}, \quad (4.56a)$$

а также некоторые дополнительные «граничные» условия, полученные путем дифференцирования граничных условий на границе пограничного слоя по y , т. е.

$$y \rightarrow \delta \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}, \quad \frac{\partial^3 T}{\partial y^3}, \dots \rightarrow 0. \quad (4.56b)$$

Отметим, что соотношения (4.56) выражают свойства решения уравнений в частных производных, а не граничные условия для этих уравнений.

Проиллюстрируем этот метод на примере обтекания плоской пластины, температура стенки которой T_w равна температуре набегающего потока T_e на участке от передней кромки до точки x_0 (рис. 4.7). Предполагается, что при $x > x_0$ температура стенки постоянна. Динамический пограничный слой формируется, начиная с передней кромки, в то время как тепловой пограничный слой начинается в точке $x = 0$.

Чтобы найти решение интегрального уравнения количества движения (3.68), которое в рассматриваемом случае сводится к следующему:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{c_f}{2}, \quad (4.57)$$

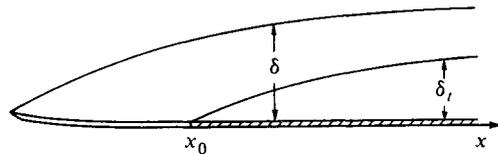


Рис. 4.7. Обтекание плоской пластины с ненагреваемым начальным участком.

предположим, что профиль скорости u выражается многочленом третьей степени

$$u = a + by + cy^2 + dy^3, \quad (4.58)$$

и определим постоянные a , b , c и d с помощью граничных условий для скорости (4.2) совместно с условиями (4.56a) и требованием $\partial u / \partial y = 0$ при $y = \delta$ (4.56b). Постоянных коэффициентов недостаточно, чтобы удовлетворить условию $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$ при $y = \delta$. В результате получаем

$$\frac{u}{u_e} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3. \quad (4.59)$$

Подставляя это выражение в определения θ (3.69a) и c_f (3.69c), а полученные соотношения в уравнение (4.57), после некоторых преобразований получаем уравнение

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{140}{13} \frac{\nu}{u_e}. \quad (4.60)$$

Интегрируя уравнение (4.60) при граничном условии $\delta = 0$ при $x = 0$, находим толщину пограничного слоя

$$\delta = 4,64 \sqrt{\frac{\nu x}{u_e}}. \quad (4.61)$$

Затем можно вычислить коэффициент поверхностного трения, подставляя соотношение (4.61) в выражение (4.59), описывающее профиль скорости в целом, а затем определяя производную на стенке и применяя соотношение (3.69c). Окончательное соотношение можно представить в виде

$$c_f = \frac{0,646}{\sqrt{R_x}}, \quad (4.62)$$

причем полученное выражение всего на 3% отличается от точного решения Блазиуса, определенного соотношением (4.35) при $f_w'' = 0,332$, так что постоянный коэффициент равен 0,664.

Чтобы получить решение интегрального уравнения энергии (3.78b), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\frac{d\theta_T}{dx} = St, \quad (4.63)$$

предположим, что профиль температуры выражается многочленом третьей степени и определим постоянные коэффициенты с по-

мощью граничных условий для температуры. Итоговый профиль температуры можно записать в форме

$$\frac{T - T_w}{T_e - T_w} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3. \quad (4.64)$$

Применяя соотношения (4.59) и (4.64), можно теперь найти решение уравнения (4.63). Используя определение θ_T , можно записать

$$\theta_T = \int_0^h \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] \left[1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_t} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \right] dy.$$

При проведении последующих расчетов предположим, что толщина теплового пограничного слоя меньше толщины динамического пограничного слоя. В таком случае интеграл нужно вычислить лишь в пределах от 0 до δ_t , поскольку при $y > \delta_t$ подынтегральная функция в предыдущем соотношении тождественно равна нулю. Вводя отношение $s = \delta_t/\delta$ и вычисляя интеграл, получаем

$$\theta_T = \delta \left(\frac{3}{20} s^2 - \frac{3}{280} s^4 \right).$$

Второй член суммы в скобках мал по сравнению с первым, поскольку используется предположение $s < 1$. Следовательно, им можно пренебречь. Подставляя полученный результат в уравнение (4.63) и применяя соотношение (4.64), а также определение числа Стантона, можно записать

$$\frac{3}{20} \frac{d}{dx} (s^2 \delta) = \frac{3}{2} \frac{k}{\rho c_p u_e \delta_t} = \frac{3}{2} \frac{k}{\rho c_p u_e \delta s},$$

или

$$\delta s^3 \frac{d\delta}{dx} + 2s^2 \delta^2 \frac{ds}{dx} = \frac{10k}{\rho c_p u_e}.$$

Комбинируя это уравнение с соотношениями (4.60) и (4.61), получаем

$$s^3 + 4xs^2 \frac{ds}{dx} = \frac{13}{14} \frac{1}{Pr}. \quad (4.65)$$

Это дифференциальное уравнение можно решить (см. задачу 4.14) и получить в результате

$$s^3 = \frac{13}{14Pr} + Cx^{-3/4}. \quad (4.66)$$

Постоянная S находится с помощью граничного условия $s = 0$ при $x = x_0$. Тогда

$$s = \frac{1}{1,026 \text{Pr}^{1/3}} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/3}. \quad (4.67a)$$

Если плоская пластина нагревается по всей длине ($x_0 = 0$), то отношение толщин пограничного слоя выражается формулой

$$s = \frac{0,977}{\text{Pr}^{1/3}}. \quad (4.67b)$$

Отметим, что толщина теплового пограничного слоя очень вязких масел, имеющих число Прандтля порядка 1000, примерно в 10 раз меньше толщины динамического пограничного слоя. Число Прандтля газов обычно меньше единицы. В этом случае $s > 1$ и выражение для θ_T нельзя упростить, как это делалось в предыдущем расчете. Однако, поскольку наименьшее значение числа Прандтля для газов составляет около 0,6, максимальная величина s будет равна 1,18. Следовательно, погрешность соотношения (4.67) мала. Очень малые числа Прандтля имеют лишь жидкие металлы. Для них решение (4.67) несправедливо.

В задачах теплообмена полезно и удобно ввести коэффициент теплоотдачи \hat{h} , определяемый выражением

$$\hat{h} = \frac{\dot{q}_w}{T_w - T_e} = - \frac{k}{T_w - T_e} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w. \quad (4.68a)$$

Этот коэффициент можно связать с местным числом Нуссельта (4.51a) соотношением

$$\hat{h} = \text{Nu}_x \frac{k}{x}. \quad (4.68b)$$

Для профиля температуры, определенного соотношением (4.64), выражение (4.68a) можно записать в виде

$$\hat{h} = \frac{3}{2} \frac{k}{\delta_i}, \quad (4.69)$$

из которого следует, что коэффициент теплоотдачи обратно пропорционален толщине теплового пограничного слоя.

Подставляя соотношения (4.61) и (4.67a) в выражение (4.69), получаем

$$\hat{h} = \frac{0,332k \text{Pr}^{1/3}}{\sqrt{\nu x / u_e} \left[1 - (x_0/x)^{3/4} \right]^{1/3}}. \quad (4.70)$$

Подставляя затем полученное выражение в (4.68b), находим формулу для местного числа Нуссельта

$$\text{Nu}_x = \frac{0,332\text{Pr}^{1/3}R_x^{1/2}}{\left[1 - (x_0/x)^{3/4}\right]^{1/3}}, \quad (4.71)$$

которая в случае нагрева пластины по всей длине ($x_0 = 0$) принимает вид

$$\text{Nu}_x = 0,332\text{Pr}^{1/3}R_x^{1/2}. \quad (4.72)$$

Полученный результат совпадает с решением (4.55a).

Формула (4.72) получена в предположении, что толщина динамического пограничного слоя больше толщины теплового пограничного слоя. В противном случае, когда тепловой пограничный слой толще динамического, рекомендуется применять [3] следующее соотношение для плоской пластины, нагретой по всей длине, при числах Прандтля 0,005—0,05:

$$\text{Nu}_x = \frac{\sqrt{\text{Pr} R_x}}{1,55\sqrt{\text{Pr}} + 3,09\sqrt{0,372 - 0,15 \text{Pr}}}. \quad (4.73)$$

Интегральный метод Твейтса для расчета поля скоростей

Полезным интегральным методом расчета переноса количества движения в несопряженном ламинарном течении при наличии градиента давления, но при отсутствии массообмена, является метод Твейтса [4]. Он основан на том факте, что большинство экспериментальных данных и результатов точных численных решений для ламинарного пограничного слоя достаточно точно описывается универсальной линейной зависимостью

$$\frac{u_e}{\nu} \frac{d\theta^2}{dx} = f\left(\frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_e}{dx}\right) = A - B \frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_e}{dx}. \quad (4.74)$$

Входящие в эту зависимость постоянные A и B необходимо определить. Соотношение (4.74) является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, которое можно проинтегрировать, получая в результате

$$\theta^2 = \frac{\nu A \int_0^x u_e^{B-1} dx}{u_e^B} + \theta_i^2 \frac{u_{e_i}^B}{u_e^B}, \quad (4.75)$$

где индекс i относится к начальным условиям.

Твейтс выбрал значения $A = 0,45$, $B = 6$ и записал соотношение (4.75) в виде

$$\theta^2 = \frac{0,45\nu}{u_e^6} \int_0^x u_e^5 dx + \theta_i^2 \left(\frac{u_{e_i}}{u_e} \right)^6, \quad (4.76a)$$

или в безразмерной форме

$$\left(\frac{\theta}{L} \right)^2 = \frac{0,45}{(u_e^*)^6 R_L} \int_0^{x^*} u_e^{*5} dx^* + \left(\frac{\theta}{L} \right)_i^2 \left(\frac{u_{e_i}^*}{u_e^*} \right)^6. \quad (4.76b)$$

Здесь при L — характерном линейном размере, u_{ref} — характерной скорости, безразмерные параметры x^* , u_e^* и R_L определяются выражениями

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad u_e^* \equiv \frac{u_e}{u_{\text{ref}}}, \quad R_L \equiv \frac{u_{\text{ref}} L}{\nu}. \quad (4.77)$$

Индекс i в соотношениях (4.76) относится к начальным условиям при $x^* = 0$. Например, при проведении расчетов, начиная с критической точки, член $(\theta/L)_i^2 (u_{e_i}^*/u_e^*)^6$ равен нулю, поскольку $u_{e_i}^* = 0$ (величина θ_i не равна нулю, как это следует из результатов автомодельного решения при $m = 1$, представленных в табл. 4.1).

Как только величина θ рассчитана с помощью приведенных ниже корреляционных соотношений, можно определить другие характеристики пограничного слоя (H и c_f) в зависимости от параметра градиента давления $\lambda \equiv (\theta^2/\nu) du_e/dx$. При $0 \leq \lambda \leq 0,1$ эти соотношения имеют следующий вид:

$$R_\theta \frac{c_f}{2} = 0,225 + 1,61\lambda - 3,75\lambda^2 + 5,24\lambda^3, \quad (4.78a)$$

$$H = 2,61 - 3,75\lambda + 5,24\lambda^2,$$

а при $-0,1 \leq \lambda \leq 0$ они записываются следующим образом:

$$R_\theta \frac{c_f}{2} = 0,225 + 1,472\lambda + \frac{0,0147\lambda}{0,107 + \lambda}, \quad (4.78b)$$

$$H = 2,472 + \frac{0,0147}{0,107 + \lambda},$$

где

$$R_\theta = \frac{u_e \theta}{\nu}, \quad c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho u_e^2}. \quad (4.78c)$$

Сравнение результатов расчета по соотношению (4.74) с данными точных численных решений для ламинарного пограничного слоя, полученных авторами с помощью программы, аналогичной описанной в гл. 13, показало, что выбранные Твейтсом в 1950 г. на основании немногочисленных расчетных исследований, проведенных к тому времени, значения $A = 0,45$, $B = 6$ до сих пор не нуждаются в уточнении.

*Интегральный метод Смита—Сполдинга
для расчета поля температур*

Характеристики теплообмена в ламинарном пограничном слое с постоянными свойствами при переменной скорости u_e , но при постоянной температуре стенки можно рассчитать с помощью метода, аналогичного методу Твейтса [5]. Толщину теплопроводного слоя

$$\delta_c \equiv \frac{k(T_w - T_e)}{\dot{q}_w} \equiv - \frac{T_w - T_e}{(\partial T / \partial y)_w} \quad (4.79)$$

можно выразить в безразмерной форме с точностью, сравнимой с точностью аналогичного соотношения Твейтса (4.74), следующим образом:

$$\frac{u_e}{\nu} \frac{d\delta_c^2}{dx} = F \left(\frac{\delta_c^2}{\nu} \frac{du_e}{dx}, \text{Pr} \right). \quad (4.80)$$

Основное соотношение для теплообмена в автомоделных ламинарных слоях имеет вид

$$\text{Nu}_x = \frac{\dot{q}_w x}{k(T_w - T_e)} = \frac{-x(\partial T / \partial y)_w}{T_w - T_e} = CR_x^{1/2}, \quad (4.81)$$

где C является функцией m и Pr . Сравнивая определение δ_c с выражением (4.81), находим

$$\delta_c^2 = \frac{x\nu}{C^2 u_e}. \quad (4.82)$$

Следовательно, параметры, входящие в соотношение (4.30), можно выразить следующим образом:

$$\frac{u_e}{\nu} \frac{d\delta_c^2}{dx} = \frac{1-m}{C^2}, \quad \frac{\delta_c^2}{\nu} \frac{du_e}{dx} = \frac{m}{C^2}. \quad (4.83)$$

Результаты расчета при постоянных значениях числа Прандтля и различных градиентах давления показали, что соотношение (4.80), как и корреляционная зависимость Твейтса, является практически линейным, но коэффициенты A и B зависят от числа Прандтля. Следовательно, можно проинтегрировать линейный вариант соотношения (4.80) таким же образом, как и соотношение (4.74), получая в результате выражение

$$\delta_c^2 = \frac{\nu A \int_0^x u_e^{B-1} dx}{u_e^B} + \delta_{c_i}^2 \frac{u_{e_i}^B}{u_e^B}, \quad (4.84)$$

аналогичное соотношению (4.75), причем индекс i , как и прежде, относится к начальным условиям. Коэффициент теплоотдачи, выраженный в виде местного числа Стантона, можно найти, используя определение δ_c (4.79), с помощью соотношения

$$St = \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p u_e (T_w - T_e)} = \frac{k}{\rho c_p u_e \delta_c} = \frac{Nu_x}{R_x Pr}. \quad (4.85)$$

Применяя выражение (4.84) и безразмерные параметры, можно записать число Стантона следующим образом:

$$St = \frac{c_1 (u_e^*)^{c_2}}{\left[\int_0^{x^*} (u_e^*)^{c_3} dx^* \right]^{1/2} \sqrt{R_L}}. \quad (4.86)$$

Здесь $c_1 = Pr^{-1} A^{-1/2}$, $c_2 = B/2 - 1$, $c_3 = B - 1$ (табл. 4.4). Коэффициент аналогии Рейнольдса $St/(c_f/2)$ в неавтомоделных течениях обычно зависит от x . Чтобы найти его величину (выражаемую довольно сложной математической формулой, которая здесь не приводится), нужно скомбинировать выражение (4.86) с соотношением Твейтса для c_f , полученным путем подстановки в (4.78) соотношения для R_θ , найденного с помощью (4.76).

Таблица 4.4. Значения постоянных, входящих в соотношение (4.86), при различных числах Прандтля

Pr	c_1	c_2	c_3
0,7	0,418	0,435	1,87
0,8	0,384	0,450	1,90
1,0	0,332	0,475	1,95
5,0	0,117	0,595	2,19
10,0	0,073	0,685	2,37

Решения интегральными методами для неавтомоделных течений

В качестве примера плоского неавтомоделного течения при отсутствии массообмена рассмотрим поперечное обтекание круглого цилиндра радиусом r_0 с постоянной температурой поверхности. Согласно теории невязкого течения, распределение скорости внешнего потока имеет следующий вид:

$$u_e = 2u_\infty \sin \theta, \tag{4.87}$$

где параметр $\theta = x/r_0$ теперь представляет собой *угловую координату*, а x измеряется вдоль окружности цилиндра.

На рис. 4.8 показано изменение безразмерного напряжения поверхностного трения $(\tau_w/\rho u_\infty^2)(u_\infty r_0/\nu)^{1/2}$ по окружности цилиндра. Сплошной линией показаны результаты расчета методом Твейтса, штриховой линией — данные автомоделного решения для течения в окрестности критической линии (течения Хименца) при $m = 1$ (разд. 4.2). В окрестности критической линии, т. е. при малых значениях θ , выражение (4.87) можно приближенно записать в виде

$$u_e = 2u_\infty \theta = \frac{2u_\infty x}{r_0}. \tag{4.88}$$

Используя определение напряжения поверхностного трения в переменных Фолкнера — Скэн (4.19), можно записать

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \mu u_e f_w'' \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}}.$$

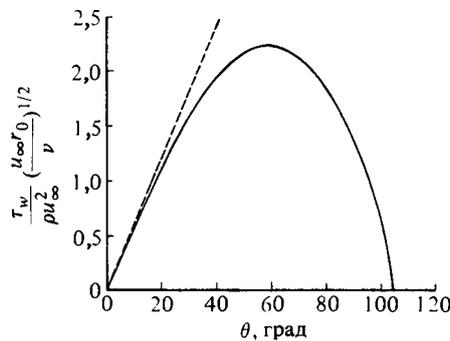


Рис. 4.8. Распределение безразмерного напряжения поверхностного трения по периметру круглого цилиндра.

Результаты расчета методом Твейтса; --- автомоделное решение (4.89).

Подставляя в это выражение соотношение (4.88) и вспоминая, что $f_w'' = 1,23259$ при $m = 1$ (табл. 4.1), получаем

$$\frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2} \left(\frac{u_\infty r_0}{\nu} \right)^{1/2} = 2\sqrt{2} \theta \times 1,23259 = 3,486\theta. \quad (4.89)$$

Нетрудно убедиться (рис. 4.8), что автомодельное решение согласуется с решением методом Твейтса при θ от 0 до $\pi/6$ рад = 30° . Этого и следовало ожидать, поскольку на этом участке течение близко к течению в окрестности критической линии с $u_e \approx 2(u_\infty/r_0)x$. Кроме того, согласно данным, представленным на рис. 4.8, отрыв потока происходит при $\theta = 1,83$ рад = 105° . Вследствие отрыва соотношение (4.87) становится несправедливым при всех значениях θ . Чтобы получить достаточно точные результаты, следует итерационным методом находить решение для невязкого внешнего потока и решение для пограничного слоя и области отрывного течения [6].

На рис. 4.9 показано изменение параметра $Nu_x/\sqrt{R_x}$, а на рис. 4.10 — изменение местного числа Стантона St при трех значениях числа Прандтля. Как и для автомодельных решений (табл. 4.3), значение $Nu_x/\sqrt{R_x} (\equiv g_w')$ или St в точке отрыва не равно нулю. Расчет для области отрывного течения дает ненулевые значения даже в диапазоне значений $1,83 < \theta < \pi$. В точке отрыва $St/(c_f/2) = \infty$, как и в автомодельном решении для $m = -0,0904$, когда $c_f = 0$ во всей области течения.

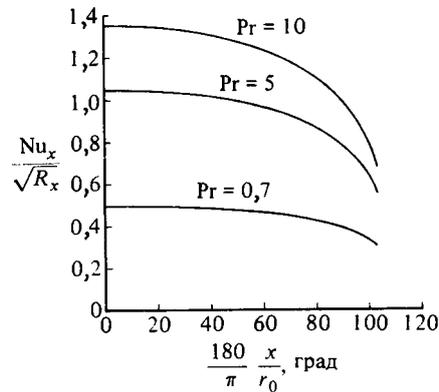


Рис. 4.9. Распределения безразмерного параметра плотности теплового потока $Nu_x/\sqrt{R_x}$ по периметру круглого цилиндра при трех значениях числа Прандтля.

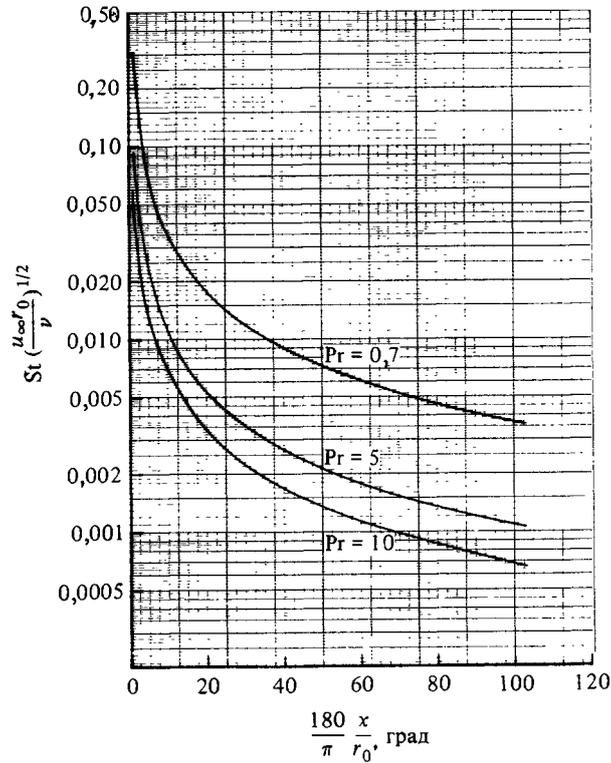


Рис. 4.10. Распределения местного числа Стантона по периметру круглого цилиндра при трех значениях числа Прандтля.

*Решение дифференциальным методом
для плоской пластины
с ненагреваемым начальным участком*

В качестве еще одного примера рассмотрим ламинарное течение несжимаемой жидкости на плоской пластине, которая нагревается, начиная с точки $x = x_0$, а не с передней кромки $x = 0$, где начинается динамический пограничный слой (рис. 4.7). (Напомним, что если нагрев начинается с передней кромки $x = 0$ и тепловой поток постоянен вдоль пластины, то уравнение энергии имеет автомодельное решение.)

Решение этой задачи можно получить с помощью интегрального метода типа рассмотренного выше метода Польгаузена. Его

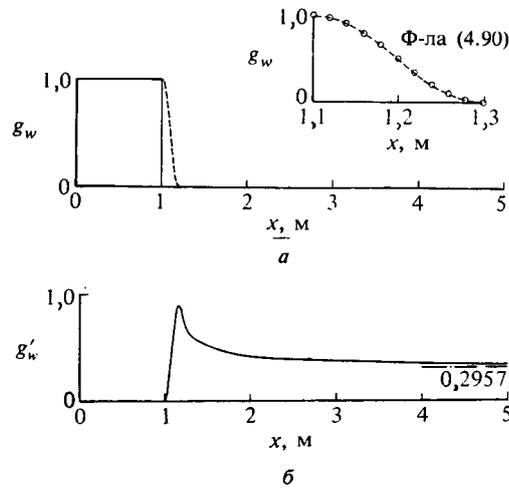


Рис. 4.11. Обтекание плоской пластины с ненагреваемым начальным участком.

Пунктирная линия на графике (а) соответствует кривой, показанной на вставке; а — распределение температуры стенки g_w ; б — результаты расчета градиента температуры на стенке g'_w .

можно получить и с помощью дифференциального метода, хотя изменение температуры в точке $x = x_0$ от T_e до T_w или в безразмерной форме от $g_w = 1$ до 0 (рис. 4.11) создает некоторые трудности при решении уравнения энергии. Это обусловлено тем, что безразмерная температура стенки g_w имеет разрыв в точке $x = x_0$ и величина Nu_x становится бесконечно большой, как это следует и из решения интегральным методом (4.71). На практике повышение температуры в точке $x = x_0$ происходит более плавно вследствие кондуктивного переноса тепла в твердом теле. Предельный случай этого явления иллюстрируется на рис. 6.20.

Применяя разложение величин u , v и T в ряды (задача 4.13) можно получить аналитическое выражение для профиля температуры за точкой ступенчатого изменения T_w в окрестности точки $x_2 = x_0$. Затем это выражение можно использовать в качестве начального профиля температуры при решении уравнения энергии в полностью дифференциальной форме, начинающемся с исходной точки x , где x несколько больше x_0 . Однако более реалистичский путь состоит в моделировании действительного «скачка» температуры плавно изменяющейся функцией, например, выражая безразмерную температуру стенки g_w при $x > x_0$ простой аналитической

функцией

$$g_w = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \pi \frac{x - x_0}{a} \right) \quad x_0 \leq x \leq x^*. \quad (4.90)$$

Значение параметра a выбирается таким, чтобы величина g_w обращалась в нуль в некоторой точке $x = x^*$, т. е. $a = x^* - x_0$ (рис. 4.11, а). Выбирать значение x^* следует очень осторожно, как это будет показано в примере расчета, представленном ниже.

Рассмотрим ламинарное течение воздуха ($Pr = 0,72$) на плоской пластине длиной 5 м, нагреваемой, начиная только с точки, расположенной на расстоянии 1 м от передней кромки, и рассчитаем изменение безразмерного параметра теплообмена g'_w вдоль пластины, применяя программу численного расчета, описанную в разд. 13.5. Дальнейшее будет понятно без обращения к этому разделу.

Поскольку поле скоростей автомодельно, можно начать расчет скорости и температуры с точки $x = x_0 = 1$ м. Мы решаем уравнение движения (4.21) и энергии (4.28) при $m = 0$, $n = 0$ и следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \eta = 0, \quad f = f' = 0, \quad g = 0, \\ \eta = \eta_e, \quad f' = 1, \quad g = 1 \end{aligned} \quad (4.91)$$

для числа Прандтля 0,72. Поскольку граничное условие уравнения энергии (т. е. значение температуры) одно и то же на стенке и на границе пограничного слоя, начальное численное решение будет состоять из решения Блазиуса для поля скоростей и равномерного поля температур ($g = 1$). При $x > x_0 = 1$ м в качестве граничного условия уравнения энергии принимается величина g_w , определенная соотношением (4.90), и решаются уравнения движения и энергии при каждом заданном значении x .

На рис. 4.11 указаны значения x , при которых проводились расчеты теплообмена. Отметим, что при $x^* = 1,2$ м величина $g_w = 0$, т. е. $a = 0,2$ м. Даже в случае когда «ступенька» температуры занимает расстояние 0,2 м, максимальная величина безразмерного теплового потока вдвое выше асимптотического значения. Отметим также, что на участке $x_0 \leq x \leq x^*$ использовалось сравнительно большое число расчетных точек x ввиду быстрого изменения g_w в соответствии с соотношением (4.90). При $x > x^*$ достаточно было провести расчеты в нескольких точках x . Следует указать (рис. 4.11б), что при больших x безразмерный параметр теплообмена g'_w приближается к своему автомодельному значению $g'_w = 0,2957$.

4.4. Осесимметричные течения

Рассматривая уравнения (3.15)—(3.17), можно видеть, что уравнения пограничного слоя для плоского и осесимметричного течений отличаются друг от друга лишь наличием в последних радиальной координаты $r(x, y)$. Поэтому с помощью *преобразования Манглера* (задача 3.5) уравнения для осесимметричного течения можно свести к виду, близкому к виду уравнений для плоского течения. Если толщина пограничного слоя мала по сравнению с радиусом тела r_0 , так что $r(r, y) = r_0(x)$, то в результате этого преобразования получаются в точности такие же уравнения, которыми описывается плоское течение. Если через x, y обозначить координаты осесимметричного течения, через \bar{x}, \bar{y} — координаты плоского течения, а через L — характерный линейный размер, то преобразование Манглера определяется соотношениями

$$d\bar{x} = \left(\frac{r_0}{L}\right)^{2K} dx, \quad d\bar{y} = \left(\frac{r}{L}\right)^K dy. \quad (\text{P3.1})$$

При рассмотрении осесимметричных течений, как и плоских, удобно использовать преобразованные переменные. Это легко сделать, комбинируя преобразования Фолкнера — Скэн и Манглера. Окончательное комбинированное преобразование, называемое преобразованием Фолкнера — Скэн — Манглера, определяется соотношениями

$$d\bar{x} = \left(\frac{r_0}{L}\right)^{2K} dx, \quad (4.92a)$$

$$d\eta = \left(\frac{u_e}{\nu \bar{x}}\right)^{1/2} \left(\frac{r}{L}\right)^K dy, \quad (4.92b)$$

$$\psi(x, y) = L^K (u_e \nu \bar{x})^{1/2} f(\bar{x}, \eta). \quad (4.92c)$$

Отметим, что поскольку для плоского течения показатель K равен нулю и $\bar{x} = x$, это преобразование сводится к преобразованию Фолкнера — Скэн, выраженному соотношениями (4.19b) и (4.19c). В соотношение (4.92c) входит величина L , обусловленная определением функции тока, которое для осесимметричного течения имеет следующий вид:

$$r^K u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad r^K v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (4.93)$$

но с помощью соотношения (4.92a) нетрудно убедиться, что величина η , определяемая формулой (4.92b), остается безразмерной.

Применяя правило дифференцирования сложной функции и выражения (4.92a) и (4.92b), можно записать следующие соотношения, связывающие параметры в плоскостях (x, y) и (\bar{x}, η) :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{r_0}{L}\right)^{2K} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\right)_\eta + \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)_{\bar{x}} \right], \quad (4.94a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{u_e}{\nu \bar{x}}\right)^{1/2} \left(\frac{r}{L}\right)^K \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)_{\bar{x}}. \quad (4.94b)$$

Используя определение функции тока (4.93) и соотношения (4.92) и (4.94), можно записать преобразованные уравнения движения и энергии для плоского или осесимметричного несопряженных ламинарных течений в виде

$$(bf'')' + \frac{m+1}{2} ff'' + m[1 - (f')^2] = \bar{x} \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \bar{x}} - f'' \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right), \quad (4.95)$$

$$(eT')' + \frac{m+1}{2} fT' = \bar{x} \left(f' \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} - T' \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right), \quad (4.96)$$

где

$$b = (1+t)^{2K}, \quad e = \frac{b}{Pr}, \quad (4.97)$$

а t — параметр поперечной кривизны, определяющий отклонение местного радиуса $r(x, y)$ от радиуса тела $r_0(x)$ (задача 2.3). В преобразованных переменных он определяется следующим образом:

$$t = -1 + \left[1 + \left(\frac{L}{r_0}\right)^2 \frac{2 \cos \phi}{L} \left(\frac{\nu \bar{x}}{u_e}\right)^{1/2} \eta \right]^{1/2}, \quad (4.98)$$

где ϕ — угол наклона поверхности, определенный выражением $\operatorname{tg} \phi = dr_0/dx$, так что $r = r_0 + u \cos \phi$. Учитывая определение x , отметим, что в определении L не входит t . Можно видеть, что если параметр $(\nu \bar{x}/u_e)^{1/2}$ мал по сравнению с r_0 , т. е. величина δ мала по сравнению с r_0 , то значение t также мало. Величина m , как и прежде, параметр градиента давления, идентичный определенному выражением (4.23) с той лишь разницей, что переменная x заменена на \bar{x} , т. е.

$$m = \frac{\bar{x}}{u_e} \frac{du_e}{d\bar{x}}. \quad (4.99)$$

Как и в плоском течении, используется определение безразмерной температуры g (4.25), так что уравнение (4.96) можно переписать

сать в виде

$$(eg')' + \frac{m+1}{2}fg' + n(1-g)f' = \bar{x} \left(f' \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} - g' \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right). \quad (4.100)$$

При заданной температуре стенки n , как и прежде, является безразмерным параметром температуры или параметром плотности теплового потока, идентичным определенному соотношением (4.29), с той лишь разницей, что переменная x заменена \bar{x} . Определение ϕ (4.26b) теперь принимает вид

$$\phi(x) = \left(\frac{L}{r_0} \right)^K \frac{\dot{q}_w(\bar{x})\bar{x}}{kT_e R_{\bar{x}}^{1/2}}, \quad (4.101)$$

где

$$R_{\bar{x}} = \frac{u_e \bar{x}}{\nu}. \quad (4.102)$$

Граничные условия для преобразованных уравнений движения и энергии (4.95) и (4.100) выражаются следующим образом:

$$\eta = 0, \quad f' = 0, \quad f = -\frac{1}{(u_e \nu \bar{x})^{1/2}} \int_0^{\bar{x}} \bar{v}_w d\bar{x}, \quad g = 0 \quad \text{или} \quad g' = 1. \quad (4.103a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad f' = 1, \quad g = 1, \quad (4.103b)$$

где $\bar{v}_w \equiv v_w(L/r_0)^K$. В случае отсутствия массообмена $f_w = 0$.

Если влияние поперечной кривизны мало, уравнения движения и энергии для несопряженного осесимметричного ламинарного течения также допускают автомодельные решения. Как и для плоского течения, функция тока $f(\bar{x}, \eta)$ и безразмерная температура $g(\bar{x}, \eta)$, входящие в уравнения (4.95) и (4.100), теперь становятся функциями координаты η , которая в случае пренебрежимо малого влияния поперечной кривизны определяется выражением

$$\eta = \left(\frac{u_e}{\nu \bar{x}} \right)^{1/2} \left(\frac{r_0}{L} \right) y. \quad (4.104)$$

Полученные в результате уравнения движения и энергии, а также их граничные условия совпадают по форме с соответствующими уравнениями и граничными условиями для плоского течения (4.31) — (4.33). Основное отличие заключается в определении параметров m , n , f_w и g'_w . Хотя в условиях автомодельного течения они

постоянны, в их определении для осесимметричного течения входит \bar{x} , а в определении для плоского течения входит x . Связь между x и \bar{x} устанавливается соотношением (4.92а). Таким образом, в эти определения входит радиус тела $r_0(x)$, и поэтому, например, величина m для осесимметричного течения в окрестности критической точки отличается от соответствующей величины для плоского течения. Чтобы установить связь между параметрами двумерного и трехмерного потоков, рассмотрим течение в окрестности критической точки осесимметричного тела с затупленной лобовой частью, для которого

$$u_e = Cx. \quad (4.105)$$

Поскольку для автомодельного течения $u_e \sim \bar{x}^m$ (см. выражение (4.99)) и поскольку в окрестности критической точки $r_0 \sim x$, из соотношения (4.92а) получаем

$$x \sim \bar{x}^{1/3}. \quad (4.106)$$

Следовательно, величина m для течения в окрестности критической точки на затупленной лобовой части равна $1/3$ в отличие от ее значения для плоского течения, равного 1.

Течение около осесимметричного тела с острой конической лобовой частью также допускает автомодельное решение. Скорость внешнего потока изменяется с расстоянием x от вершины конуса по закону

$$u_e = Cx^s. \quad (4.107)$$

Здесь C — просто масштабный коэффициент, а показатель степени s зависит от полуугла при вершине конуса (рис. 4.12). Полуугол при вершине конуса 90° соответствует затупленному телу, так что

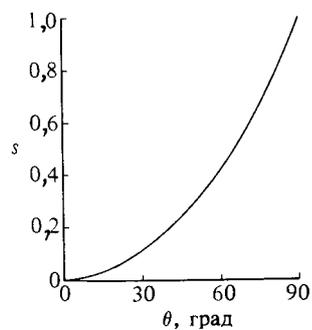


Рис. 4.12. Значения s в соотношении (4.107) для потенциального течения около полубесконечного конуса [7].

$s = 1$, как это видно из соотношения (4.105). Чтобы найти величину m для течений, скорость которых u_e выражается формулой (4.107), вновь предположим, что $r_0 \sim x$, и получим в итоге

$$u_e \sim \bar{x}^{s/3}, \quad (4.108)$$

т. е. для каждого заданного значения полуугла при вершине конуса $m = s/3$.

На основании этого рассуждения можно сделать вывод, что для определения характеристик автомодельных решений уравнений движения и энергии для осесимметричного течения все еще можно воспользоваться данными, представленными в табл. 4.1 и 4.2, при условии, что найдено «эквивалентное» значение m для рассматриваемого тела.

Неавтомодельные течения

В принципе расчет неавтомодельного осесимметричного течения проводится примерно таким же образом, как и расчет плоского течения. Можно либо решить уравнения (4.95) и (4.100) с граничными условиями (4.103) дифференциальным методом, либо решить упрощенные обыкновенные дифференциальные уравнения для параметров профиля (интегральными методами). В последнем случае, например, можно обобщить разработанные для плоских течений методы Твейтса или Смита — Сполдинга (разд. 4.3) на осесимметричные течения, применяя преобразование Манглера. Если обозначить параметры плоского течения индексом 2, а параметры осесимметричного индексом 3 (соответственно параметры без черточки сверху и с черточкой в соотношении (4.92a)) и вспомнить, что координата вдоль поверхности преобразуется согласно соотношению (4.92a), а координата по нормали к стенке — согласно соотношению (4.92b) (без учета влияния поперечной кривизны), то получим

$$\theta_2 = \left(\frac{r_0}{L}\right)^K \theta_3, \quad dx_2 = \left(\frac{r_0}{L}\right)^{2K} dx_3. \quad (4.109)$$

Применяя соотношение (4.109), можно записать формулу Твейтса (4.76b) в виде

$$\left(\frac{\theta_3}{L}\right)^2 = \frac{0,45R_L^{-1}}{(u_e^*)^6 (r_0^*)^{2K}} \int_0^{x_3^*} (u_e^*)^2 (r_0^*)^{2K} dx_3^* + \left(\frac{\theta_3}{L}\right)_1^2 \left(\frac{u_{e1}^*}{u_e^*}\right)^6, \quad (4.110)$$

где

$$r_0^* = \frac{r_0}{L}, \quad x_3^* = \frac{x_3}{L}.$$

Для окрестности критической точки затупленного осесимметричного тела

$$\left(\frac{\theta_3}{L}\right)^2 = R_L^{-1} \frac{0,056}{(du_e^*/dx_3^*)_i}. \quad (4.111)$$

Рассчитав θ_3 по формуле (4.110), можно найти δ^* , H и c_f с помощью соотношений (4.78).

Аналогичным образом можно распространить формулу (4.84) на случай осесимметричного течения с помощью преобразования Манглера, получая в итоге

$$r_0^2 (\delta_c)_3^2 = \frac{\nu A \int_0^{x_3} r_0^2 u_e^{B-1} dx_3}{u_e^B}, \quad (4.112a)$$

или в безразмерных параметрах

$$St = \frac{c_1 (r_0^*)^K (u_e^*)^{c_2}}{\left[\int_0^{x_3^*} (u_e^*)^{c_3} (r_0^*)^{2K} dx_3^* \right]^{1/2}} R_L^{-1/2}. \quad (4.112b)$$

Входящие в это соотношение постоянные c_1 , c_2 и c_3 имеют те же значения, что и приведенные в табл. 4.4.

В качестве примера осесимметричного течения рассмотрим ламинарное обтекание равномерно нагретой сферы радиусом R_0 со скоростью u_∞ для сравнения с поперечным обтеканием цилиндра, рассмотренным в разд. 4.3. Распределение скорости невязкого течения описывается формулой

$$u_\rho = \frac{1}{2} u_\infty \sin \phi, \quad (4.113)$$

где $\phi (\equiv x/R_0)$ — координата, измеряемая от критической точки (рис. 4.13).

На рис. 4.14 показано изменение безразмерного напряжения поверхностного трения по окружности сферы, причем в качестве характерного линейного размера L выбран радиус R_0 . Результаты, показанные сплошной линией, получены методом Твейтса по формуле (4.110) с использованием распределения скорости внешнего по-

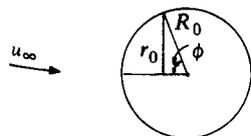


Рис. 4.13. Обозначения для случая обтекания сферы.

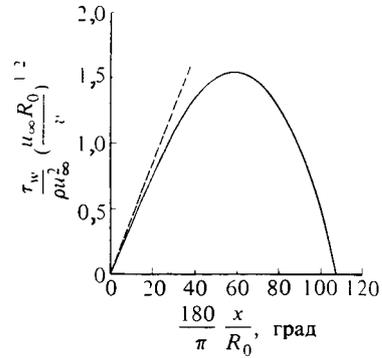


Рис. 4.14. Распределение безразмерного напряжения поверхностного трения по окружности сферы.

— результаты расчета методом Твейтса; --- автомодельное решение (4.116).

тока (4.113) при $x/R_0 = \sin\phi$, а данные, показанные штриховой линией, получены с помощью автомодельного решения для осесимметричного течения в окрестности критической точки. Эти данные найдены по методике, аналогичной использованной для плоского течения в окрестности критической линии цилиндра. Вместо формулы (4.88) и последующих выражений применяется формула

$$u_e = \frac{3}{2} \frac{u_\infty x}{R_0}. \quad (4.114)$$

Используя определение напряжения поверхностного трения и переменную подобия, определенную соотношением (4.104), можно записать

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \mu u_e f_w'' \sqrt{\frac{u_e}{\nu \bar{x}}} \frac{r_0}{R_0}. \quad (4.115)$$

Замечая, что

$$\bar{x} = \frac{1}{R_0^2} \frac{x^3}{3}$$

и что при $m = 1/3$ производная $f_w'' = 0,75745$ (табл. 4.1), можно записать соотношение (4.115) в следующем безразмерном виде:

$$\frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2} \left(\frac{u_\infty R_0}{\nu} \right)^{1/2} = \frac{9}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x}{R_0} \right) (0,75745) = 2,41 \left(\frac{x}{R_0} \right). \quad (4.116)$$

Согласно данным, представленным на рис. 4.14, как и в случае обтекания круглого цилиндра, автомодельное решение согласуется с решением, полученным методом Твейтса, при значениях $x/R_0 < \pi/9$ рад = 20° . Кроме того, отрыв потока происходит при $x/R_0 = 1,885$ рад = 108° .

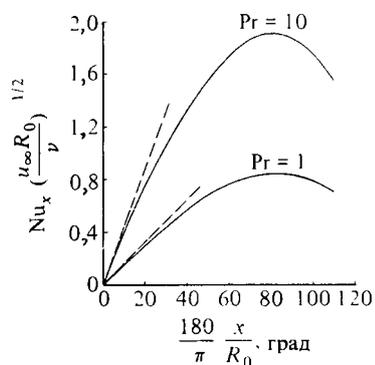


Рис. 4.15. Распределение безразмерного параметра плотности теплового потока по окружности сферы.

результаты расчета по ф-ле (4.112b); --- авто-модельное решение (4.117).

На рис. 4.15 представлены распределения $Nu_x(u_\infty R_0/\nu)^{-1/2}$ по поверхности сферы при двух значениях числа Прандтля. Результаты, показанные сплошной линией, получены по формуле (4.112b) с использованием определения числа Стантона $St = Nu_x/PrR_x$, а показанные штриховой линией получены с помощью автомодельного решения

$$Nu_x \left(\frac{u_\infty R_0}{\nu} \right)^{-1/2} = 2,12 g'_w \left(\frac{x}{R_0} \right), \quad (4.117)$$

где величина g'_w найдена из решения уравнения энергии при $m = 1/3$. И в этом случае можно видеть, что автомодельные решения удовлетворительно согласуются с неавтомодельными при значениях $x/R_0 < \pi/9$ рад.

4.5. Пристенные струи и завесное охлаждение

Пристенные струи (рис. 4.16) применяются в самых различных практических задачах. Они позволяют управлять пограничным слоем на профилях и крыльях, где, например, интенсивный тангенциальный вдув в окрестности задней кромки предотвращает отрыв

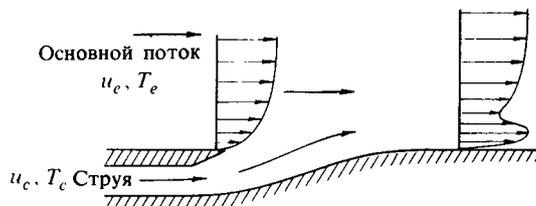


Рис. 4.16. Типичная схема завесного охлаждения и профили скорости при тангенциальном вдуве.

потока и увеличивает подъемную силу при низких скоростях полета. Завеса из теплого воздуха, вдуваемого сквозь щели в поверхности крыла, предотвращает его обледенение. Простейшим способом осушения ветрового стекла является продувка теплого воздуха вдоль его поверхности, позволяющая повысить местную температуру воздуха и испарить водяные пленки и капли. В газовых турбинах, для которых постоянно требуется повышать температуры цикла, чтобы увеличить термический к.п.д., применяется вдув сравнительно холодного газа вдоль внутренней поверхности камеры сгорания и вдоль наружной поверхности лопаток направляющего аппарата и рабочего колеса, чтобы создать слой, изолирующий стенку от горячего газа. Эта завеса охладителя постепенно разрушается вследствие смешения с горячим газом и ее эффективность снижается в направлении потока. В общем охлаждение завесой является эффективным способом защиты поверхностей от воздействия высокотемпературной среды. В литературе, посвященной охлаждению этого типа, термин «эффективность» имеет особое значение и определяется соотношением

$$\eta^* = \frac{h_w - h_e}{h_c - h_e}, \quad (4.118a)$$

где индексы c , e и w относятся к энтальпии h охлаждающей жидкости в выходном сечении щели, энтальпии внешнего потока и энтальпии при температуре стенки соответственно. Часто за характерную энтальпию принимают энтальпию теплоизолированной стенки и эффективность выражают формулой

$$\eta^* = \frac{h_{aw} - h_e}{h_c - h_e}, \quad (4.118b)$$

так что для течения с постоянной удельной теплоемкостью

$$\eta^* = \frac{T_{aw} - T_e}{T_c - T_e}. \quad (4.118c)$$

Величина T_{aw} называется *температурой теплоизолированной стенки*; она соответствует предельному случаю идеально теплоизолированной (адиабатной) стенки, на которой плотность теплового потока равна нулю. Плотность теплового потока рассчитывается по формуле

$$\dot{q}_w = \hat{h}(T_w - T_{aw}). \quad (4.119)$$

Отметим, что в случае отсутствия вдува величина T_{aw} эквивалентна температуре внешнего потока T_e или температуре восстановления T_r в случае течения сжимаемого газа.



Рис. 4.17. Схема пористого охлаждения.

Еще одним способом защиты поверхности от воздействия высокотемпературной среды является пористое охлаждение. В этом случае вторичная (впрыскиваемая) жидкость поступает в пограничный слой сквозь проницаемую поверхность, изготовленную из пористого материала (рис. 4.17). Такой способ используется главным образом для защиты участка, на котором вторичная жидкость поступает в пограничный слой. Следовательно, он отличается от способа охлаждения завесой, предназначенного для защиты как участка вдува, так и поверхности, расположенной ниже по потоку. Кроме того, в отличие от завесного охлаждения возможности пористого охлаждения несколько ограничены, так как из-за малого размера пор происходит их засорение с последующим неравномерным распределением течения охладителя. Можно применять и абляционное охлаждение, но оно в большей степени обусловлено скрытой теплотой испарения, чем впрыском (вдувом) предварительно охлажденной жидкости (газа).

На практике завесы почти всегда являются турбулентными. В зависимости от конструкции щели и формы поверхности течение может быть плоским или трехмерным, безотрывным или с местными зонами отрыва. Как правило, течение непосредственно за областью щелевого вдува является плоским. Установлено, что ламинарные пристенные струи образуются в основном в гидромеханических устройствах небольшого размера или в высокоскоростных потоках, когда ввиду низкой плотности числа Рейнольдса малы. В последнем случае картина течения усложняется из-за образования системы ударных волн, которая нами не рассматривается. Как обычно, решения задач несопряженного ламинарного течения просты и полезны для понимания общих закономерностей явления, а также позволяют провести сравнение с соответствующими задачами турбулентного течения, которые будут рассмотрены в разд. 6.7. Конфигурация, показанная на рис. 4.17, и результаты, представленные

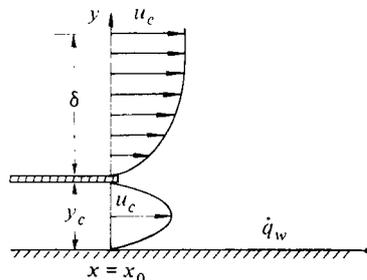


Рис. 4.18. Схема простейшей конструкции плоской щели и начальные профили скорости для задачи о пристенной струе.

ниже и в разд. 6.7, относятся к плоским течениям и могут рассматриваться с точки зрения управления пограничным слоем и завесного охлаждения как некоторые идеализации, к которым должны стремиться конструкторы, вынужденные создавать трехмерные конфигурации.

На рис. 4.18 показана схема плоской щели, расположенной перед теплоизолированной стенкой; эта схема будет использоваться при всех расчетах, описанных в этом разделе. Она включает в себя типичные для большинства практических приложений внешнее течение и поток, вытекающий из щели; при необходимости эту схему можно без труда видоизменить на случай истечения пристенной струи в затопленное пространство, а граничное условие для теплоизолированной стенки ($\dot{q}_w = 0$) можно заменить условием заданной плотности теплового потока в стенку или заданной температуры поверхности. Возможны и другие схемы, обзор которых можно найти в работе Гольдштейна [8], посвященной охлаждению завесой в турбулентных потоках, которую, несмотря на то что она была опубликована в начале 70-х годов, можно рекомендовать в качестве отличного введения в рассматриваемую проблему.

Чтобы решить уравнения пограничного слоя для описанной выше схемы течения, вновь удобно представить уравнения (3.5), (3.10b) и (3.11) в безразмерной форме. С этой целью применим преобразование Фолкнера — Скэн, определенное соотношениями (4.19b) и (4.18c)

$$\eta = \left(\frac{u_e}{\nu x} \right)^{1/2} y, \quad \psi = (u_e \nu x)^{1/2} f(x, \eta). \quad (4.120)$$

Кроме того, введем безразмерную температуру g

$$g = \frac{T_c - T}{T_c - T_e}, \quad (4.121)$$

которая связана с эффективностью завесного охлаждения (4.118с) соотношением

$$\eta^* = 1 - g_w. \quad (4.122)$$

После этого уравнения движения и энергии для безградиентного течения можно записать в преобразованных переменных (4.120) следующим образом:

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' = \xi \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right), \quad (4.123)$$

$$\frac{g''}{Pr} + \frac{1}{2}fg' = \xi \left(f' \frac{\partial g}{\partial \xi} - g' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right). \quad (4.124)$$

Здесь y_c — высота щели, $\xi = x/y_c$ — безразмерная продольная координата.

Для решения уравнений (4.123) и (4.124) требуются начальные и граничные условия. В некотором сечении $\xi = \xi_0$ начальные условия выражаются в виде

$$y < y_c, \quad u = u_1(y), \quad T = T_1(y), \quad (4.125a)$$

$$y > y_c, \quad u = u_2(y), \quad T = T_2(y). \quad (4.125b)$$

Граничные условия ставятся следующим образом:

$$y = 0, \quad u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad (4.126a)$$

$$y = \delta, \quad u = u_e, \quad T = T_e. \quad (4.126b)$$

В безразмерных переменных начальные условия имеют вид:

$$f' = \phi_1(\eta), \quad g = \phi_3(\eta) \quad \eta < \eta_c, \quad (4.127a)$$

$$f' = \phi_2(\eta), \quad g = \phi_4(\eta) \quad \eta > \eta_c, \quad (4.127b)$$

а граничные условия — вид:

$$\eta = 0, \quad f = f' = 0, \quad g' = 0, \quad (4.128a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad f' = 1, \quad g = 1. \quad (4.128b)$$

Эти начальные и граничные условия показывают, что характеристики течения зависят от отношения скоростей потока в щели и внешнего потока u_c/u_e , отношения соответствующих температур T_c/T_e , числа Рейнольдса, рассчитанного по высоте щели $u_c y_c/\nu$, гра-

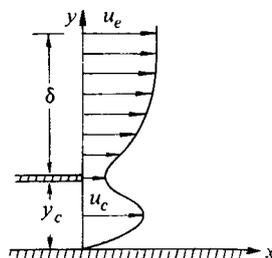


Рис. 4.19. Сглаженный профиль скорости.

ничного условия на теплоизолированной стенке и форм начальных профилей.

Для численного решения уравнений (4.123) и (4.124) при начальных и граничных условиях (4.127) и (4.128) необходимо, чтобы начальные профили были гладкими и не имели разрывов, так как расчет характеристик течения непосредственно за кромкой щели, имеющей конечную толщину, представляет собой весьма сложную задачу. Характерный профиль скорости типа показанного на рис. 4.18, должен быть сглажен в зоне между течением в щели и пограничным слоем, как показано на рис. 4.19. Для представленного ниже примера расчета начальный профиль пограничного слоя $u_2(y)$ задан синусоидой, а профиль скорости течения в щели $u_1(y)$ — параболой с плавным сопряжением этих профилей (разд. 14.2). Параболический профиль, конечно, соответствует полностью развитому течению в канале щели.

Для решения уравнения энергии также требуются начальные условия и приходится преодолевать аналогичные трудности в окрестности кромки щели. Если предположить, что течение в пограничном слое имеет постоянную температуру T_e , так что $T_2(y) = T_e$, а течение в щели имеет постоянную температуру T_c , так что $T_1(y) \equiv T_c$, то начальный профиль безразмерной температуры g , которая равна 1 при $y > y_c$ и 0 при $y < y_c$, можно приближенно выразить функцией

$$g = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{th} \beta \left(\frac{y}{\delta} - \frac{y_c}{\delta} \right) \right], \quad (4.129)$$

где β и y_c/δ — заданные постоянные. На рис. 4.20 сравниваются точный и приближенный профили. Нетрудно убедиться, что при $y_c/\delta = 0,25$, выбирая значение β равным 10 или 20, можно вполне удовлетворительно выразить начальный профиль температуры указанным выше приближенным способом. Подобное приближенное

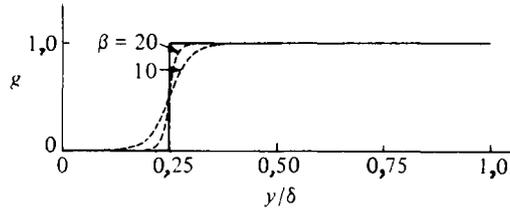


Рис. 4.20. Профили температуры.

... безразмерные профили температуры, сглаженные согласно соотношению (4.129); — ступенчатый профиль температуры.

описание начальных условий часто необходимо для решения инженерных задач сравнительно простыми методами. Оно облегчает процесс нахождения решения, не оказывая существенного влияния на результаты численного расчета. Разумеется, вместо этого можно использовать данные экспериментальных исследований начальных условий.

На рис. 4.21 и 4.22 представлены результаты решения уравнений (4.123) и (4.124) при $Pr = 1$, подчиняющихся описанному выше начальным условиям для профилей скорости и температуры и гранич-

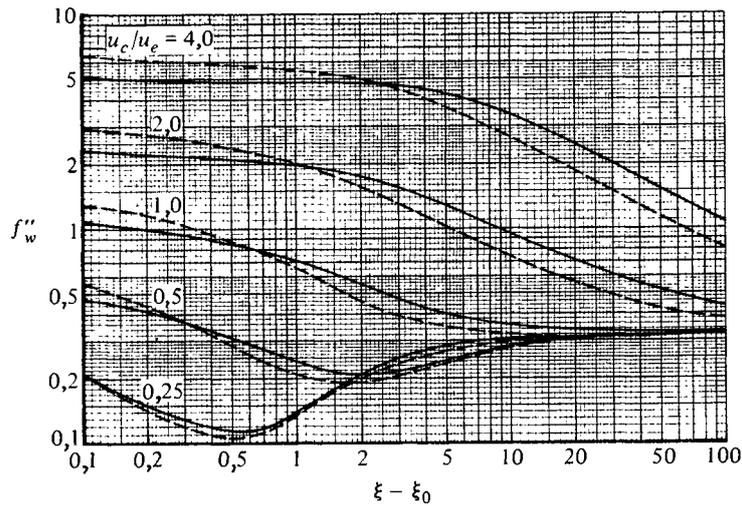


Рис. 4.21. Изменение безразмерного параметра поверхностного трения f''_w в зависимости от координаты $\xi - \xi_0 [\equiv (x - x_0)/y_c]$ на теплоизолированной поверхности при пяти значениях отношения скоростей u_c/u_e и двух значениях δ/y_c .

Результаты расчета: — при $\delta/y_c = 0,95$; ---- при $\delta/y_c = 1,95$; u_c — максимальная скорость течения в щели.

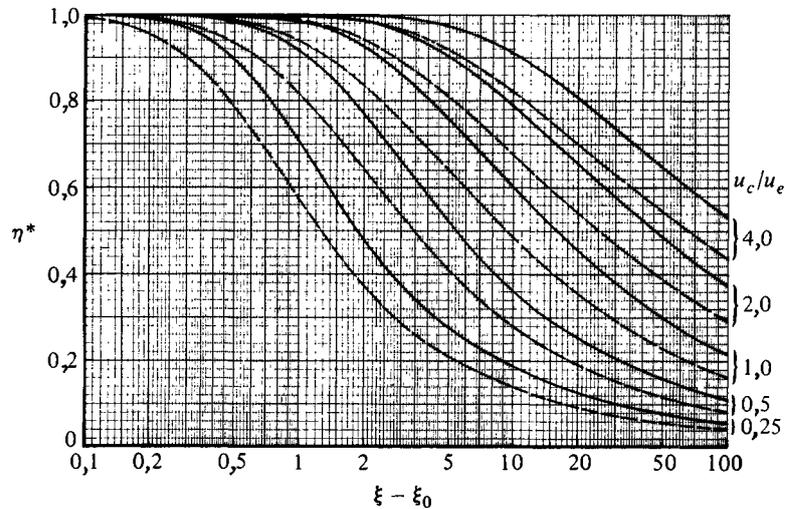


Рис. 4.22. Изменение эффективности охлаждения теплоизолированной стенки η^* в зависимости от координаты $\xi - \xi_0$ на теплоизолированной поверхности для пяти значений отношения скоростей u_c/u_e и двух значений δ/y_c .

Результаты расчета: — при $\delta/y_c = 0,95$; --- при $\delta/y_c = 1,95$.

ным условиям. Расчеты проводились численным методом с использованием программ, представленных в гл. 13 и 14.

На рис. 4.21 представлены зависимости безразмерного параметра поверхностного трения $f_w'' = \sqrt{R_L} \sqrt{\xi} c_f / 2$ от безразмерной координаты $\xi - \xi_0$ при пяти различных значениях отношения скоростей u_c/u_e и двух значениях δ/y_c . Здесь $R_L = u_e y_c / \nu$ — число Рейнольдса, $\xi - \xi_0$ — расстояние от выходного сечения щели, а ξ_0 — расстояние от эффективного начала пограничного слоя на верхней стенке щели до плоскости выходного сечения щели. При больших отношениях скоростей течения в щели и внешнего потока параметр поверхностного трения остается практически постоянным и не зависит от продольной координаты и отношения δ/y_c . При самом низком отношении скоростей $u_c/u_e = 0,25$ внешний поток оказывает влияние на течение в щели, начиная с величины $\xi - \xi_0$ порядка 0,5, с последующим довольно быстрым возрастанием параметра поверхностного трения на сравнительно коротком участке. Влияние δ/y_c носит аналогичный, довольно сложный характер, но оно играет второстепенную роль. Можно было ожидать, что на больших расстояниях от щели величина параметра поверхностного трения

будет приближаться к соответствующему значению для пограничного слоя на плоской пластине 0,332. Данные, представленные на рис. 4.21, показывают, что при малом отношении скоростей, скажем, $u_c/u_e = 0,25$ и значениях $\delta/y_c = 0,95$ и $1,95$ величина f_w'' при $\xi - \xi_0 = 10$ равна 0,30, т. е. близка к асимптотическому значению 0,332. При отношении скоростей $u_c/u_e = 1,0$ и $\delta/y_c = 0,95$ величина f_w'' в том же самом сечении равна 0,35. Это свидетельствует о том, что при малых отношениях скоростей асимптотическая величина поверхностного трения достигается быстрее, а отношение толщины пограничного слоя к высоте щели оказывает более слабое влияние.

На рис. 4.22 представлены результаты расчета эффективности завесного охлаждения теплоизолированной стенки η^* в зависимости от $\xi - \xi_0$ при пяти значениях u_c/u_e и двух значениях δ/y_c . Согласно приведенным результатам, например, при $\delta/y_c = 0,95$ и отношении скоростей 4 значение эффективности охлаждения, равное 1, сохраняется до сечения $\xi - \xi_0 = 3$, а при отношении скоростей 0,25 — всего лишь до сечения $\xi - \xi_0 = 0,2$. Как и следовало ожидать, возрастание отношения скоростей с соответствующим увеличением расхода впрыскиваемой жидкости приводит к повышению эффек-

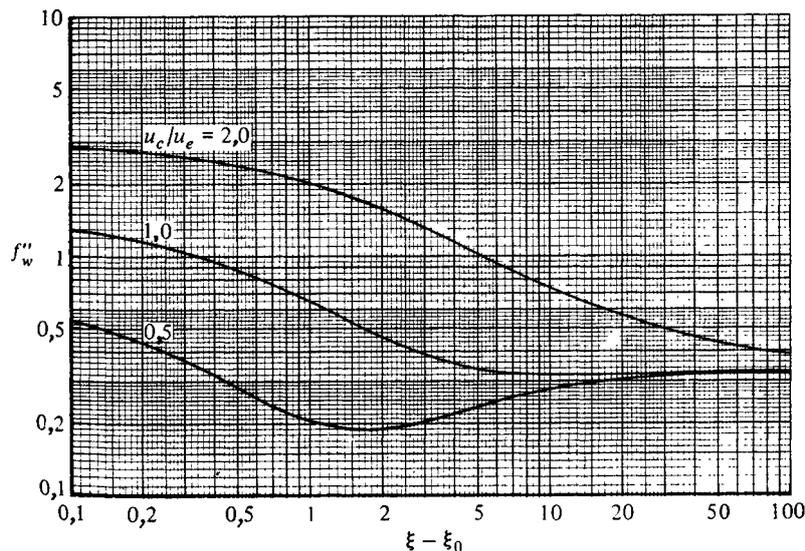


Рис. 4.23. Изменение безразмерного параметра поверхностного трения f_w'' в зависимости от координаты $\xi - \xi_0$ на изотермической поверхности при $\delta/y_c = 0,95$ и $Pr = 0,72$.

тивности охлаждения всей поверхности, за исключением окрестности выходного сечения щели, где жидкость внешнего потока не проникает к стенке. Чем выше отношение скоростей, тем длиннее участок, на котором эффективность охлаждения равна единице. В области за щелью толщина пограничного слоя внешнего потока сильнее влияет на эффективность охлаждения, чем на параметр поверхности трения, что отражает интенсификацию перемешивания жидкостей течения в щели и внешнего потока при увеличении толщины пограничного слоя. На практике возможны большие величины δ/y_c , что еще более снизит эффективность охлаждения.

Следует проявлять осторожность при использовании данных, представленных на рис. 4.21 и 4.22, и особенно при их сравнении с соответствующими результатами для турбулентного течения, приведенными на рис. 6.27 и 6.28. Данные, представленные на рис. 4.21 и 4.22 (а также на рис. 4.23 и 4.24) в безразмерной форме, не зависят от числа Рейнольдса и при выборе конкретной жидкости,

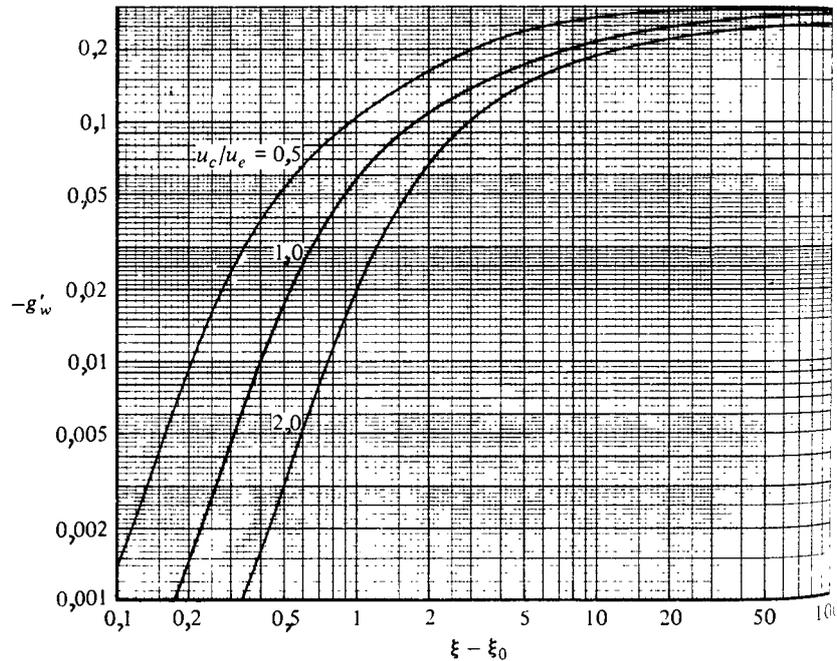


Рис. 4.24. Изменение безразмерного параметра плотности теплового потока g'_w в зависимости от координаты $\xi - \xi_0$ на изотермической поверхности при $\delta/y_c = 0,95$, $Pr = 0,72$.

геометрии и u_e может получиться величина δ , а, следовательно, и отношение δ/u_c , не соответствующие приведенным результатам. Можно ожидать, например, что зависимость η^* от δ/u_c будет нелинейной с существенным возрастанием η^* при стремлении δ/u_c к нулю. Задачи 4.33 и 4.34, для решения которых требуются данные, приведенные на рис. 4.21 и 4.24, помогут дать правильную интерпретацию этим данным.

На рис. 4.23 и 4.24 представлены расчетные результаты для изотермической плоской пластины. Расчеты были проведены при $Pr = 0,72$, $\delta/u_c = 0,95$ и трех значениях отношения скоростей с использованием тех же самых начальных профилей скорости и температуры, которые применялись в предыдущих расчетах. Основное различие между этими данными и теми, которые представлены на рис. 4.21 и 4.22, заключается в граничном условии для уравнения энергии: в то время как для теплоизолированной стенки использовалось условие $g'_w = 0$ [см. соотношения (4.128a)], для изотермической стенки использовалось условие $g_w = 0$. Отметим, что градиент безразмерной температуры стенки g'_w выражается соотношением

$$g'_w = \frac{\dot{q}_w \xi^{1/2}}{(T_c - T_e) R_L^{1/2}} \frac{L}{k}. \quad (4.130)$$

Задачи

- 4.1. Используя преобразование Фолкнера — Скэн, определенное соотношениями (4.19), показать, что уравнения движения и энергии (3.10b) и (3.11), а также граничные условия (4.2) можно выразить в форме соотношений (4.31) — (4.33). Предположить, что температура стенки задана, и использовать определение безразмерной температуры (4.24).
- 4.2. При выводе преобразования Фолкнера — Скэн в разд. 4.1 предполагалось, что массообмен на стенке отсутствует, т. е. нормальная составляющая скорости v_w равна нулю.
 - а. Применяя методику, описанную в разд. 4.1, найти вид функции $v_w(x)$, позволяющей получить автомодельное решение при наличии массообмена.
Указание. Ввести параметр v_w , определенный формулой

$$v_w = A^{a_5} \bar{v}_w,$$

и учесть, что

$$v_w = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

- б. Автомодельность достигается в том случае, если уравнение (4.31) и соответствующие граничные условия не зависят от x . Это означает, что при наличии массообмена функции $v_w(x)$ и $u_e(x)$ должны иметь такой вид, чтобы

безразмерная функция тока на стенке f_w была постоянной. Используя это соотношение, найти зависимость v_w от x с помощью соотношения (4.30а).

- в. Показать, что для ламинарного течения на плоской пластине при наличии массообмена должно выполняться условие

$$f_w = -2 \frac{v_w}{u_e} \sqrt{R_x}.$$

- 4.3. Уравнение, описывающее вертикальную составляющую скорости v при малых длинноволновых возмущениях равномерно-стратифицированного сдвигового течения (например, волн на подветренной стороне горной гряды), можно записать в безразмерной форме следующим образом:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - iy \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - N^2 v = 0,$$

где $i = \sqrt{-1}$, а N — частота Бранта Вайсала. Используя методику, изложенную в разд. 4.1, найти автомодельную форму этого уравнения.

Указание. Принять $t = A^{\alpha_1} \bar{t}$, $y = A^{\alpha_2} \bar{y}$.

- 4.4. В ряде случаев, чтобы привести уравнения пограничного слоя к более удобному для решения виду, применяется преобразование Мизеса. В этом преобразовании используются новые независимые переменные (x, ψ) , где ψ — функция тока

$$\psi = \int_0^y \rho u dy.$$

Показать, что после этого преобразования уравнения движения и энергии (3.10b) и (3.11), подчиняющиеся граничным условиям (4.2), можно записать в форме

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - u_e \frac{du_e}{dx} = \nu u \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right), \quad (\text{P4.1})$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial T}{\partial \psi} \right), \quad (\text{P4.2})$$

$$\psi = 0; \quad u = 0, \quad T = T_w, \quad (\text{P4.3a})$$

$$\psi \rightarrow \infty; \quad u \rightarrow u_e, \quad T \rightarrow T_e. \quad (\text{P4.3b})$$

Отметим, что, если u определяется на основании соотношений (P4.1) и (P4.3), то v находится из уравнения неразрывности (3.5). Кроме того, укажем, что после этого преобразования уравнения движения и энергии принимают форму уравнения нелинейной неустановившейся теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(t, x) \frac{\partial T}{\partial x} \right].$$

Наиболее полезные приложения этого преобразования связаны с решением задач теплообмена в ламинарном течении.

- 4.5. а. Показать, что если проинтегрировать уравнение (4.31) поперек пограничного слоя, использовать определения безразмерных толщины вытеснения и потерь импульса (выражения (4.36) и (4.37) соответственно) и учесть, что на границе

пограничного слоя $f'' = 0$, поскольку там $du/dy = 0$, то получится следующее уравнение, справедливое при отсутствии массообмена:

$$-f_w'' + \frac{m+1}{2} \int_0^{\eta_e} f f'' d\eta + m(\delta_1^* + \theta_1) = 0. \quad (\text{P4.4})$$

6. Показать, что уравнение (P4.4) можно записать в виде

$$-f_w'' + m\delta_1^* + \left(\frac{3m+1}{2}\right)\theta_1 = 0, \quad (\text{P4.5})$$

если учесть, что интеграл, входящий в уравнение (P4.4), представляет собой безразмерную толщину потери импульса θ_1 , определенную выражением (4.37). Отметим, что (P4.5) является соотношением, связывающим три параметра пограничного слоя f_w'' , θ_1 и δ_1^* при постоянном значении m . Оно позволяет точно определить θ_1 , не проводя вычислений согласно соотношению (4.37).

4.6. В случае постоянной температуры стенки для автомодельного теплового пограничного слоя можно получить полезные интегральные соотношения, как и для автомодельного динамического пограничного слоя. Полагая $\eta = 0$ и считая, что массообмен на стенке отсутствует, показать, что, интегрируя уравнение (4.32) по η от $\eta = 0$ до $\eta = \eta_e$ при $g'(\eta_e) = 0$, $g(\eta_e) = 1$, можно получить уравнение

$$-g_w' + \text{Pr} \frac{m+1}{2} \left[f(\eta_e) - \int_0^{\eta_e} f' g d\eta \right] = 0. \quad (\text{P4.6})$$

Показать, что уравнение (P4.6) можно записать в виде

$$-g_w' + \text{Pr} \frac{m+1}{2} \theta_{T_1} = 0, \quad (\text{P4.7})$$

где

$$\theta_{T_1} = \int_0^{\eta_e} f'(1-g) d\eta.$$

Для автомодельного теплового пограничного слоя при постоянной температуре стенки с помощью соотношения (P4.6) можно вычислить θ_T , не проводя численного решения уравнения (3.80).

4.7. Показать, что для автомодельного течения в динамическом и тепловом пограничных слоях на пористой стенке с неравномерной температурой уравнения (4.31) и (4.32) можно записать в виде

$$-f_w'' + \frac{m+1}{2} f_w + m\delta_1^* + \frac{3m+1}{2} \theta_1 = 0, \quad (\text{P4.8})$$

$$-g_w' + \frac{1}{2} \text{Pr}(m+1) f_w + \text{Pr} \left(\frac{m+1}{2} + n \right) \theta_{T_1} = 0. \quad (\text{P4.9})$$

4.8. Воздух, имеющий температуру 293 К и давление 0,1 МПа, обтекает со скоростью 10 м/с плоскую пластину длиной 1,5 м, температура которой постоянна и равна 393 К. Определяя теплофизические свойства воздуха при средней температуре слоя T_f ,

- а) вычислить местное число Нуссельта, коэффициент поверхностного трения и число Стантона на конце пластины;
 б) рассчитать суммарный тепловой поток от пластины, если ее ширина 0,5 м.
- 4.9. Глицерин, имеющий температуру 313 К, обтекает со скоростью 3 м/с плоскую пластину длиной 4 м, поверхность которой имеет постоянную температуру 293 К. Рассчитать тепловой поток в пластину на единицу ее ширины.
- 4.10. Воздух со стандартными температурой и давлением обтекает в поперечном направлении равномерно нагреваемый круглый цилиндр диаметром 2 см со скоростью 1 м/с.
- а. Показать, что число Нуссельта, рассчитанное по радиусу цилиндра, равно

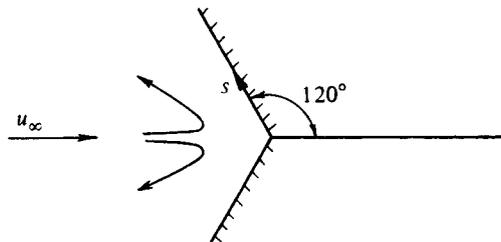
$$Nu = \sqrt{2} g'_0 \sqrt{R},$$

где

$$R = \frac{u_\infty r_0}{\nu}.$$

- б. Принимая $Pr = 0,72$, $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, рассчитать толщину вытеснения δ^* и толщину потери энthalпии θ_T на критической линии цилиндра.
- 4.11. Рассчитать безразмерные значения толщины вытеснения, толщины потери импульса и коэффициента поверхностного трения при обтекании полубесконечного круглого конуса с полууглом при вершине 120° . Течение происходит «под» поверхностью конуса, как показано на рисунке. Скорость внешнего потока изменяется по закону

$$u_e \sim s^{2,2}.$$



К задаче 4.11. Схема течения.

- 4.12. Вывести уравнение (4.53) (см. приложение С).
- 4.13. Если в окрестности, скажем, точки $x = x_0$ происходит скачок температуры стенки, так что производная $\partial T/\partial x$ имеет разрыв, можно получить аналитическое решение уравнения энергии в окрестности точки x_0 , разлагая в ряды u , v и T . Предположим, что поле скоростей известно и нам нужно найти решение уравнения энергии, причем g определяется выражением (4.24). Уравнение энергии

$$u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \quad (P4.10)$$

подчиняется граничным условиям

$$y = 0, \quad g = 0 \text{ при } x < x_0, \quad g = 1 \text{ при } x > x_0, \quad (\text{P4.11a})$$

$$y = \delta_t, \quad g = 0 \text{ при } x > x_0. \quad (\text{P4.11b})$$

Предполагая, что при $x > x_0$ в окрестности точки разрыва величины u и v незначительно изменяются в направлении x , разложим их в ряды

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k y^k, \quad v = \sum_{k=2}^{\infty} \mu_k y^k. \quad (\text{P4.12})$$

Разложение в ряд безразмерной величины g имеет вид

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n/3} G_n(\zeta), \quad (\text{P4.13})$$

где

$$z = x - x_0, \quad \zeta = y/z^{1/3}. \quad (\text{P4.14})$$

а. Показать, что при $n = 0$ уравнение (P4.10) можно записать следующим образом:

$$G_0'' + \frac{1}{3} \lambda_1 \frac{\text{Pr}}{\nu} \zeta^2 G_0' = 0, \quad (\text{P4.15})$$

где $\lambda_1 = (\partial u / \partial y)_w$, а штрихом обозначено дифференцирование по ζ .

б. Показать, что решение уравнения (P4.15) имеет вид

$$G_0(\zeta) = 1 + A \int_0^\zeta \exp\left(-\frac{1}{9} \lambda_1 \frac{\text{Pr}}{\nu} \zeta^3\right) d\zeta, \quad (\text{P4.16})$$

где

$$A = -\frac{3}{\Gamma(1/3)} \left(\frac{\text{Pr} \lambda_1}{9\nu}\right)^{1/3}, \quad (\text{P4.17})$$

а значение гамма-функции (приложение С) $\Gamma(1/3)$ равно приблизительно 2,679.

в. Показать, что для ламинарного течения на плоской пластине

$$\lambda_1 = 0,332 \frac{u_e}{x_0} \sqrt{R_{x_0}}, \quad (\text{P4.18})$$

где

$$R_{x_0} = \frac{u_e x_0}{\nu}.$$

г. Показать, что

$$\text{Nu}_{x_0} = CR_{x_0}^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \frac{1}{[(x/x_0) - 1]^{1/3}}, \quad (\text{P4.19})$$

где

$$\text{Nu}_{x_0} = \frac{\dot{q}_w}{(T_w - T_e)} \frac{x_0}{k},$$

$$C = \frac{3}{\Gamma(1/3)} \left(\frac{0,332}{9} \right)^{1/3}.$$

4.14. Получить решение (4.66).

Указание. Принять $s^3 = y$.4.15. Рассмотреть ламинарное течение жидкости на плоской пластине, которая имеет ненагреваемый участок $0 \leq x \leq x_0$, а при $x > x_0$ на поверхности пластины создается постоянная плотность теплового потока. Используя соотношение (3.77) и аппроксимируя профиль скорости выражением (4.59), а профиль температуры выражением

$$\frac{T - T_e}{T_w - T_e} = 1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_t} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3,$$

показать

$$\text{a) } \text{Nu}_x = \frac{\dot{q}_w x}{(T_w - T_e) k} = 0,417 R_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \left(1 - \frac{x_0}{x} \right)^{-1/3}, \quad (\text{P4.20})$$

$$\text{б) } T_w - T_e = 2,40 \dot{q}_w \frac{x}{k} R_x^{-1/2} \text{Pr}^{-1/3} \left(1 - \frac{x_0}{x} \right)^{1/3}. \quad (\text{P4.21})$$

Указание. Учсть, что после интегрирования соотношения (3.77) получается

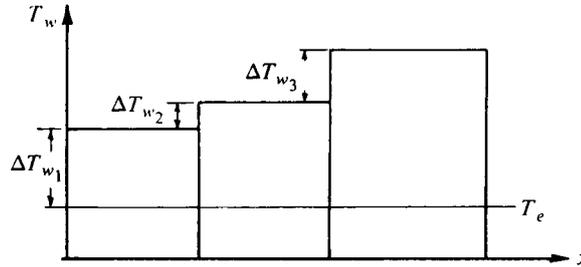
$$u_e (T_w - T_e) \Theta_T = \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p} (x - x_0).$$

4.16. Воздух, имеющий температуру 293 К и давление 0,1 МПа, обтекает со скоростью 10 м/с плоскую пластину длиной 1,5 м. Предполагая, что нагрев начинается на расстоянии 1 м от передней кромки пластины и что ширина пластины равна 0,4 м, рассчитать мощность, необходимую для поддержания температуры поверхности, равной 353 К.

4.17. Если температура поверхности плоской пластины является произвольной функцией x , уравнение энергии при заданных значениях безразмерной температуры g_w можно легко и с достаточной точностью решить, используя программу численного расчета на языке Фортран, приведенную в разд. 13.6. Кроме того, можно получить приближенное решение для течения с постоянными свойствами на плоской пластине с неравномерной температурой стенки, учитывая тот факт, что уравнение энергии для течения с постоянными свойствами является линейным и можно применить закон суперпозиции для линейных дифференциальных уравнений. Представим распределение температуры стенки в виде суммы ступенчатых функций ΔT_{wi} , как показано на рисунке, и вычислим суммарную плотность теплового потока по формуле

$$\dot{q}_w = \sum_i \hat{h}_i \Delta T_{wi}. \quad (\text{P4.22})$$

Здесь \hat{h}_i — коэффициент теплоотдачи в точке x_i при ступенчатом распределении температуры стенки (выражение (4.70)), который можно выразить следующим



К задаче 4.17. Ступенчатое изменение температуры стенки.

шим образом:

$$\hat{h}_t = \frac{0,332 k Pr^{1/3} \sqrt{R_x}}{x [1 - (x_1/x)^{3/4}]^{1/3}} \quad x > x_1. \quad (P4.23)$$

Используя это свойство уравнения энергии, решить задачу 4.16. Предположить, что распределение температуры поверхности пластины имеет следующий вид: 323 К на участке 0—0,5 м, 333 К на участке 0,5—1 м, 353 К на участке 1—1,5 м. Найти местную плотность теплового потока в точке $x = 1,5$ м. Отметим, что в этой задаче $x_1 = 0$, $x_2 = 0,5$ м, $x_3 = 1,0$ м, а первая ступень температуры равна $T_{w1} - T_e$.

- 4.18. Показать, что формула Твейтса в наиболее общем виде (4.74) получается в том случае, если форма профиля скорости ламинарного пограничного слоя однозначно определяется параметром градиента давления $(\theta^2/\nu)(du_e/dx)$.
Указание. Это означает, что градиент скорости на стенке, нормализованный соответствующим образом, является функцией параметра градиента давления.
- 4.19. Соотношение (4.86) получено в предположении о справедливости уравнения (4.80). При числе Прандтля, равном 10, найти конкретный вид уравнения

$$\frac{u_e}{\nu} \frac{d\delta_c^2}{dx} = F\left(\frac{\delta_c^2}{\nu} \frac{du_e}{dx}\right)$$

для обтекания клина с $u_e = Cx^m$, т. е. получить выражение для каждого члена этого уравнения и показать, как можно построить график, описывающий соотношение между ними.

Указание. Для обтекания клина найти $u_e/\nu(d\delta_c^2/dx)$ и $\delta_c^2/\nu(du_e/dx)$ как функции m и $g'_w(\equiv Nu_x/\sqrt{R_x})$. Учтеь, что $\delta_c/x \equiv Nu_x$.

- 4.20. Теплоотдачу изотермической плоской пластины можно найти с помощью приближенной методики, предложенной Левеком. Эта методика основана на решении уравнения энергии (3.11), которое в пристенной области имеет следующую приближенную форму:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (P4.24)$$

Кроме того, предполагается, что вблизи стенки u изменяется линейно по y , т. е.

$$u = \lambda y. \quad (\text{P4.25})$$

Уравнение (P4.24) при величине u , определенной выражением (P4.25), можно преобразовать в обыкновенное дифференциальное уравнение, введя новую переменную ξ

$$\xi = y \left(\frac{\lambda \text{Pr}}{9\nu x} \right)^{1/3}. \quad (\text{P4.26})$$

В итоге получается уравнение

$$\frac{d^2 T}{d\xi^2} + 3\xi^2 \frac{dT}{d\xi} = 0. \quad (\text{P4.27})$$

При граничных условиях

$$\xi = 0, \quad T = T_w; \quad \xi \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow T_e \quad (\text{P4.28})$$

уравнение (P4.27) имеет следующее решение:

$$\frac{T - T_w}{T_e - T_w} = \frac{1}{0,893} \int_0^\xi e^{-\xi^3} d\xi. \quad (\text{P4.29})$$

а. Показать, что местное число Нуссельта Nu_x , определенное формулой (4.51a), выражается на основании решения Левека следующим образом:

$$\text{Nu}_x = \frac{x}{0,893} \left(\frac{\lambda \text{Pr}}{9\nu x} \right)^{1/3}. \quad (\text{P4.30})$$

б. Рассчитывая λ на основании решения Блазиуса, получить формулу для Nu_x и сравнить ее с точными решениями при малых, умеренных и высоких числах Прандтля. Обсудить полученные результаты.

- 4.21. Для двумерного течения в окрестности критической линии цилиндра ($u_e = Cx$) рассчитать δ^* , θ и τ_w методом Твейтса и \dot{q}_w — методом Смита — Сполдинга. Сравнить полученные результаты с точными решениями.
- 4.22. Решить задачу 4.21 для случая плоской пластины.
- 4.23. Решить задачу 4.21 для осесимметричного течения в окрестности критической точки ($u_e = Cx^{1/3}$).
- 4.24. Применяя метод Твейтса, найти зависимость θ/L , δ^*/L и c_f от x/L для течения с линейным изменением скорости внешнего потока

$$\frac{u_e}{u_\infty} = 1 - a \frac{x}{L} \quad (\text{P4.31})$$

при $a = 1/8$ и $R_L = 10^6$. Найти положение точки отрыва потока. Отметим, что это течение называется течением Хоурта.

Указание. Ниже представлена программа, позволяющая провести расчет по формуле (4.76) с интегрированием методом трапеций и вычислить $R_{\rho c_f}/2$ по формуле (4.78b). Отметим, что для удобства выбран постоянный шаг интегрирования $\Delta x = 0,02$.

```

REAL LAMDA(51)
DIMENSION X(51), UE(51), DUEDX(51), THETA(51), FX(51), EL(51)
C
NP      = 51
RL      = 1000000.0
DO 10 I= 1, NP
X(I)    = 0.02*FLOAT(I-1)
UE(I)   = 1.0-X(I)/8.0
DUEDX(I)= -0.125
10 CONTINUE
C
SUM      = 0.0
FX(1)   = UE(1)**5
DO 20 I= 2, NP
C       = 0.45/UE(I)**6
FX(I)   = UE(I)**5
SUM     = SUM + 0.5*(FX(I)+FX(I-1))*(X(I)-X(I-1))
THETA(I)= SORT(C*SUM/RL)
LAMDA(I)= THETA(I)**2*DUEDX(I)*RL
IF (LAMDA(I) .LT. 0.0) GO TO 15
EL(I)   = 0.225 + LAMDA(I)*(1.61+LAMDA(I))*(-3.75+5.24*LAMDA(I))
GO TO 20
15 EL(I) = 0.225 + 1.472*LAMDA(I)+0.0147*LAMDA(I)/(0.107*LAMDA(I))
20 CONTINUE
C
WRITE (6,100) [I, X(I), UE(I), THETA(I), LAMDA(I), EL(I), I=2, NP]
100 FORMAT (1H0, 3X, 1HJ, 8X, 1HX, 14X, 2HUE, 11X, 5HTHETA, 10X, 5HLAMDA, 12X, 1HL
1      (1H , 2X, I2, 5E15 6) )
C
STOP
END

```

4.25. Для плоских течений за точку отрыва принимается точка, в которой напряжение поверхностного трения τ_w равно нулю, т. е.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = 0.$$

Можно приближенно определить положение точки отрыва с помощью простого эмпирического метода Стрэтфорда [9], не решая уравнений ламинарного пограничного слоя. При заданном распределении давления, например, в виде зависимости $c_p(x)$, можно найти распределение параметра

$$c_p^{1/2} \times \left(\frac{dc_p}{dx}\right) \tag{P4.32}$$

вдоль тела. Считается, что отрыв происходит в той точке, где этот параметр становится равным 0,102. Параметр c_p определяется выражением

$$c_p = 1 - \left(\frac{u_c}{u_0}\right)^2, \tag{P4.33}$$

где u_0 — скорость в начале участка положительного градиента давления. Этот метод можно также использовать для расчета распределения напряжения по-

верхностного трения τ_w в двумерном ламинарном течении несжимаемой жидкости по формуле

$$c_p \left(x \frac{dc_p}{dx} \right)^2 = 0,0104 \left(1 - \frac{\tau_w}{\tau_B} \right)^3 \left(1 + 2,02 \frac{\tau_w}{\tau_B} \right), \quad (\text{P4.34})$$

где τ_B — напряжение поверхностного трения для течения Блазиуса ($m = 0$).

Рассчитать с помощью этого метода распределение местного коэффициента поверхностного трения и положение точки отрыва потока для течения Хоуарта (P4.31). Сравнить полученные результаты с данными Твейтса, принимая в точке отрыва $\lambda = -0,09$.

- 4.26. Рассчитать распределение числа Стантона для течения с распределением скорости внешнего потока (P4.31) при $\text{Pr} = 1$ и 10 и построить график изменения $\text{St}/(c_f/2)$.

Указание. Воспользоваться программой численного расчета к задаче 4.28.

- 4.27. Уравнение эллипса с центром в точке $(a, 0)$ имеет вид

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (\text{P4.35})$$

Согласно теории невязкого течения, распределение скорости внешнего потока вдоль эллипса, обтекаемого под нулевым углом атаки, описывается соотношением

$$u_e(s) = u_\infty (1 + t) \cos \beta, \quad (\text{P4.36})$$

где s — координата вдоль поверхности эллипса, $t (= b/a)$ — относительная толщина эллипса, а β — угол между касательной к эллипсу и положительной осью x , т. е.

$$\beta = \arctg \frac{dy}{dx}. \quad (\text{P4.37})$$

Показать, что для круглого цилиндра ($t = 1$) соотношение (P4.36) сводится к выражению (4.87).

- 4.28. Воздух, имеющий температуру 288 K и давление $0,1 \text{ МПа}$, обтекает со скоростью 10 м/с под нулевым углом атаки равномерно нагреваемый профиль, имеющий в сечении форму эллипса с относительным удлинением $1:4$, при температуре стенки $T_w = 303 \text{ K}$. Предполагая, что течение остается ламинарным до точки отрыва, рассчитать при $\text{Pr} = 0,7$, $a = 1$:

- а) распределение местного коэффициента трения;
б) положение точки отрыва;
в) плотность теплового потока в стенку, Вт/м^2 .

Указание. Ниже приведена программа численного расчета по формуле (4.86) с интегрированием методом трапеций.

```

DIMENSION X (101), Y (101), S (101), UE (101), ST (101)
C
C1      = 0.418
C2      = 0.435
C3      = 1.870
T       = 0.25
NP      = 100
RL      = 10000.0
S(1)   = 0.0
UE(1)  = 0.0

```

```

ST(1) = 0.0
DO 10 I=1,NP
X(I) = 0.02*FLOAT(I-1)
Y(I) = T*SQRT(1.0 - (X(I)-1.0)**2)
10 CONTINUE
C
DO 20 I=2,NP
S(I) = S(I-1)+SQRT((X(I)-X(I-1))**2+(Y(I)-Y(I-1))**2)
BETA = ATAN((1.0 - X(I))/Y(I)*T*T)
UE(I) = (1.0 + T)*COS(BETA)
20 CONTINUE
C
SUM = 0.0
FX1 = UE(1)**C3
DO 30 I=2,NP
C = C1*UE(I)**C2
FX2 = UE(I)**C3
SUM = SUM + 0.5 * (FX1+FX2) * (S(I) - S(I-1))
ST(I) = C / SQRT(SUM*RL)
FX1 = FX2
30 CONTINUE
C
WRITE(6,100) (I, X(I), Y(I), UE(I), ST(I), I=1, NP)
100 FORMAT(1H0, 4X, 1HI, 7X, 1HX, 13X, 1HY, 13X, 2HUE, 12X, 2HST/(1H , 2X, I3, 1X,
1 4E14.6))
C
STOP
END

```

- 4.29. Повторить решение задачи 4.28а, б, применяя метод Стрэтфорда.
- 4.30. Воздух, имеющий температуру 288 К и давление 0,1 МПа, обтекает со скоростью 20 м/с равномерно нагреваемый профиль NACA 0012 с температурой стенки 298 К. Предполагая, что течение остается ламинарным до точки отрыва, а $c = 1$ м, рассчитать
- распределение местного коэффициента трения;
 - положение точки отрыва;
 - распределение плотности теплового потока в стенку, Вт/м².

Координаты профиля и распределение скорости внешнего (невязкого) потока

$\frac{x}{c} \times 10^2$	$\frac{y}{c} \times 10^2$	$\frac{u_e}{u_\infty}$	$\frac{x}{c} \times 10^2$	$\frac{y}{c} \times 10^2$	$\frac{u_e}{u_\infty}$
0	0	0	25	5,941	1,174
1,25	1,894	1,005	40	5,803	1,135
2,5	2,614	1,114	50	5,294	1,108
5,0	3,555	1,174	60	4,563	1,080
7,5	4,200	1,184	70	3,664	1,053
10	4,683	1,188	80	2,623	1,022
15	5,345	1,188	90	1,448	0,978
20	5,737	1,183	95	0,807	0,952
			100	0,126	0,915

- 4.31. Пролонговатый сфероид представляет собой эллипсоид вращения, длина которого по оси симметрии больше диаметра сечения миделя. Уравнение пролонговатого сфероида с центром в точке $(a, 0)$ можно записать аналогично уравне-

нию эллипса (Р4.35) в виде

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{r_0^2}{b^2} = 1. \quad (\text{Р4.38})$$

Согласно теории невязкого течения, распределение скорости внешнего потока вдоль образующей продолговатого сфероида при нулевом угле атаки выражается соотношением

$$u_e(s) = u_\infty A \cos \beta, \quad (\text{Р4.39})$$

где s — координата вдоль поверхности сфероида, а β определяется формулой (Р4.37). Параметр A , зависящий от относительной толщины $t (= b/a)$ эллиптического профиля, определяется выражением

$$A = \frac{(1-t^2)^{3/2}}{\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2}t^2 \ln \left[\frac{(1+\sqrt{1-t^2})}{(1-\sqrt{1-t^2})} \right]}. \quad (\text{Р4.40})$$

Показать, что для сферы ($t = 1$) соотношение (Р4.39) сводится к выражению (4.76).

- 4.32. Вода, имеющая температуру 283 К и давление 0,1 МПа, обтекает со скоростью 5 м/с равномерно нагреваемый продолговатый сфероид с температурой стенки 298 К. Предполагая, что течение ламинарное и $a = 0,1$ м, рассчитать
- распределение местного коэффициента поверхностного трения;
 - положение точки отрыва;
 - распределение плотности теплового потока в стенку, Вт/м².
- 4.33. При использовании охлаждения завесой в низкоскоростном потоке, когда течение можно считать ламинарным, а скорость внешнего потока составляет 1 м/с:
- найти расстояние от щели до точки, в которой температура повышается до величины, соответствующей

$$T_w - T_e = 0,5(T_c - T_e)$$

- при отношении скоростей 1,0 и $\delta/y_c = 1,95$;
- рассчитать величину $c_f/2$, соответствующую $y_c = 3$ мм;
 - с помощью соотношений (с. 108)

$$\frac{\delta^*}{x} = 1,72 R_x^{-0,5} \quad \text{и} \quad \frac{\delta}{\delta^*} = 3,08$$

- найти число Рейнольдса, рассчитанное по длине пограничного слоя на верхней стенке щели, и оценить, достижимо ли оно на практике;
- какие возникнут трудности, если u_e возрастет до 100 м/с, в то время как остальные параметры останутся неизменными?
- 4.34. Рассмотреть течение, описанное в задаче 4.33. с заменой теплоизолированной стенки поверхностью с таким распределением плотности теплового потока, что ее температура становится постоянной, а величина δ/y_c принимает значение 0,95. Если температура внешнего потока 350 К, а температура стенки 300 К, рассчитать местную плотность теплового потока в точке $(x - x_0)/y_c = 16$ и определить с соответствующим обоснованием, в какую сторону изменится найденная величина, если отношение δ/y_c увеличится до 1,95

ЛИТЕРАТУРА

1. Hansen A.G., Similarity Analysis of Boundary-Value Problems in Engineering, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.
2. Na T.Y., Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems, Academic, N.Y., 1979.
3. Eckert E.R.G., Gross J.F., Introduction to Heat and Mass Transfer, McGraw, N.Y., 1968. [Имеется перевод первого издания: Эккерт Э.Р. Введение в теорию тепло- и массообмена. — М.—Л.: Госэнергоиздат, 1957.]
4. Thwaites B. (ed.), Incompressible Aerodynamics, Clarendon, Oxford, 1960.
5. Kays W.M., Crawford M.E., Convective Heat and Mass Transfer, McGraw, N.Y., 1980. Также Smith A.G., Spalding D.B., Heat transfer in a laminar boundary layer with constant fluid properties and constant wall temperature, *J. Roy. Aero. Soc.*, **62**, 60 (1958).
6. Cebeci T. (ed.), Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows II, Springer-Verlag, N.Y., 1984.
7. Hess J.L., Faulkner S.M., Accurate values of the exponent governing potential flow about semi-infinite cones, *AIAA J.*, **3**, 767 (1965). [Имеется перевод: Гесс, Фолкнер. Точные значения показателя степени в законе, определяющем потенциальное поле течения около полубесконечных конусов. — Ракетная техника и космонавтика, 1965, № 4, с. 239.]
8. Goldstein R.J., Film cooling, in *Advances in Heat Transfer*, **7**, Academic, N.Y., 1971, p. 321.
9. Rosenhead L. (ed.), *Laminar Boundary Layers*, Oxford University Press, London, 1963.

При рассмотрении течения в канале (например, рис. 1.2а) говорят, что поле скоростей становится *полностью развитым*, если u/u_0 зависит только от y и не зависит от x . В этом случае из уравнения неразрывности следует, что нормальная составляющая скорости v равна нулю во всей области течения и можно без особого труда найти точное решение уравнения движения для плоского или осесимметричного несопряженного ламинарного течения. Очевидно, что это наиболее простой случай автомодельности профиля, когда масштабный коэффициент координаты y не зависит от x . Очевидно также, что эта особенность присуща лишь течениям в каналах постоянного поперечного сечения, в частности каналах круглого сечения (трубах) и прямоугольного сечения, когда ширина канала настолько больше его высоты, что на некотором расстоянии от боковых стенок течение можно считать достаточно близким к плоскому.

Говорят, что *тепловой* пограничный слой является *полностью развитым*, если профиль безразмерной температуры G , определяемой выражением

$$G = \frac{T_w - T}{T_w - T_m} \quad (5.1)$$

зависит только от y и не зависит от x , т. е.

$$\frac{dG}{dx} = 0. \quad (5.2)$$

Отметим, что сама температура в общем продолжает изменяться по x , поскольку в общем случае тепловой поток к стенкам канала не равен нулю. Полностью развитое поле температур достигается только в случае полностью развитого поля скоростей. В сопряженных течениях, когда изменения температуры достаточно велики и влияют на величину плотности, полная автомодельность невозможна, как это будет показано в гл. 12.

В настоящей главе будут рассмотрены три типа граничных условий на стенке для теплообмена при течении в канале. Разд. 5.1

посвящен случаю течения в канале круглого или некруглого постоянного сечения, когда *оба* поля — и скоростей, и температур — полностью развиты. В разд. 5.2 анализируется случай, когда канал имеет ненагреваемый входной участок, за которым следует нагреваемый участок. Предполагается, что длина ненагреваемого начального участка такова, что поле скоростей на входе в нагреваемый участок становится полностью развитым. В этом случае будут рассмотрены решения уравнения энергии (энтальпии) при $v = 0$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{1}{r\kappa} \frac{\partial}{\partial y} \left(r\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (5.3)$$

в то время как поле температур еще развивается. В разд. 5.3 рассматривается случай, когда канал постоянного сечения нагревается по всей длине, так что тепловой пограничный слой начинается во входном сечении канала и поля скоростей и температур развиваются одновременно.

При расчетах теплообмена для течений в каналах часто используется перепад температур, представляющий собой разность между средней температурой жидкости и температурой стенки канала. Это означает, что средняя температура является опорной температурой, каковой была температура набегающего потока T_e в задачах внешнего обтекания тел. Эта средняя температура, которую иногда называют *средней температурой перемешанной жидкости*, или *среднемассовой температурой*, определяется соотношением

$$T_m = \frac{\int \rho u T dA}{A \rho_m u_m}, \quad (5.4)$$

где dA — элемент площади поперечного сечения, а $A \rho_m u_m$ — массовый расход, который, разумеется, не зависит от x даже в случае переменной площади сечения A . Произведение $\rho_m u_m$ выражает среднюю плотность потока массы, а средняя скорость u_m (равная скорости u_0 равномерного течения во входном сечении канала) определяется выражением

$$u_m = \frac{\int u dA}{A}. \quad (5.5)$$

В настоящем анализе величина ρ считается постоянной и выпадает из соотношения (5.4). Величину T_m действительно можно использовать в качестве среднего значения при анализе одномерного течения, так как $c_p \int \rho u T dA$ представляет собой поток энтальпии в направлении течения.

5.1. Полностью развитое течение в канале

Каналы постоянного сечения

В случае полностью развитого профиля скорости величины u и du/dx равны нулю и уравнение движения для плоского или осесимметричного течения в канале постоянного сечения можно записать в виде

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{r^K} \frac{d}{dy} \left(r^K \frac{du}{dy} \right). \quad (5.6)$$

Поскольку градиент давления не зависит от y , это уравнение можно дважды проинтегрировать по y и получить в итоге искомый профиль скорости. Для круглой трубы радиусом r_0 , координата y которой измеряется внутрь по радиусу от стенки трубы, имеем $r = r_0 - y$ и $dr = -dy$, а поскольку $K = 1$, уравнение (5.6) можно привести к виду

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right). \quad (5.7)$$

Применяя граничные условия

$$x = x_i, \quad p = p_i, \quad x = x_0, \quad p = p_0, \quad (5.8a)$$

$$r = r_0, \quad u = 0, \quad r = 0, \quad \frac{du}{dr} = 0, \quad (5.8b)$$

получаем профиль скорости для осесимметричного течения Пуазейля

$$u = \frac{(p_i - p_0)r_0^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right], \quad (5.9)$$

где $L = x_0 - x_i$, так что $(p_i - p_0)/L = -dp/dx$. Из выражения (5.9) следует, что u является параболической функцией r , равной нулю на стенке и достигающей максимума на оси трубы. При решении задачи 5.1 более подробно рассматриваются особенности этого параболического профиля, например среднемассовая скорость u_m , определенная соотношением (5.4), в точности равна половине максимальной скорости. Отметим только, что, если определить коэффициент трения f , связывающий падение давления, диаметр $d \equiv 2r_0$ и характерный скоростной напор $\rho u_m^2/2$, как

$$f = \frac{-d}{\frac{1}{2}\rho u_m^2} \left(\frac{dp}{dx} \right) \equiv \frac{-2r_0}{\frac{1}{2}\rho u_m^2} \left(\frac{dp}{dx} \right) = \frac{\tau_w}{\frac{1}{8}\rho u_m^2}, \quad (5.10)$$

то, применяя параболическое решение, получаем

$$f = \frac{64}{R_d}, \quad (5.11)$$

где R_d определяется формулой

$$R_d = \frac{u_m d}{\nu}. \quad (5.12)$$

Если поле скоростей полностью развито, то составляющая скорости u , входящая в уравнение энергии (5.3), определяется просто выражением (5.9), а составляющая v равна нулю. Если поле температур также полностью развито в соответствии с соотношениями (5.1) и (5.2), то уравнение энергии (5.3) становится еще проще. Дифференцируя выражение (5.1) по x , прибавляя и вычитая dT_m/dx и применяя условие (5.2), получаем

$$\frac{\partial(T - T_m)}{\partial x} = (1 - G) \frac{d}{dx} (T_w - T_m), \quad (5.13)$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (1 - G) \frac{dT_w}{dx} + G \frac{dT_m}{dx}. \quad (5.14)$$

Это выражение можно подставить в левую часть уравнения (5.3), и если можно определить dT_w/dx и dT_m/dx на основании граничных условий, то полученное выражение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение. Это уравнение довольно легко решить, если заметить, что перепад температуры $T_w - T_m$ связан с плотностью теплового потока в стенку \dot{q}_w соотношением

$$\dot{q}_w = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = k (T_w - T_m) \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)_w. \quad (5.15)$$

Рассмотрим канал с *равномерно нагреваемой стенкой* ($\dot{q}_w = \text{const}$), который используется в ряде практических приложений типа топливных элементов ядерного реактора, омических нагревателей и т. п. Поскольку предполагается, что профиль температуры полностью развит, G [а следовательно, и $(\partial G / \partial y)_w$] не зависит от x , и из выражения (5.15) следует

$$T_w - T_m = \text{const},$$

откуда

$$\frac{dT_w}{dx} = \frac{dT_m}{dx}. \quad (5.16)$$

Подставив (5.16) в (5.14) с использованием равенства

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_w}{dx} = \frac{dT_m}{dx}$$

и подставив затем найденное соотношение в уравнение (5.3), получаем

$$u \frac{dT_m}{dx} = \frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{1}{r^\kappa} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (5.17)$$

Для круглой трубы, повторяя рассуждения, которые привели к уравнению (5.7), можно записать уравнение (5.17) в форме

$$u \frac{dT_m}{dx} = \frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (5.18)$$

причем граничные условия имеют вид

$$r = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0; \quad r = r_0, \quad T = T_w, \quad (5.19)$$

а величина u , определяемая соотношением (5.9), выражается формулой

$$u = 2u_m \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]. \quad (5.20)$$

Можно дважды проинтегрировать уравнение (5.18) по r и найти две постоянные интегрирования на основании граничных условий (5.19). В итоге получаем профиль температуры

$$T = T_w - \frac{1}{2} \frac{\text{Pr}}{\nu} u_m r_0^2 \frac{dT_m}{dx} \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{r_0} \right)^4 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]. \quad (5.21)$$

Чтобы найти среднемассовую температуру, подставим выражения (5.20) и (5.21) в соотношение (5.4) и получим

$$T_w - T_m = \frac{11}{48} \frac{\text{Pr}}{\nu} u_m r_0^2 \frac{dT_m}{dx}. \quad (5.22)$$

Теперь определим число Нуссельта соотношением

$$\text{Nu} = \frac{\dot{q}_w}{(T_w - T_m) k}, \quad (5.23a)$$

или с использованием коэффициента теплоотдачи \hat{h} соотношением

$$\text{Nu} = \frac{\hat{h}d}{k}, \quad (5.23b)$$

где $d(\equiv 2r_0)$ — диаметр трубы. Поскольку

$$\dot{q}_w = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = k \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=r_0} = \hat{h}(T_w - T_m),$$

число Нуссельта можно записать в виде

$$\text{Nu} = \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=r_0} \frac{d}{T_w - T_m}. \quad (5.24)$$

Дифференцируя соотношение (5.21) по r и подставляя найденное выражение в формулу (5.24), получаем

$$\text{Nu} = \frac{48}{11} = 4,364. \quad (5.25)$$

Если для трубы выполняется условие *постоянной температуры стенки*, а не постоянной плотности теплового потока (как в случае водотрубного парового котла), то, поскольку

$$\frac{dT_w}{dx} = 0, \quad (5.26)$$

выражение (5.14) сводится к следующему:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = G \frac{dT_m}{dx}. \quad (5.27)$$

Повторяя для этого случая ту же цепь рассуждений, что и выше (см. задачу 5.6), получаем

$$\text{Nu} = 3,658, \quad (5.28)$$

т. е. число Нуссельта на 16% ниже, чем в случае постоянной плотности теплового потока. Отметим, что и \dot{q}_w , и $T_w - T_m$ стремятся к нулю при больших значениях x , поскольку поток прогревается до температуры стенки, в то время как при постоянном значении \dot{q}_w величины T_w и T_m продолжают неограниченно возрастать.

На рис. 5.1 показано изменение температуры по длине канала для двух рассмотренных случаев.

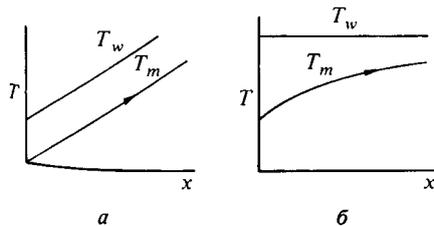


Рис. 5.1. Изменение среднemasсовой температуры жидкости по длине круглой трубы в случае полностью развитых профилей скорости и температуры.

a — случай постоянной плотности теплового потока в стенку; b — случай постоянной температуры стенки.

Для плоского течения показатель $K = 0$ и уравнение (5.3) сводится к следующему:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (5.29)$$

Как и для осесимметричного течения, можно получить решение уравнения (5.29) при постоянной температуре стенки и постоянной плотности теплового потока (см. задачу 5.7).

Каналы некруглого поперечного сечения

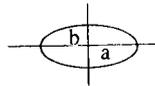
Для полностью развитого ламинарного течения в канале произвольного поперечного сечения уравнения движения и энергии можно записать в виде

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (5.30)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (5.31)$$

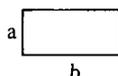
В случае ламинарного потока можно предположить, что давление поперек каждого сечения постоянно, а вторичным течением можно пренебречь (т. е. $v = w = 0$). В турбулентном потоке вследствие напряжений Рейнольдса возникает вторичное течение, существенно усложняющее проблему. Решения уравнений (5.30) и (5.31) подробно обсуждаются в работе Шаха и Лондона [1]. В табл. 5.1—5.3

Таблица 5.1. Значения коэффициента трения и чисел Нуссельта для полностью развитого ламинарного течения в каналах эллиптического сечения



$\frac{b}{a}$	fR_{d_e}	Nu_T	Nu_H
1,00	16,000	3,658	4,364
0,80	16,098	3,669	4,387
0,50	16,823	3,742	4,558
0,25	18,240	3,792	4,880
0,125	19,146	3,725	5,085
0,0625	19,536	3,647	5,176
0	19,739	3,488	5,225

Таблица 5.2. Значения коэффициента трения и чисел Нуссельта для полностью развитого ламинарного течения в каналах прямоугольного сечения



$\frac{b}{a}$	fR_{d_e}	Nu_T	Nu_H
1,00	14,227	2,976	3,608
0,714	14,565	3,077	3,734
0,50	15,548	3,391	4,123
0,25	18,233	4,439	5,331
0,125	20,584	5,597	6,490
0,05	22,477	—	7,451
0	24,000	7,541	8,235

представлены некоторые результаты, полученные при граничных условиях постоянной температуры стенки или постоянной плотности теплового потока для каналов эллиптического и прямоугольного сечения, а также для каналов, имеющих некоторые другие формы поперечного сечения. Число Нуссельта (индекс T относится к случаю постоянной температуры стенки, а индекс H — к случаю постоянной плотности теплового потока) определяется выражением

$$Nu = \frac{\dot{q}_w}{(T_w - T_m)} \frac{d_e}{k}, \quad (5.32)$$

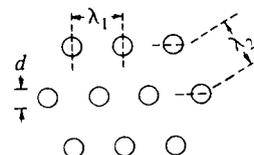
где $d_e = 4A/s$ — эквивалентный, или «гидравлический», диаметр, A — площадь поперечного сечения канала, а s — его периметр; для плоского канала величина d_e равна удвоенной высоте канала, а для трубы круглого сечения d_e совпадает с действительным диаметром.

Таблица 5.3. Значения коэффициента трения и чисел Нуссельта для полностью развитого ламинарного течения в каналах с различной формой поперечного сечения

Форма сечения	fR_{d_e}	Nu_T	Nu_H
Равносторонний треугольник	13,337	2,47	3,111
Правильный шестиугольник	15,054	3,34	4,002
Полукруг	15,767	—	4,089

Рис. 5.2. Схема пучка круглых стержней.

Отметим, что в данном случае промежутки λ_1 и λ_2 равны и обозначаются через λ .



Выражение (5.23) является частным случаем соотношения (5.32) для трубы круглого сечения.

Аналогичным образом число Рейнольдса R_{d_e} выражается в виде

$$R_{d_e} = \frac{u_m d_e}{\nu}. \quad (5.33)$$

Представленные в табл. 5.1—5.3 расчетные значения числа Нуссельта для случая постоянной плотности теплового потока получены в предположении, что температура по периметру канала постоянна. Коэффициент трения определяется формулой (5.10) с заменой d на d_e .

Представляет интерес еще одна конфигурация, встречающаяся в ядерных реакторах, когда пучок топливных элементов-стержней круглого поперечного сечения располагается внутри трубы и выделяет энергию при постоянной плотности теплового потока (рис. 5.2). Если число стержней достаточно велико, то при решении зада-

Таблица 5.4. Значения коэффициента трения и чисел Нуссельта для полностью развитого ламинарного течения при продольном обтекании пучка круглых трубок с постоянной плотностью теплового потока

$\frac{\lambda}{d}$	fR_{d_e}	Nu
1,0	6,503	—
1,001	—	1,26
1,01	7,634	1,52
1,03	12,441	2,14
1,05	15,478	2,82
1,10	20,377	4,62
1,20	24,950	7,48
1,30	27,417	9,19
1,50	31,035	11,26
2,00	39,384	15,27
3,011	58,46	—
4,00	79,003	—

чи можно считать, что пучок стержней является бесконечным в поперечном направлении. Решения этой задачи для случая продольного обтекания пучков труб треугольной или квадратной формы в плане были получены в работе Спэрроу и др. [2] (табл. 5.4). Основным параметром в этой задаче является отношение промежутка между трубами к их диаметру λ/d . Для пучка треугольной формы в плане гидравлический диаметр определяется формулой

$$d_e = d \left[\frac{2\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 - 1 \right].$$

5.2. Течение с тепловым начальным участком при полностью развитом поле скоростей

В этом разделе мы рассмотрим методы расчета теплообмена при ламинарном течении в симметричном плоском или осесимметричном (круглого сечения) канале для случая полностью развитого поля скоростей в начале участка, на котором происходит теплообмен, скажем в сечении $x = x_0$; полностью развитое поле температур, рассматриваемое в предыдущем разделе, достигается асимптотически при больших значениях x . На рис. 5.3 показана схема рассматриваемого течения. Набегающий поток имеет равномерную температуру T_e , характерную скорость u_0 (скажем, среднюю скорость течения в канале) и полностью развитый профиль скорости. Теплообмен начинается в сечении $x = x_0$, так что при $x < x_0$ $T_w = T_e$, а при $x > x_0$ граничные условия записываются следующим образом:

$$y = 0, \quad T = T_w(x) \quad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{\dot{q}_w(x)}{k}, \quad (5.34a)$$

$$y = L, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (5.34b)$$

Здесь L — полуширина (точнее полувысота) плоского канала или радиус r_0 осесимметричного канала (трубы). Температура определяется решением уравнения энергии

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{1}{r^\kappa} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (5.3)$$

при граничных условиях (5.34) в предположении, что все поле скоростей известно.

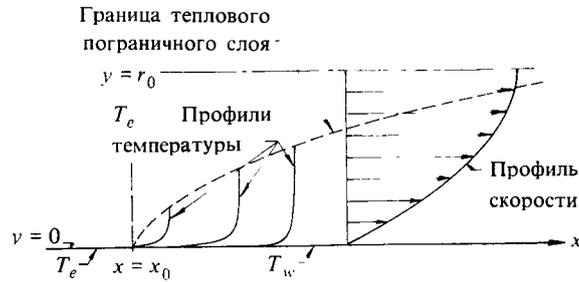


Рис. 5.3. Тепловой начальный участок в симметричном канале с полностью развитым полем скоростей.

Прежде чем рассмотреть решение уравнения (5.3) при граничных условиях (5.34), введем безразмерные параметры, определенные соотношениями

$$\hat{u} = \frac{u}{u_0}, \quad \hat{x} = \frac{x - x_0}{L} \frac{1}{\text{Pr} R_L}, \quad \hat{y} = \frac{y}{L}, \quad \hat{r} = \frac{r}{L} = \frac{r_0}{L} - \hat{y}, \quad (5.35)$$

где $R_L = u_0 L / \nu$. Отметим, что $\text{Pr} R_L = u_0 L / (k / \rho c_p)$, так что \hat{x} не зависит от ν . Теперь уравнение (5.3) принимает вид

$$\hat{u}(\hat{r})^k \frac{\partial T}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left[(\hat{r})^k \frac{\partial T}{\partial \hat{y}} \right]. \quad (5.36)$$

Укажем, что Pr не входит явно в рассматриваемые соотношения, так что примененная нормализация позволила полностью исключить влияние теплофизических свойств рабочего тела.

Преобразованные переменные

Вблизи начала теплового пограничного слоя его толщина δ_t очень мала по сравнению с радиусом трубы r_0 или полушириной канала. [Это означает, что характерный линейный размер L (радиус трубы или полуширина канала), входящий в соотношение (5.35), не должен оказывать непосредственного влияния на решение, и он действительно выпадает из анализа.] Чтобы сохранить необходимую точность расчета, применяется переменная подобия, определенная выражением

$$\eta = \frac{\hat{y}}{\sqrt{\hat{x}}} \equiv y \sqrt{\frac{u_0 \text{Pr}}{\nu(x - x_0)}}, \quad (5.37)$$

которая представляет собой просто переменную Фолкнера — Скэн η с заменой ν величиной $\nu/\text{Pr} \equiv k/\rho c_p$. Кроме того, используется безразмерная температура g , определенная формулой

$$T = T_e + T_e(1 - g)\phi(\hat{x}). \quad (4.25)$$

Обозначая штрихом дифференцирование по η , можно записать уравнение энергии и соответствующие граничные условия следующим образом:

$$(a_1 g')' + a_2 \frac{\eta}{2} g' - a_3 g = a_2 \hat{x} \frac{\partial g}{\partial \hat{x}} - a_3, \quad (5.38)$$

$$\eta = 0, \quad g = 0 \text{ или } g' = 1; \quad \eta = \eta_e, \quad g = 1. \quad (5.39)$$

Для удобства¹⁾ введены параметры a_1 , a_2 и a_3 , определенные соотношениями

$$a_1 = (\hat{r})^K, \quad a_2 = (\hat{r})^K \hat{u}, \quad a_3 = \hat{x} a_2 \hat{n}. \quad (5.40a)$$

Как и прежде, в случае заданной температуры стенки вводится параметр

$$\hat{n} = \frac{1}{T_w - T_e} \frac{d}{d\hat{x}} (T_w - T_e), \quad (5.40b)$$

а в случае заданной плотности теплового потока при $\phi(\hat{x}) = \dot{q}_w(\hat{x})L\sqrt{\hat{x}}/kT$ — параметр

$$\hat{n} = \frac{1}{\phi(\hat{x})} \frac{d\phi(\hat{x})}{d\hat{x}}. \quad (5.40c)$$

Отметим, что величина $L\sqrt{\hat{x}}$ на самом деле не зависит от характерного линейного размера L (полуширины канала или радиуса трубы); решение для плоского канала зависит от L только через скорость u при условии, что $\delta_t < L$, а в случае круглой трубы r_0 влияет на решение только через параметры, определенные соотношениями (5.40a).

¹⁾ В гл. 7 будет показано, что используя понятие коэффициента турбулентной теплопроводности ε_h , можно записать уравнение энергии для турбулентного течения в той же форме, что и для ламинарного течения, просто переопределяя a_1 следующим образом:

$$a_1 = (\hat{r})^K \left(1 + \frac{\text{Pr} \varepsilon_h}{\nu} \right),$$

где ε_h зависит только от r .

Исходные переменные

Использование переменной подобия η дает большое преимущество при проведении расчетов на начальных стадиях развития течения, поскольку преобразованная толщина теплового пограничного слоя приблизительно постоянна ($\eta_e \approx 8$), а профили температуры в координатах (η, g) близки к подобным, но мы отказываемся от этой переменной в пользу исходной переменной $\hat{y} \equiv y/L$, начиная с некоторого сечения $\hat{x} = \hat{x}_s$, прежде чем расчетная толщина теплового пограничного слоя становится равной L (полуширине канала или радиусу трубы). В этом случае, обозначая теперь штрихом дифференцирование по \hat{y} и определяя безразмерную температуру по-прежнему соотношением (4.25), можно записать уравнение (5.36) и соответствующие граничные условия в виде

$$(a_1 g')' - a_3 g = a_2 \frac{\partial g}{\partial \hat{x}} - a_3, \quad (5.41)$$

$$\hat{y} = 0, \quad g = 0 \text{ или } g' = 1; \quad \hat{y} = 1, \quad g' = 0. \quad (5.42)$$

Здесь параметры a_1 , a_2 и \hat{n} вновь определяются соотношениями (5.40) с тем лишь исключением, что теперь

$$a_3 = a_2 \hat{n}, \quad \phi(\hat{x}) = \frac{\dot{q}_w(\hat{x})L}{kT_e}. \quad (5.43)$$

Примеры решений

Хотя при некоторых простых граничных условиях уравнение энергии можно решить аналитическими методами, для решения этого уравнения в более общих случаях, как указано в разд. 13.3, необходимо использовать численные методы. Представленные здесь результаты получены с помощью модифицированного варианта программы численного расчета, описанной в разд. 13.4.

На рис. 5.4 и 5.5 представлены распределения местного числа Нуссельта Nu для полностью развитого течения скоростей в круглой трубе и в плоском канале с теплообменом только на участке $x > x_0$ для трех случаев: постоянной температуры стенки, постоянной плотности теплового потока и линейного изменения температуры стенки по $x - x_0$. Местное число Нуссельта определяется выражением (5.32).

Результаты, представленные на рис. 5.4, показывают, что в круглой трубе с постоянной температурой стенки местное число Нуссельта достигает значения 3,658, соответствующего полностью

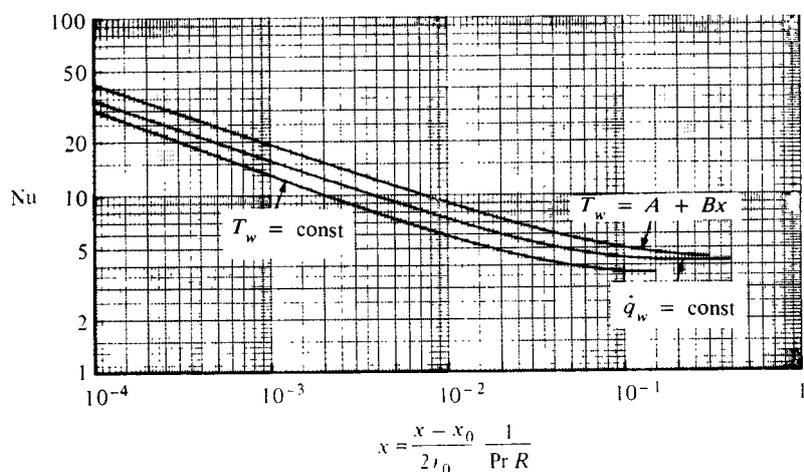


Рис. 5.4. Изменение местного числа Нуссельта на тепловом начальном участке круглой трубы при различных граничных условиях на стенке; $R \equiv u_m r_0 / \nu$.

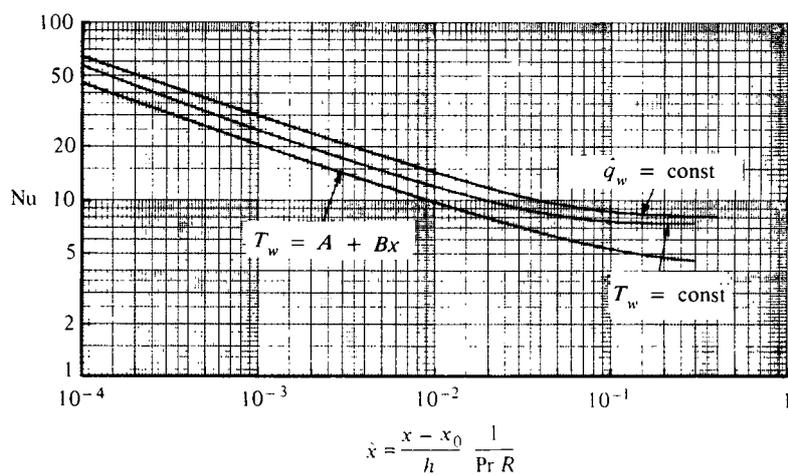


Рис. 5.5. Изменение местного числа Нуссельта на тепловом начальном участке плоского канала при различных граничных условиях на стенке; $R \equiv u_m h / \nu$.

развитому тепловому пограничному слою (см. выражение (5.28)], при \hat{x} около 0,1. Следовательно, длина теплового начального участка l_t в этом случае равна

$$\frac{l_t}{r_0} = 0,1 \text{Pr} R_d = 0,2 \text{Pr} u_m \frac{L}{\nu} = 0,2 u_m \frac{L}{\kappa}, \quad (5.44)$$

где $\kappa = k/\rho c_p$. Коэффициент кинематической вязкости ν не входит в это соотношение, величина $u_m L/\kappa$ представляет собой число Пекле. При постоянной плотности теплового потока число Нуссельта достигает значения 4,364, соответствующего полностью развитому тепловому пограничному слою, примерно при том же значении \hat{x} , что и в случае постоянной температуры стенки. Однако в случае линейного изменения температуры стенки длина теплового начального участка несколько больше, чем в обоих предыдущих случаях. Местное число Нуссельта становится приблизительно постоянным при $\hat{x} \approx 0,3$.

Можно видеть, что для плоского канала (рис. 5.5) наблюдается примерно такая же закономерность изменения длины теплового начального участка при различных граничных условиях на стенке. Длина теплового начального участка при постоянной температуре стенки и при постоянной плотности теплового потока примерно такая же, как и для круглой трубы. В обоих случаях местное число Нуссельта достигает постоянного значения, начиная с $\hat{x} = 0,1$. Однако характер изменения самой величины местного числа Нуссельта при различных граничных условиях становится иным. Если для круглой трубы местное число Нуссельта при линейном возрастании температуры стенки выше, чем при постоянной температуре стенки, то для плоского канала наблюдается обратная картина: значения местного числа Нуссельта при линейном возрастании температуры стенки ниже, чем при постоянной ее температуре.

5.3. Течение с гидродинамическим и тепловым начальными участками

В этом разделе будут рассмотрены методы расчета теплообмена при ламинарном течении в симметричном плоском или круглом каналах в случае, когда развиваются и поле скоростей, и поле температур. Схема рассматриваемого течения показана на рис. 5.6. Вновь обозначим температуру и скорость во входном сечении канала через T_e и u_0 соответственно.

Чтобы рассчитать неавтономное поле скоростей на начальном участке канала, необходимо получить решение уравнений не-

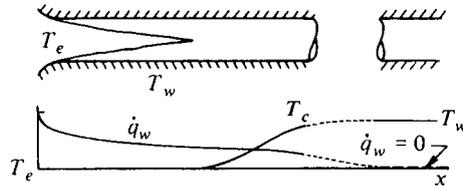


Рис. 5.6. Течение на начальном участке равномерно нагреваемого канала.
 T_e — температура жидкости во входном сечении канала, T_c — температура жидкости на оси канала.

разрывности и движения совместно с «глобальным» уравнением неразрывности — условием постоянства массового расхода, которое будет считаться не уравнением, а граничным условием (с учетом того, что нормальная составляющая скорости на стенке канала равна нулю). Как только поле скоростей определено, можно решить уравнение энергии и рассчитать (неавтомодельное) поле температур. Даже в том случае, когда уравнения движения и энергии решаются совместно, общий подход к решению задачи остается тем же самым: нужно решить уравнения неразрывности, движения и энергии совместно с соотношением, полученным на основании закона сохранения массы. Как и при решении задач внешнего обтекания тел и течений с тепловым начальным участком, решение основных уравнений можно получить в исходных координатах (т. е. x, y или x, r) или в преобразованных координатах. Будем следовать методу Себиси и Чжена [3], в котором при решении уравнений неразрывности, движения и энергии применяются обе системы координат.

Преобразованные переменные

На ранних стадиях развития течения при решении основных уравнений используются преобразованные координаты. С этой целью применяется модифицированный вариант преобразования Фолкнера — Скэн — Манглера, описанного в разд. 4.4. Рассматривается лишь случай канала постоянного сечения. Следовательно, преобразование координаты x , согласно первому из соотношений (Р3.1), не имеет особого смысла, но преобразование координаты y производится согласно второму из соотношений (Р3.1). Итак, для несопряженного течения в канале постоянного сечения применяется модифицированное преобразование Фолкнера — Скэн — Манглера,

определенные соотношениями

$$d\eta = \left(\frac{u_0}{\nu x}\right)^{1/2} \left(\frac{r}{L}\right)^K dy, \quad \psi(x, y) = L^K (u_0 \nu x)^{1/2} f(x, \eta). \quad (5.45)$$

Здесь L — характерный линейный размер, в качестве которого для удобства снова выбрана полуширина плоского канала или радиус круглой трубы. Если в случае трубы $y \ll L$, то величина $r/L \equiv (L - y)/L$ близка к единице и выпадает из соотношений (5.45).

Применяя это преобразование и следуя методике, аналогичной описанной в разд. 4.4, можно выразить уравнения движения и энергии (3.15) и (3.17) и соответствующие граничные условия в преобразованных переменных. Вновь используя определение функции тока, удовлетворяющей уравнению неразрывности (4.93), и применяя соотношения, аналогичные соотношениям (4.94), можно записать преобразованные уравнения движения и энергии в следующей форме:

$$(bf'')' + \frac{1}{2}ff'' = x \frac{dp^*}{dx} + x \left(f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (5.46)$$

$$(eg')' + \frac{1}{2}fg' + nf'(1-g) = x \left(f' \frac{\partial g}{\partial x} - g' \frac{\partial f}{\partial x} \right). \quad (5.47)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по η и в случае заданной температуры стенки параметр n опять выражает безразмерный градиент температуры в направлении потока

$$n = \frac{x}{T_w - T_e} \frac{d}{dx} (T_w - T_e), \quad (5.48a)$$

где T_e — температура потока во входном сечении канала и, следовательно, на границе пограничного слоя. В случае заданной плотности теплового потока, когда $\phi(x) = \dot{q}_w(x)x/kT_e R_x^{1/2}$,

$$n = \frac{x}{\phi} \frac{d\phi}{dx}, \quad (5.48b)$$

где

$$R_x = \frac{u_0 x}{\nu}. \quad (5.49)$$

Безразмерные параметры b , e и p^* определяются выражениями

$$b = (1-t)^{2K}, \quad e = \frac{b}{Pr}, \quad p^* = \frac{P}{\rho u_0^2}, \quad (5.50a)$$

где

$$t = 1 - \left[1 - 2\eta \left(\frac{x}{L} \frac{1}{R_L} \right)^{1/2} \right], \quad R_L = \frac{u_0 L}{\nu}. \quad (5.50b)$$

При использовании преобразованных переменных (5.45) граничные условия для уравнений движения и энергии, вытекающие из соотношений (4.2), можно выразить соотношениями, очень близкими к условиям (4.30), а именно

$$\eta = 0, \quad f' = 0, \quad f = - \frac{1}{(u_0 \nu x)^{1/2}} \int_0^x v_w dx, \quad g = 0 \text{ или } g' = 1, \quad (5.51a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad f' = \frac{u_e}{u_0}, \quad g = 1. \quad (5.51b)$$

Исходные переменные

Как и в разд. 5.2, переходим от переменных x и η к исходным переменным x и y (или r) в некотором сечении, прежде чем граница динамического или теплового пограничного слоя достигнет оси. Напомним, что при $Pr < 1$ толщина теплового пограничного слоя δ_t больше толщины динамического слоя δ . Если число Прандтля достаточно велико, так что толщина теплового пограничного слоя растет очень медленно, можно при решении уравнения энергии использовать полностью развитый профиль скорости при всех значениях x , избегая таким образом решения уравнения движения. Как будет показано ниже, это приводит к незначительной погрешности расчетной длины теплового начального участка для течений жидкости с большим числом Прандтля.

При использовании исходных переменных безразмерная координата Y определяется выражением

$$dY = \left(\frac{u_0}{\nu L} \right)^{1/2} \left(\frac{r}{L} \right)^K dy, \quad \hat{x} = \frac{x}{L}, \quad (5.52a)$$

а безразмерная функция тока $F(\hat{x}, Y)$ — выражением

$$\psi = (u_0 \nu L)^{1/2} L^K F(\hat{x}, Y), \quad (5.52b)$$

являющимся, по существу, соотношением (5.45), в котором вместо x используется L . Вводя, как и прежде, параметр $p^* = p/\rho u_0^2$, мож-

но записать уравнения движения и энергии в виде

$$(bF'')' = \frac{dp^*}{d\hat{x}} + F' \frac{\partial F'}{\partial \hat{x}} - F'' \frac{\partial F}{\partial \hat{x}}, \quad (5.53)$$

$$(eg')' + n(1-g)F' = F' \frac{\partial g}{\partial \hat{x}} - g' \frac{\partial F}{\partial \hat{x}}, \quad (5.54)$$

где b и e определяются формулами (5.50а). Штрихом обозначено дифференцирование по Y ; параметры n и t при $\phi(\hat{x}) = \dot{q}_w(\hat{x})L/kT_e\sqrt{R_L}$ выражаются соотношениями

$$n = \begin{cases} \frac{d}{(T_w - T_e)d\hat{x}} (T_w - T_e) & \text{(при заданной температуре стенки),} \\ \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{d\hat{x}} & \text{(при заданной плотности} \\ & \text{теплового потока),} \end{cases} \quad (5.55a)$$

$$t = 1 - \left(1 - \frac{2Y}{\sqrt{R_L}}\right)^{1/2}. \quad (5.55b)$$

Граничные условия на стенке для уравнений (5.53) и (5.54) при заданной температуре стенки или заданной плотности теплового потока имеют вид

$$Y = 0, \quad F' = 0, \quad F = -\frac{1}{(u_0\nu L)^{1/2}} \int_0^x v_w dx, \quad g = 0 \text{ или } g' = 1. \quad (5.56a)$$

Из соображений симметрии на оси производные du/dy и $\partial T/\partial y$ в преобразованных координатах равны нулю. В безразмерных координатах Y и g производные $du/\partial Y$ и $\partial g/\partial Y$ на оси, где величина Y_c равна $\sqrt{R_L}/2$ для круглой трубы и $\sqrt{R_L}$ для плоского канала, не определены для круглой трубы (неопределенность типа 0/0). Чтобы найти граничные условия на оси, рассмотрим уравнения (5.53) и (5.54) и получим, что при $Y = Y_c$

$$\begin{aligned} F_c'' &= -\frac{1}{2}\sqrt{R_L} \left[\frac{dp^*}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\hat{x}} (F_c')^2 \right], \\ g_c' &= -\frac{1}{2}\sqrt{R_L} \text{Pr} F_c' \left[n(g_c - 1) + \frac{\partial g_c}{\partial \hat{x}} \right]. \end{aligned} \quad (5.56b)$$

Как отмечалось в начале этого раздела, наличием члена с градиентом давления в уравнении движения обусловлено появление допол-

нительной неизвестной величины в системе уравнений (5.46), (5.47) с граничными условиями (5.51) или в системе уравнений (5.53), (5.54) с граничными условиями (5.56). Следовательно, требуется еще одно уравнение. Это дополнительное уравнение можно получить на основе закона сохранения массы, и его следует считать не уравнением, а граничным условием. Например, для случая течения в плоском канале полушириной L из баланса массы находим

$$u_0 L = \int_0^L u dy. \quad (5.57)$$

Применяя безразмерные переменные Y и функцию тока $F(x, Y)$, определенные выражениями (5.52), можно записать соотношение (5.57) в виде

$$\sqrt{R_L} = F(\hat{x}, \sqrt{R_L}). \quad (5.58)$$

Используя преобразованные переменные, соотношение (5.58) можно также выразить в форме

$$f(x, \eta_{sp}) = \eta_{sp}, \quad (5.59)$$

где $\eta_{sp} = \sqrt{R_L(L/x)}$. Аналогичные соотношения можно записать для круглой трубы (см. задачу 5.22). Систему уравнений, выраженную в преобразованных переменных [(5.46), (5.47) с граничными условиями (5.51)] или в исходных переменных [(5.53), (5.54) с граничными условиями (5.56)] можно решить, считая изменение давления между последовательными сечениями x нелинейным собственным значением (как описано в разд. 14.1) или неизвестной величиной (как предложено в работе Брэдшоу и др. [4]).

Примеры решений

На рис. 5.7—5.9 представлены результаты расчета численным методом, описанным в разд. 14.1. На рис. 5.7 и 5.8 показано изменение безразмерной скорости на оси и местного числа Нуссельта Nu для ламинарного течения в круглой трубе с постоянной температурой стенки. Согласно результатам расчета и экспериментальным данным Пфеннигера [5], приведенным на рис. 5.7, безразмерная скорость на оси трубы достигает асимптотического значения, равного 2, при $(x/r_0)/R = 0,20$, где $R = u_0 r_0 / \nu \equiv R_d/2$. Следовательно, длина гидродинамического начального участка l_v для ламинарного течения в круглой трубе равна

$$\frac{l_v}{r_0} = 0,20 R. \quad (5.60)$$

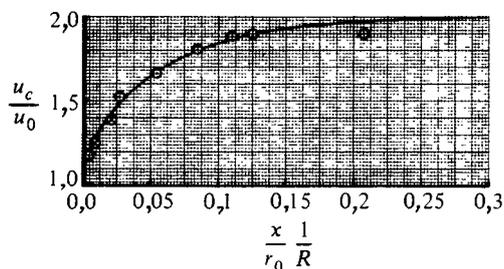


Рис. 5.7. Изменение относительной скорости ламинарного течения на оси на начальном участке трубы [5].

$R = u_m r_0 / \nu$. Кругами показаны экспериментальные данные Пфеннигера

Согласно результатам, представленным на рис. 5.8, при $Pr = 1$ число Нуссельта, определенное выражением (5.53), становится почти постоянным (равным 3,658) при $(x/r_0)/R \geq 0,2$, [сравните с соотношением (5.44)]. Это означает, что при $(x/r_0)/R > 0,2$ профиль температуры полностью развит; следовательно, длина гидродинамического начального участка (на котором развивается поле скоростей) равна длине теплового начального участка (на котором развивается поле температур), как и следовало ожидать при $Pr = 1$. При

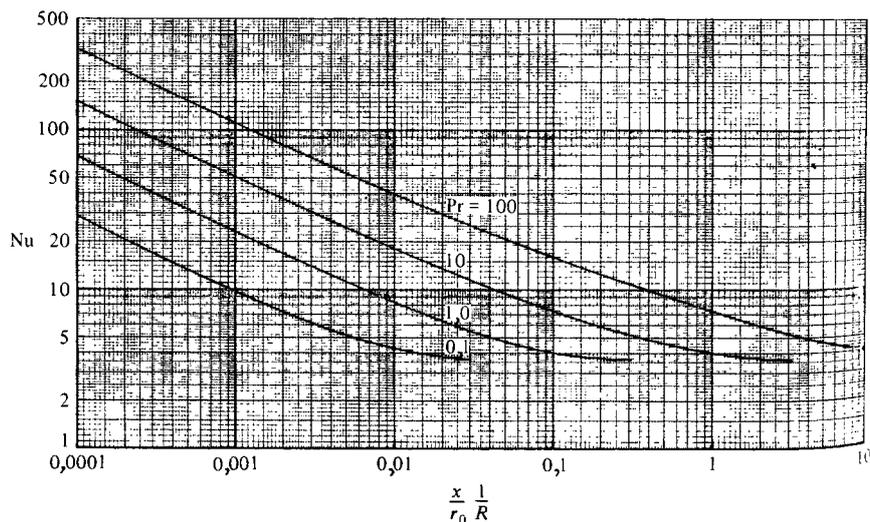


Рис. 5.8. Распределение местного числа Нуссельта для ламинарного течения в круглой трубе с постоянной температурой стенки.

Nu определяется соотношением (5.24).

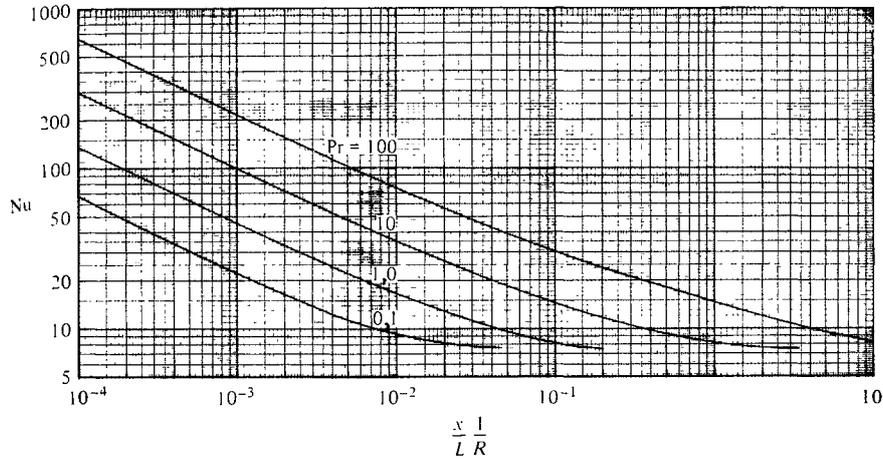


Рис. 5.9. Распределение числа Нуссельта для ламинарного течения в плоском канале с постоянной температурой стенки.

Nu определяется соотношением (5.23b) с заменой диаметра d полушириной канала L ; $R = u_m 2L / \nu$.

$Pr = 10$ число Нуссельта становится почти постоянным при $(x/r_0)/R = 2$, т. е. при $Pr > 1$ профиль скорости развивается быстрее, чем профиль температуры. С другой стороны, при $Pr < 1$ профиль температуры развивается быстрее, чем профиль скорости. Например, при $Pr = 0,1$ величина $(x/r_0)/R = 0,03$. На основании этих результатов можно сделать вывод, что длина теплового начального участка l_t примерно в Pr раз больше длины гидродинамического начального участка l_v , т. е.

$$l_t = Pr l_v,$$

или с использованием соотношения (5.60)

$$\frac{l_t}{r_0} = 0,20 R Pr, \tag{5.61}$$

На рис. 5.9 представлено распределение местного числа Нуссельта по длине плоского канала, обе стенки которого имеют одинаковую постоянную температуру. Сравнение этих результатов с расчетными данными, приведенными на рис. 5.8, показывает, что длина теплового начального участка для плоского канала примерно такая же, как и для круглой трубы. Это справедливо и для длины гидродинамического начального участка в обоих случаях.

Задачи

Предлагаемые задачи можно решить без использования программы численного расчета, описанной в разд. 13.3. Читателям, желающим познакомиться с программами численного решения задач гидромеханики и теплообмена, рекомендуется решить задачи 5.17—5.20 с помощью указанной программы.

5.1. Показать, что для полностью развитого течения в круглой трубе

а) средняя скорость u_m связана с максимальной скоростью u_{\max} соотношением

$$u_m = \frac{u_{\max}}{2}; \quad (\text{P5.1})$$

б) объемный расход $Q (= u_0 \pi r_0^2)$ можно выразить соотношением

$$Q = \frac{\pi r_0^4}{8\mu L} (p_i - p_0), \quad (\text{P5.2})$$

известным под названием формулы Хагена — Пуазейля.

5.2. Показать, что для полностью развитого ламинарного течения между двумя параллельными пластинами решение уравнения движения (5.6) при граничных условиях

$$y = 0, \quad u = 0; \quad y = 2h, \quad u = u_0 = \text{const}$$

имеет вид

$$u = u_0 \frac{y}{2h} - \frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y}{h} \left(2 - \frac{y}{h} \right). \quad (\text{P5.3})$$

5.3. Течение, характеристики которого описываются соотношением (P5.3), называется течением Куэтта. Если обе пластины неподвижны ($u_0 = 0$), соотношение (P5.3) принимает вид

$$u = - \frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y}{h} \left(2 - \frac{y}{h} \right), \quad (\text{P5.4})$$

характерный для плоского течения Пуазейля. Таким образом, соотношение (P5.3) содержит линейное распределение скорости (P5.4), обусловленное сдвиговым течением между двумя плоскими пластинами при отсутствии градиента давления, и параболическое распределение скорости, обусловленное влиянием параметра давления $P [\equiv -(h^2/2\mu_0)(p_0 - p_i)/L]$.

Соотношение (P5.4) применимо к вынужденному течению масла, возникающему в узком зазоре между кольцом подшипника и неподвижным валом, когда можно пренебречь влиянием сил инерции. Показать, что

а) средняя скорость u_m связана с максимальной скоростью соотношением

$$\frac{u_{\max}}{u_m} = \frac{3}{2}; \quad (\text{P5.5})$$

б) безразмерное падение давления можно выразить формулой

$$\frac{p_i - p_0}{\rho u_m^2} = \frac{3}{R_h} \frac{L}{h}, \quad \text{где} \quad R_h = \frac{u_m h}{\nu}; \quad (\text{P5.6})$$

- в) построить зависимость u/u_0 от $y/2h$, согласно соотношению (P5.3), при значениях $P = -2, -1, 0, 1, 2$, чтобы показать влияние градиента давления на профиль скорости.
- 5.4. Получить соотношение (5.28), следуя методике, аналогичной использованной для случая постоянной плотности теплового потока. Отметим, что, поскольку величина G до интегрирования неизвестна, необходимо задать некоторый начальный профиль температуры. Использовать для этой цели профиль температуры (5.21), соответствующий случаю постоянной плотности теплового потока, и проинтегрировать уравнение (5.3) по r . Отметим, что теперь производная $\partial T/\partial x$ определяется выражением (5.27). Получив таким образом профиль температуры, проинтегрировать уравнение энергии, чтобы получить новый профиль. Для каждого профиля температуры найти среднемассовую температуру и число Нуссельта. Повторять этот процесс до удовлетворения неравенства

$$|\text{Nu}^{(i+1)} - \text{Nu}^{(i)}| < \varepsilon,$$

- где ε — допустимая погрешность, равная, скажем, 10^{-4} .
- 5.5. С помощью метода трапеций численно проинтегрировать уравнение (5.18) для полностью развитого теплового пограничного слоя при постоянной плотности теплового потока в диапазоне значений $0 \leq \bar{r} \leq 1$. Принять $\Delta \bar{r} = 0,1; 0,05; 0,025$ и $0,01$ и проанализировать влияние $\Delta \bar{r}$ на результаты расчета.
Указание. Выразить T , u и r в безразмерном виде. Например, пусть

$$\bar{u} = \frac{u}{u_m}, \quad \bar{r} = \frac{r}{r_0}, \quad p = \frac{T}{r_0^2 (\text{Pr}/\nu) u_m (dT_m/dx)},$$

тогда уравнение (5.18) можно записать в виде

$$\frac{d}{d\bar{r}} \left(\bar{r} \frac{dp}{d\bar{r}} \right) = \bar{u} \bar{r}.$$

Проводя интегрирование от оси и полагая $dp/d\bar{r} = 0$ при $\bar{r} = 0$, получаем

$$\bar{r} \frac{dp}{d\bar{r}} = g.$$

Интегрируя еще раз и принимая среднюю величину интеграла, а именно g_m/\bar{r}_m , получаем при $\bar{p} = p(\bar{r}) - p(0)$

$$\bar{p} = \int_0^{\bar{r}} \left(\frac{g}{\bar{r}} \right) d\bar{r}.$$

Безразмерная среднемассовая температура p_m определяется выражением

$$p_m \equiv 2 \int_0^1 \bar{r} \bar{u} p d\bar{r},$$

а число Нуссельта Nu — соотношением

$$\text{Nu} = \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=r_0} \frac{d}{T_w - T_m} = \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{r}} \right)_{\bar{r}=1} \frac{2}{T_w - T_m} = \frac{2}{\bar{p}_w - \bar{p}_m} \left(\frac{\partial p}{\partial \bar{r}} \right)_{\bar{r}=1}.$$

Ниже представлена программа численного расчета с использованием указанных обозначений. Отметим, что $\bar{p}_m = p_m - p(0)$ и $\bar{p}_w = \bar{p}(1)$.

```

      DIMENSION R(51),U(51),PB(51),G(51)
C
      NP      = 51
      DO 10 J= 1,NP
      R(J)    = 0.02 * FLOAT(J-1)
      U(J)    = 2.0 * (1.0 - R(J)**2)
10 CONTINUE
C
      G(1)    = 0.0
      PB(1)   = 0.0
      RU1     = R(1) * U(1)
      DO 20 J= 2,NP
      RU2     = R(J) * U(J)
      G(J)    = G(J-1) + 0.5 * (RU1 + RU2) * (R(J) - R(J-1))
      GM      = 0.5 * (G(J) + G(J-1))
      RM      = 0.5 * (R(J) + R(J-1))
      PB(J)   = PB(J-1) + GM / RM * (R(J) - R(J-1))
      RU1     = RU2
20 CONTINUE
      T1      = R(1) * U(1) * PB(1)
      PBM     = 0.0
      DO 30 J= 2,NP
      T2      = R(J) * U(J) * PB(J)
      PBM     = PBM + (T1 + T2) * (R(J) - R(J-1))
      T1      = T2
30 CONTINUE
      CNU     = 2.0 / (PB(NP) - PBM) * G(NP)
      WRITE( 6, 100) CNU
      WRITE( 6, 110) (J, R(J), PB(J), J=1,NP)
      STOP
C
100 FORMAT(1H0,3X,'NUSSLETT NO =',2X,E14.6,/)
110 FORMAT(1H0,3X,1HJ,8X,1HR,12X,2HPB/(1H',2X,I2,2E14.6))
      END

```

- 5.6. Решить задачу 5.5 для случая постоянной температуры стенки.
 5.7. Показать, что для полностью развитого ламинарного теплового пограничного слоя в плоском канале решение уравнения энергии для случая постоянной температуры стенки имеет вид

$$Nu = 7,60, \quad (P5.7a)$$

а для случая постоянной плотности теплового потока — вид

$$Nu = 8,23. \quad (P5.7b)$$

- 5.8. При течении жидких металлов (имеющих очень низкое число Прандтля) тепловые пограничные слои заполняют всю трубу вблизи входного сечения, в то время как профиль скорости еще очень близок к равномерному (ползущее течение). Разумное приближение для этого течения можно получить, решая уравнение (5.3), при $u = \text{const}$. Показать, что в этих условиях для ламинарного течения в круглой трубе при постоянной плотности теплового потока

$$Nu = 8,00.$$

Отметим, что при течении жидкого металла существенную роль может играть перенос тепла вдоль трубы, которым при решении задачи пренебрегается.

- 5.9. Воздух при атмосферном давлении и начальной температуре 393 К нагревается по мере течения со скоростью 3 м/с в трубе диаметром 1 см. Рассчитать тепловой поток на единицу длины трубы, если на стенке поддерживается постоянная плотность теплового потока, а температура стенки на 5 К выше температуры воздуха. Предположить, что течение является полностью развитым.
- 5.10. Масло течет со скоростью, соответствующей среднемассовой скорости 1 м/с и охлаждается от температуры 353 до 333 К в трубе диаметром 0,02 м, стенка которой имеет постоянную температуру 288 К. Какой длины должна быть труба, чтобы обеспечить такое охлаждение в условиях полностью развитого течения? Предположить, что масло имеет следующие теплофизические свойства: $c_p = 2,1$ кДж/(кг · К), $k = 0,1$ Вт/(м · К), $\nu = 6 \times 10^{-6}$ м²/с, $\kappa = 6 \times 10^{-5}$ м²/с.
- 5.11. Авиационное топливо течет с расходом 2 кг/час в трубе диаметром 0,05 м и длиной 2 м, нагреваясь от 283 до 323 К. Используя результаты, представленные на рис. 5.4, и предполагая, что плотность теплового потока в стенку постоянна, рассчитать и построить график зависимости температуры стенки трубы и среднемассовой температуры топлива от длины трубы. Предположить, что теплофизические свойства топлива постоянны: $\rho = 700$ кг/м³, $k = 0,3 \times 10^{-3}$ кВт/(м · К), $c_p = 2,3$ кДж/(кг · К), $\nu = 3 \times 10^{-3}$ м²/с.
- 5.12. Глицерин, имеющий температуру 293 К, течет в трубе диаметром 0,005 м и длиной 0,6 м. Если перепад давления составляет 0,2 МПа, температура стенки трубы постоянна и равна 303 К, а $T_m = 298$ К, найти
 а) длину гидродинамического начального участка;
 б) длину теплового начального участка;
 в) местную плотность теплового потока в сечениях $x = 0,2; 0,4; 0,6$ м.
 Глицерин имеет следующие теплофизические свойства:
 $\rho = 1300$ кг/м³, $\nu = 3 \times 10^{-3}$ м²/с, $c_p = 2,3$ кДж/(кг · К), $k = 0,3 \times 10^{-3}$ кВт/(м · К).
- 5.13. Воздух, имеющий давление 0,1 МПа и температуру 260 К, течет со скоростью 1 м/с в трубе диаметром 2 см и длиной 3 м. Найти местную плотность теплового потока в сечениях $x = 1,5$ и 3 м, если стенка последнего участка длиной 2 м нагрета до постоянной температуры 310 К. Предположить, что температура стенки на первом участке трубы постоянна и что $T_m = 285$ К.
- 5.14. Рассмотреть то же самое течение, что и в задаче 5.13, с тем лишь исключением, что на стенке последнего участка длиной 2 м постоянна плотность теплового потока, равная 25 Вт/м². Найти распределение температуры стенки вдоль нагреваемой секции.
- 5.15. Применить решение Левека (см. задачу 4.20) для ламинарного течения в круглой трубе с постоянной температурой стенки и найти выражения, определяющие местное и среднее числа Нуссельта для начального теплового участка. Сравнить полученные результаты с более точными решениями и проанализировать расхождения.
- 5.16. а. Рассмотреть ламинарное течение в круглой трубе с полностью развитым полем скоростей и развивающимся полем температур, но еще не слившимися температурными сдвиговыми слоями. Используя определения безразмерной температуры (4.25) и среднемассовой температуры (5.4), показать, что безразмерная среднемассовая температура g_m выражается соотношением

$$g_m = 1 + 2 \int_0^{\hat{y}_e} (1 - \hat{y}) \hat{u} (g - 1) d\hat{y}, \quad (P5.8)$$

где \hat{y}_e — безразмерная толщина теплового пограничного слоя.

- б. Показать, что при слиянии температурных сдвиговых слоев безразмерная среднемассовая температура выражается формулой

$$g_m = 2 \int_0^1 (1 - \hat{y}) \hat{u} g d\hat{y}. \quad (\text{P5.9})$$

- в. Показать, что при слиянии температурных сдвиговых слоев местное число Нуссельта, определенное выражением (5.23), можно записать в форме

$$\text{Nu} = \frac{2}{g_m} g'_w, \quad (\text{P5.10})$$

где $g'_w = (\partial g / \partial \hat{y})_w$. Когда температурные сдвиговые слои не сливаются,

$$g'_w = \left(\frac{\partial g}{\partial \hat{y}} \right)_w \frac{1}{\sqrt{\hat{x}}}. \quad (\text{P5.11})$$

- 5.17. Аналитическое решение уравнения (5.3) можно получить для некоторых случаев, в том числе для ламинарного течения в круглой трубе с постоянной температурой стенки и полностью развитым профилем скорости. Для этой проблемы, известной под названием задачи Гретца, можно найти решение уравнения (5.3) в замкнутом виде, имеющее следующую форму:

$$\frac{T - T_c}{T_w - T_c} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \phi_n \left(\frac{r}{r_0} \right) \exp \left[- \frac{\lambda_n^2 (x^+)}{\text{Pe}} \right],$$

где C_n — коэффициенты, $\phi_n(r/r_0)$ — функции r/r_0 , определенные граничными условиями, $x^+ = x/r_0$, $\text{Pe} (\equiv R_d \text{Pr})$ — число Пекле, а λ_n^2 — показатели степени, также определяемые граничными условиями. В работе Селларса, Трибуса и Клайна [6] было показано, что для круглой трубы с постоянной температурой стенки и полностью развитым профилем скорости число Нуссельта, определенное формулой (5.23), выражается соотношением (13.53), а именно

$$\text{Nu} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} G_n \exp \{ - \lambda_n^2 (x^+ / \text{Pe}) \}}{2 \sum_{n=0}^{\infty} (G_n / \lambda_n^2) \exp \{ - \lambda_n^2 (x^+ / \text{Pe}) \}}.$$

Постоянные G_n и собственные значения λ_n , входящие в соотношение (13.53), указаны в табл. 13.1.

- а. Рассчитать и построить график зависимости Nu от x^+ и с помощью программы численного расчета, приведенной в разд. 13.3, получить решение, представленное в табл. 13.2.
б. При $x^+ < 0,001 \text{Pe}$ решение (13.53) можно приближенно выразить формулой

$$\text{Nu} = \frac{1,357}{(x^+ / \text{Pe})^{1/3}}.$$

Сравнить полученные результаты численного расчета с результатами вычислений по этой формуле.

5.18. В работе Селларса, Трибуса и Клайна [6] было показано, что для круглой трубы с постоянной плотностью теплового потока и полностью развитым профилем скорости число Нуссельта, определенное формулой (5.23), выражается следующим соотношением:

$$\text{Nu} = \frac{1}{\frac{11}{48} + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\beta_m^2 x^+ / \text{Pe}]}{\beta_m^4 \phi'_m(-\beta_m^2)}} \quad (\text{P5.12})$$

Собственные функции ϕ'_m и собственные значения β_m^2 , входящие в это соотношение, представлены в табл. P5.1.

Таблица P5.1. Собственные значения и собственные функции решения в виде ряда для теплового начального участка круглой трубы при постоянной плотности теплового потока

m	β_m^2	$-\phi'_m(-\beta_m^2)$
0	25,64	$8,854 \times 10^{-3}$
1	84,62	$2,062 \times 10^{-3}$
2	176,40	$9,435 \times 10^{-4}$

а. Модифицировать программу численного расчета, описанную в разд. 13.3, получить численное решение этой задачи и сравнить полученные результаты с данными расчета по формуле (P5.12) при $10^{-4}\text{Pe} < x^+ < \infty$. Отметим, что при $x^+ > 0,25\text{Pe}$ расчет по формуле (P5.12) дает величины, приближающиеся к асимптотическому значению, определенному соотношением (5.25).

б. При $x^+ < 0,001\text{Pe}$ решение (P5.12) можно приближенно выразить формулой

$$\text{Nu} = \frac{1.639}{(x^+ / \text{Pe})^{1/3}}$$

Сравнить результаты численного расчета с данными вычислений по этой формуле.

5.19. В работе [6] было получено также аналитическое решение для ламинарного течения жидкости в круглой трубе с линейным изменением температуры стенки. Было показано, что в этом случае местное число Нуссельта определяется соотношением

$$\text{Nu} = \frac{\frac{1}{2} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} (G_n / \lambda_n^2) \exp\left(-\frac{\lambda_n^2 x^+}{\text{Pe}}\right)}{\frac{88}{768} - 8 \sum_{n=0}^{\infty} (G_n / \lambda_n^4) \exp\left(-\frac{\lambda_n^2 x^+}{\text{Pe}}\right)}, \quad (\text{P5.13})$$

где λ_n, G_n — функции, представленные в табл. 13.1. При $x^+ > 0,5\text{Pe}$ расчет по этому соотношению также дает величины, приближающиеся к постоянному значению, определенному формулой (5.25), см. рис. 5.4.

- а. Модифицировать программу численного расчета, описанную в разд. 13.3, получить численное решение этой задачи и сравнить полученные результаты с результатами расчета по соотношению (P5.13) при $10^{-4}\text{Pe} < x^+ < \infty$.
- б. При $x^+ \leq 0,001\text{Pe}$ решение (P5.13) можно приближенно выразить формулой

$$\text{Nu} = \frac{2,035}{(x^+/\text{Pe})^{1/3}}.$$

Сравнить результаты численного расчета с результатами вычислений по этой формуле.

- 5.20. При некоторых граничных условиях можно получить аналитические решения уравнения (5.3), не обращаясь к численным методам.

- а. Показать, что для двумерного ползущего течения решение уравнения (5.3), удовлетворяющего граничным условиям

$$T(0, y) = T_e, T(x, \pm h) = T_w, \text{ и на линии симметрии } \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = 0,$$

можно записать в виде

$$g(x^*, y^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\lambda_n} \sin \frac{\lambda_n}{2} \exp \left[-\frac{\lambda_n^2}{4} \frac{x^*}{G_z} \right] \cos \frac{\lambda_n}{2} y^*, \quad (\text{P5.14})$$

где $x^* = x/h, y^* = y/h$ и

$$g = \frac{T - T_w}{T_e - T_w}, \quad G_z = R_h \text{Pr}, \quad \lambda_n = (2n + 1)\pi.$$

- б. Используя определение местного числа Нуссельта (5.32) с заменой d_e на x , показать, что

$$\text{Nu}_x = \frac{2x^* \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[-\frac{\lambda_n^2}{4} \frac{x^*}{G_z} \right]}{\int_0^1 g dy^*}. \quad (\text{P5.15})$$

- в. Модифицировать программу численного расчета, описанную в разд. 13.3, получить численное решение этой задачи и сравнить полученные результаты с результатами расчета по формуле (P5.15).

- 5.21. Для течения в круглой трубе, исходя из баланса массы, можно получить соотношение

$$u_0 \pi r_0^2 = \int_0^{r_0} 2\pi r u dr. \quad (\text{P5.16})$$

Показать, что соотношение (P5.16) можно записать в преобразованных и исходных переменных в виде выражений

$$f(x, \eta, \rho) = \eta, \rho, \quad (\text{P5.17})$$

$$F(x, \sqrt{R_L}) = \sqrt{R_L}/2, \quad (\text{P5.18})$$

соответственно.

- 5.22. Показать, что координата оси Y_c равна $\sqrt{R_L}/2$ для круглой трубы и $\sqrt{R_L}$ для плоского канала.

- 5.23. Вывести уравнения (5.56b).

ЛИТЕРАТУРА

1. Shah R.K., London A.L., Laminar flow forced convection in ducts, in *Advances in Heat Transfer*, Supplement 1, Academic, N. Y., 1978.
2. Sparrow E.M., Loeffler A.L., Hubbard H.A., Heat transfer to longitudinal laminar flow between cylinders, *J. Heat Transfer*, **83**, 415 (1961). [Имеется перевод: Спарроу, Лоффлер-мл., Хаббард. Теплообмен при продольном обтекании цилиндров ламинарным потоком. — Труды амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1961, № 4, с. 31.]
3. Cebeci T., Chang K.C., A general method for calculating momentum and heat transfer in laminar and turbulent duct flows, *Numerical Heat Transfer*, **1**, 39 (1978).
4. Bradshaw P., Cebeci T., Whitelaw J.H., *Engineering Calculation Methods for Turbulent Flows*, Academic, London, 1981.
5. Pfenninger W., Further laminar flow experiments in a 40-foot long two-inch diameter tube, Northrop Aircraft, Hawthorne, CA, Rept AM-133, 1951.
6. Sellars J.R., Tribus M., Klein J.S., Heat transfer to laminar flow in a round tube or flat conduit — the Graetz problem extended, *Trans. ASME*, **78**, 441 (1956).

Несопряженные турбулентные пограничные слои

6

Основное различие между анализами турбулентного течения (гл. 6, 7) и ламинарного течения (гл. 4, 5) состоит в том, что для ламинарного течения коэффициенты переноса количества движения и тепла являются известными характеристиками, а для турбулентного течения эффективные коэффициенты переноса неизвестны. Величины коэффициентов турбулентного переноса зависят от результатов измерений таких параметров течения, как градиенты средних значений скорости и температуры, а также соответствующих турбулентных плотностей потока количества движения (напряжений Рейнольдса) и тепла, и обычно выражаются с помощью моделей, основанных на эмпирических данных.

Большинство течений, встречающихся в инженерной практике и в окружающей среде, являются турбулентными; те из них, в которых изменения плотности достаточно малы, можно считать несопряженными. Например, поля скоростей и характеристики теплообмена при обтекании водой тела пловца, при обтекании воздухом масляного радиатора движущегося автомобиля или при течении горячего газа в трубах отопления можно найти, решая последовательно уравнения движения и энергии. В гл. 10 и 12 рассматриваются ситуации, в которых возникают существенные изменения плотности, и тогда необходимо совместно решать эти уравнения. При изложении материала гл. 9 предполагается, что изменения плотности достаточно малы, так что для сопряжения уравнений движения и энергии достаточно лишь члена с выталкивающей силой в уравнении движения; в гл. 10 и 12 изменения плотности не считаются малыми, и сопряжение может касаться всех членов, содержащих теплофизические параметры. Однако следует отметить, что современные модели турбулентности для задач, в которых требуется найти решение сопряженных уравнений, основаны, как правило, на экспериментальных данных, полученных при *малых* изменениях температуры и плотности, и на решениях несопряженных уравнений.

Аналогия между процессами переноса тепла и количества движения, вытекающая из уравнений для установившегося ламинарного течения, сохраняется, хотя в не столь очевидной форме, и для

осредненных по времени уравнений, описывающих турбулентное течение. Поэтому трудно удержаться от соблазна решать задачи турбулентного теплообмена, задаваясь разумными значениями коэффициента аналогии Рейнольдса или кажущегося «турбулентного» числа Прандтля, представляющего собой отношение коэффициентов турбулентной кинематической вязкости и турбулентной теплопроводности. Действительно, до самого последнего времени именно так и поступали, но сейчас в инженерную практику внедряются более совершенные модели турбулентного переноса тепла, основанные на более тонких физических экспериментах, и используются последние достижения в разработке моделей турбулентности для переноса количества движения.

Поскольку результаты расчетов характеристик турбулентного переноса тепла (и количества движения) зависят от экспериментальных данных, точность этих результатов, если не повезет, не выше точности эмпирических данных. В общем точность результатов измерения характеристик теплообмена ниже точности результатов измерения поля скоростей. Даже современные экспериментальные исследования теплообмена между низкоскоростным пограничным слоем с нулевым градиентом давления и твердой стенкой, наиболее надежные из всех, имеют разброс результатов со стандартным отклонением порядка 10%. В противоположность этому скорость переноса количества движения в пограничном слое с постоянным давлением (конкретно коэффициент поверхностного трения c_f при заданном числе Рейнольдса) определяется с точностью 2% или даже лучшей. Значения теплового потока при турбулентном течении, т. е. величин $\overline{\rho c_p T' u'}$ и $\overline{\rho c_p T' v'}$ в случае плоского течения, получены на основании данных одновременного измерения пульсаций скорости и температуры и неизбежно имеют большую погрешность, чем значения потока количества движения, которые определяются только пульсациями скорости. Даже среднюю температуру значительно сложнее измерить, чем среднюю скорость, которая довольно просто и достаточно надежно определяется с помощью трубки полного напора. Все эти трудности приводят к тому, что погрешность эмпирических данных, необходимых для расчета теплообмена, редко бывает ниже 10%. Более того, поскольку теплообмен при обтекании тел существенным образом зависит от поля средних скоростей, точность результатов расчета турбулентного теплообмена для данного течения никогда не может быть выше (и наверняка существенно ниже) точности результатов расчета характеристик турбулентного переноса количества движения для того же самого течения.

*Коэффициент турбулентной вязкости
и турбулентное число Прандтля*

Простейший подход, позволяющий использовать результаты измерения характеристик переноса количества движения в сдвиговых слоях, состоит в том, чтобы ввести коэффициент «турбулентной» вязкости, аналогичный коэффициенту молекулярной вязкости μ , равному отношению напряжения к скорости сдвига, а затем, применяя эмпирические данные, найти корреляционную зависимость коэффициента турбулентной вязкости от толщины сдвигового слоя, скорости внешнего течения и других параметров (разд. 6.6). Для плоского тонкого сдвигового слоя, в котором касательное напряжение равно $-\overline{\rho u'v'}$, коэффициент турбулентной кинематической вязкости определяется соотношением

$$\epsilon_m = \frac{-\overline{u'v'}}{\partial u / \partial y}. \quad (6.1)$$

Аналогичные параметры можно ввести для турбулентного теплообмена. Точно так же, как из шести¹⁾ независимых (турбулентных) напряжений Рейнольдса в тонком сдвиговом слое наиболее важной является величина $-\overline{\rho u'v'}$, представляющая собой скорость турбулентного переноса x -составляющей количества движения в направлении y (по нормали к стенке в случае пограничного слоя), из трех составляющих скорости турбулентного переноса тепла наиболее важной является величина $\overline{\rho c_p T'v'}$, представляющая собой скорость турбулентного переноса энтальпии в направлении y . Коэффициент турбулентной температуропроводности для этой величины определяется формулой

$$\epsilon_h = \frac{-\overline{T'v'}}{\partial T / \partial y}. \quad (6.2)$$

¹⁾ Этими напряжениями являются $-\overline{\rho u'^2}$, $-\overline{\rho u'v'}$, $-\overline{\rho v'^2}$, $-\overline{\rho w'^2}$, $-\overline{\rho u'w'}$, $-\overline{\rho v'w'}$. Последние два равны нулю ввиду симметрии плоского течения, т. е. течения, в котором z -составляющая средней скорости w равна нулю, но величина $-\overline{\rho w'^2}$ не равна нулю. Напомним, что $-\overline{\rho u'_i u'_j}$ представляет собой напряжение, действующее в направлении x_i на поверхность, перпендикулярную оси x_j (разд. 2.4), например $-\overline{\rho u'v'}$ — это касательное напряжение, действующее в направлении x на поверхности, перпендикулярной оси y .

Отметим, что знак минус еще сохраняется: ожидается, что перенос тепла, как и перенос количества движения, происходит в направлении, *обратном* направлению градиента рассматриваемого параметра. Коэффициент турбулентной теплопроводности имеет ту же размерность, что и коэффициент турбулентной кинематической вязкости, а именно *скорость* \times *длина*. Нетрудно видеть, что, если в каждой точке течения средняя и пульсационная составляющие температуры пропорциональны соответственно средней и пульсационной составляющим скорости в направлении x , коэффициент турбулентной теплопроводности, определенный формулой (6.2), равен коэффициенту турбулентной кинематической вязкости, определенному формулой (6.1). Как отмечалось в гл. 1, никогда нельзя ожидать, что в турбулентном течении будет в точности выполняться аналогия между процессами переноса тепла и количества движения даже при точно аналогичных граничных условиях, поскольку член, содержащий пульсационную составляющую давления, входит в уравнения, определяющие поле скоростей, но не входит в уравнения, определяющие поле температур. Однако можно надеяться, что отношение ϵ_m/ϵ_h , называемое *турбулентным числом Прандтля* по аналогии с молекулярным числом Прандтля $Pr \equiv \nu/k \equiv \mu c_p/k$, обычно является величиной порядка единицы и может стать основой для корреляции экспериментальных данных. Поэтому вводится параметр

$$Pr_t \equiv \frac{\epsilon_m}{\epsilon_h} = \frac{\overline{u'v'}/(\partial u/\partial y)}{T \overline{v'}/(\partial T/\partial y)}. \quad (6.3)$$

На основании автомодельного анализа турбулентного течения вблизи твердой стенки (скажем, во внутренней области, толщина которой составляет 10—20% толщины теплового пограничного слоя) будет показано (разд. 6.1), что величина Pr_t в этой области должна быть постоянной. Поскольку характеристики пристенного турбулентного течения существенно зависят от параметров потока во внутреннем слое, можно ожидать, что будут получены достаточно точные результаты, если использовать предположение о постоянстве Pr_t поперек слоя. Это не является доказательством того, что параметр Pr_t действительно представляет собой универсальную постоянную, или даже того, что он имеет физический смысл. На самом деле это просто символ, обозначающий правую часть соотношения (6.3); во внутренней части слоя он достигает значения 0,9, но во внешней части пристенного слоя или в свободном сдвиговом слое снижается до 0,5 и существенно зависит от геометрии течения. Однако при расчете теплообмена очень часто применяют эмпирические соотношения для Pr_t , как это будет показано в разд. 6.2.

Усовершенствованные модели турбулентности

Усовершенствованные методы расчета турбулентного переноса количества движения и тепла основаны на решении точных уравнений переноса для $\overline{u'v'}$ и $\overline{T'v'}$, которые можно получить из уравнений движения и энтальпии. Левые части этих уравнений выражают скорость изменения $\overline{u'v'}$ и $\overline{T'v'}$ вдоль оси потока, т. е. $d\overline{u'v'}/dt$ и $d\overline{T'v'}/dt$, если использовать понятие субстанциональной производной или оператора переноса, определенное соотношением (2.10), без члена $\partial/\partial t$. Правые части уравнений содержат сложные осредненные по времени произведения пульсационных составляющих различных параметров, а также du/du или $\partial T/\partial u$, так что эти уравнения нельзя решить непосредственно. Однако использование эмпирических корреляционных соотношений, выражающих величины, входящие в правые части уравнений переноса, позволяет получить замкнутую систему уравнений, которая по крайней мере качественно выражает тот факт, что скорость изменения $\overline{u'v'}$ или $\overline{T'v'}$ зависит от местных условий. Соотношения (6.1) и (6.2) номинально показывают, что величина $\overline{u'v'}$ или $\overline{T'v'}$ зависит от местных условий и, следовательно, применима в принципе только для течений, местные параметры которых очень слабо изменяются в продольном направлении. Интервал применимости соотношений (6.1) и (6.2) реально ограничен только эмпирическими корреляционными соотношениями, использованными при определении ε_m и ε_h , но методам, связанным с решением уравнений переноса, отдают предпочтение при анализе сложных течений. Обзоры инженерных методов расчета турбулентных течений представлены в работах [1, 2].

6.1. Составная структура турбулентного пограничного слоя

Как отмечалось в разд. 4.1 и 4.2, для некоторых течений при особых граничных условиях уравнения ламинарного пограничного слоя имеют автомодельные решения. К этим течениям относятся разнообразные плоские и осесимметричные, внешние и свободные сдвиговые течения. Например, было показано, что для ламинарного течения на плоской пластине профили безразмерной скорости u/u_e и безразмерной температуры $(T_w - T)/(T_w - T_e)$ выражаются одной универсальной кривой, если строить их в зависимости от безразмерной координаты y , называемой *переменной подобия* $\eta \equiv (u_e/\nu x)^{1/2}y$. Геометрическое подобие профилей скорости сохраня-

ется независимо от числа Рейнольдса течения или величины местного коэффициента поверхностного трения. Для *турбулентных* сдвиговых слоев, исключая некоторые свободные сдвиговые течения, нельзя, выбрав одну безразмерную координату y , выразить весь профиль скорости единой кривой, поскольку зависящая от вязкости часть профиля (вблизи твердой стенки) и зависящая от напряжений Рейнольдса часть профиля выражаются в *различных* нормализованных линейных координатах. Напомним, что напряжения Рейнольдса (и скорости турбулентного перемешивания вообще) обычно намного больше соответствующих вязких напряжений и скоростей диффузии; однако на твердой стенке пульсации скорости, как и средние скорости, равны нулю, следовательно, касательное напряжение Рейнольдса $-\overline{\rho u'v'} = 0$, так что касательное напряжение на стенке целиком определяется вязкими напряжениями. С увеличением расстояния от стенки касательное напряжение Рейнольдса резко возрастает, а вязкое напряжение уменьшается и в итоге суммарное касательное напряжение остается примерно постоянным. Очень тонкий слой, характеристики течения в котором определяются вязкостью, называется *вязким подслоем* (более подробные сведения о нем приведены в разд. 6.2).

Если в ламинарном пограничном слое на плоской пластине поместить препятствие, то вначале профили скорости за препятствием далеки по своей форме от профиля Блазиуса, показанного на рис. 4.2. Однако при низких числах Рейнольдса, если слой продолжает развиваться за препятствием на достаточно большом расстоянии, профили скорости постепенно приближаются к профилю Блазиуса. В турбулентном пограничном слое влияние возмущений вблизи стенки (даже создаваемых препятствиями, высота которых существенно больше толщины очень тонкого вязкого подслоя) исчезает очень быстро из-за больших коэффициентов переноса и профили скорости быстро возвращаются к «нормальным» профилям пограничного слоя. Это явление было исследовано экспериментально [3]. Анализ экспериментальных данных, представленных на рис. 6.1, показывает, что профиль скорости во внутренней части турбулентного пограничного слоя быстрее восстанавливает нормальную форму, чем во внешней его части, а это свидетельствует о слабой зависимости течения в пристенной области от характеристик течения вдали от стенки и в области, расположенной выше по потоку. Данные, представленные на рис. 6.2 и 6.3, позволяют полнее выявить особенности этого явления. Приведены результаты исследования турбулентного течения в канале прямоугольного сечения, когда поток переходит с шероховатой поверхности на гладкую

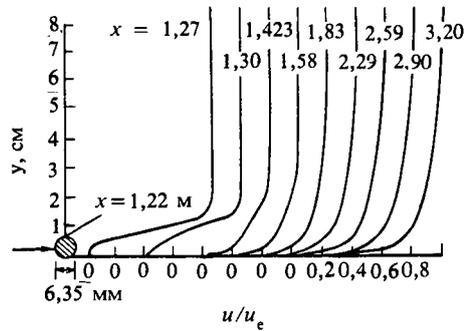


Рис. 6.1. Реакция турбулентного пограничного слоя на возмущение поверхности. Профили средней скорости турбулентного пограничного слоя на плоской пластине за цилиндрическим стержнем, расположенным на стенке на расстоянии 1,22 м от передней кромки [3].

и наоборот. Приведенные данные показывают, что в обоих случаях касательное напряжение вблизи стенки очень быстро принимает новое значение, соответствующее местным условиям на поверхности, в то время как вдали от стенки касательное напряжение, которое здесь приблизительно равно напряжению Рейнольдса $-\rho u'v'$ (поскольку вязкое касательное напряжение $\mu di/\partial y$ мало), изменяется

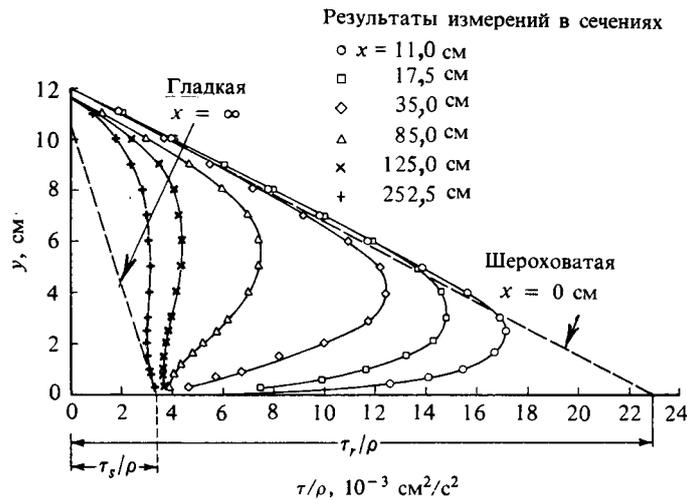


Рис. 6.2. Изменение профиля касательного напряжения для турбулентного течения в прямоугольном канале при переходе потока в сечении $x = 0$ с шероховатой поверхности на гладкую [4].

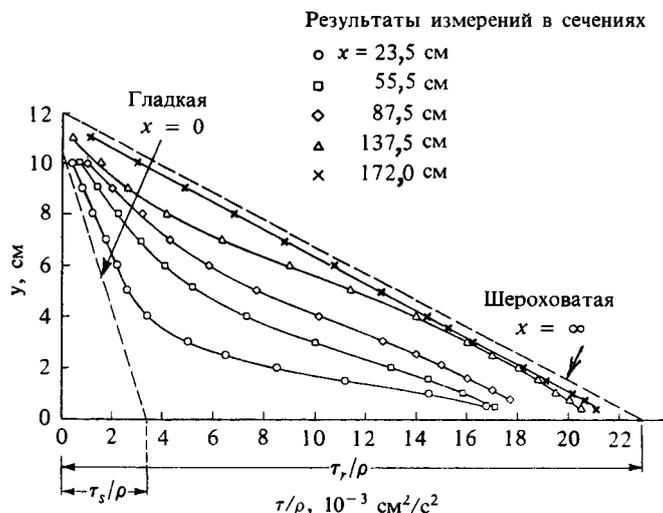


Рис. 6.3. Изменение профиля касательного напряжения для турбулентного течения в прямоугольном канале при переходе потока с гладкой поверхности на шероховатую [4].

очень медленно. Фактически новое равновесное состояние достигается лишь на довольно большом расстоянии от начала шероховатой поверхности. Хотя исследовалось течение в канале, основные особенности явления будут такими же и для течения в пограничном слое, а также в случае, когда возмущения создаются не изменением шероховатости поверхности, а изменением скорости массообмена на стенке.

На основании рассмотренных экспериментальных фактов можно сделать вывод о том, что характеристики течения во всем пограничном слое нельзя описать с помощью одного набора параметров, как это можно было сделать для некоторых типов ламинарного пограничного слоя, например слоя на плоской пластине. Поэтому необходимо рассматривать турбулентный пограничный слой как составной, включающий в себя внутреннюю и внешнюю области с различными масштабами длины и скорости даже в том случае, когда продольный градиент давления равен нулю. Предыдущие рассуждения о влиянии возмущений на профиль скорости относятся, как будет показано ниже, и к влиянию изменения теплового потока в стенку на профиль температуры.

Анализ внутренней части слоя, проведенный в разд. 6.2 для $y < 0,2 \delta$, справедлив для плоского пограничного слоя при внешнем

обтекании тел со слабыми или умеренными градиентами давления, а также для течения в осесимметричном или плоском канале. Аналогичный анализ можно провести для теплового пограничного слоя; в этом случае анализ внутренней части слоя является номинально универсальным, в то время как результаты анализа внешней части слоя (разд. 6.3) справедливы только для течений с постоянным давлением и постоянной температурой поверхности или постоянной плотностью теплового потока в стенку.

В разд. 6.2—6.4 проведен последовательный анализ профиля скорости с последующим анализом профиля температуры. Отметим, что рассматривается течение с постоянными свойствами, так что влиянием изменения плотности и вязкости на профиль скорости пренебрегается. Обобщенный анализ для случая течения с переменными свойствами представлен в гл. 11.

6.2. Внутренняя часть слоя

Профиль скорости

Анализ профиля скорости во внутренней части несопряженного пограничного слоя толщиной δ на гладкой поверхности, обтекаемой внешним потоком со скоростью u_e , начинается с вполне разумного предположения, что при достаточно малых y/δ характеристики течения не должны зависеть непосредственно от δ или u_e , а должны определяться расстоянием y от стенки, напряжением поверхностного трения τ_w и свойствами рабочего тела (а именно, ρ и μ). Поскольку течение является несопряженным, величина ρ по определению постоянна и особенности изменения поля температур учитывать не нужно. В качестве масштаба скорости можно ввести величину $u_\tau \equiv (\tau_w/\rho)^{1/2}$, называемую *динамической скоростью*, так что отношение v/u_τ имеет размерность длины. Если отнести среднюю скорость u к масштабу скорости u_τ , а координату y — к масштабу длины v/u_τ , то связь между u и y можно выразить в виде безразмерного соотношения

$$\frac{u}{u_\tau} = f_1\left(\frac{u_\tau y}{\nu}\right), \quad (6.4)$$

которое называется *законом стенки*. Пока вид функции f_1 неизвестен.

Описанный процесс нормализации можно провести более строго, проверяя, все ли безразмерные комплексы найдены. Это вряд ли необходимо делать для рассматриваемого простого случая, но такой анализ может иметь существенное значение в более сложных

задачах, например при выводе закона стенки для температуры, который приводится ниже. Удобным способом является метод «исключения из матрицы», предложенный Тейлором [5]; его превосходство над другими методами состоит в том, что можно легко использовать уже известные безразмерные комплексы, а это позволяет существенно упростить анализ по сравнению с теми методами, которые начинаются с положения, когда неизвестен ни один безразмерный комплекс. В качестве примера использования указанного метода рассмотрим профиль скорости во внутренней части пограничного слоя. Прежде всего выпишем все определяющие параметры, а именно u , y , τ_w , ρ и μ , составим матрицу, столбцы которой представляют собой основные единицы измерения (массу, длину, время), и выразим размерности всех параметров строками этой матрицы:

$$\begin{array}{c}
 \\
 u \\
 v \\
 \tau_w \\
 \mu \\
 \rho
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 M & L & T \\
 \left| \begin{array}{ccc}
 0 & 1 & -1 \\
 0 & 1 & 0 \\
 1 & -1 & -2 \\
 1 & -1 & -1 \\
 1 & -3 & 0
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

Например, τ_w имеет ту же размерность, что и давление или напряжение, и, замечая, что ρu^2 имеет размерность давления, размерность τ_w можно выразить в виде комплекса $ML^{-3}(L^2T^{-2})$. Теперь исключаем размерность массы, разделив все, кроме одного, параметры, в размерностях которых содержится масса, на оставшийся параметр, в размерность которого входит масса; исходя из наших знаний в области гидродинамики, выбираем в качестве такого опорного параметра ρ , получая в итоге

$$\begin{array}{c}
 \\
 u \\
 y \\
 \frac{\tau_w}{\rho} \\
 \frac{\mu}{\rho} \\
 \rho
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 M & L & T \\
 \left| \begin{array}{ccc}
 0 & 1 & -1 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 2 & -2 \\
 0 & 2 & -1 \\
 1 & -3 & 0
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

Очевидно, что в рассматриваемой задаче плотность не может больше входить ни в один безразмерный комплекс, за исключением τ_w/ρ или μ/ρ , поскольку нет другого способа избавиться эти комплексы от размерности массы, и, следовательно, ее можно исключить из матрицы.

Теперь переходим к исключению размерности времени просто потому, что в столбце T (времени) больше нулей, чем в столбце L (длины). Вновь используя наши знания в области гидродинамики для выбора физически осмысленных комбинаций параметров, получаем

$$\begin{array}{c} \frac{u}{\sqrt{\tau_w/\rho}} \\ y \\ \frac{\mu/\rho}{\sqrt{\tau_w/\rho}} \end{array} \left| \begin{array}{cc} L & T \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right| .$$

Размерность длины можно исключить, только формируя комплекс $y\sqrt{\tau_w/\rho}/(\mu/\rho)$. Никаких других безразмерных комплексов нельзя сформировать. Итак, получаем соотношение

$$f \left[\frac{u}{\sqrt{\tau_w/\rho}}, \frac{y\sqrt{\tau_w/\rho}}{\mu/\rho} \right] = 0,$$

которое при использовании обычных обозначений равносильно соотношению (6.4).

Профиль температуры

Рассматривая профиль температуры, можно ожидать, что в список определяющих параметров вновь будут входить y , τ_w , ρ и μ , поскольку поле температур зависит от поля скоростей; величина u в этот список не включена, поскольку она определяется соотношением (6.4). Так как поле скоростей зависит от скорости переноса количества движения к поверхности τ_w , можно ожидать, что поле температур по аналогии будет зависеть от плотности теплового потока, поступающего от стенки к течению \dot{q}_w . Кроме того, можно ожидать, что в число определяющих параметров будут входить k и c_p . Следует отметить, что комплекс $\dot{q}_w/\rho c_p$ имеет размерность *скорость × температура* и что в настоящее время \dot{q}_w выражают в механических единицах, например в кВт/м², так что «механический эквивалент тепла» выпадает из расчетных формул. Кроме того, отметим, что энергия на единицу массы имеет размерность (скорость)² и отдельного определения размерности не требуется. Далее, если анализ поля течения проводится только при $y/\delta < 0,2$, можно ожидать, что по аналогии анализ поля температур ограничивается примерно областью $y/\delta_t < 0,2$, где δ_t — толщина теплового погра-

ничного слоя. Если стенка нагревается на всем ее протяжении от начала пограничного слоя, нагревается вся жидкость, участвующая в турбулентном движении, и пока молекулярное число Прандтля не слишком сильно отличается от единицы, величина δ_t будет примерно равной δ , если используются аналогичные определения δ и δ_t . Однако ниже будет показано, что результаты анализа поля температур во внутренней части слоя с хорошей инженерной точностью применимы на достаточно большом расстоянии от точки ступенчатого изменения \dot{q}_w (так что $\delta_t < \delta$) при $y/\delta_t < 0,2$; очевидно, что в этом случае условие $y/\delta_t < 0,2$ представляет собой более сильное ограничение, чем $y/\delta < 0,2$. Наконец, укажем, что температуру, как и скорость, следует измерять относительно соответствующего значения на стенке; температурный перепад записывается в виде $T_w - T$, так что он обычно положителен при положительном значении \dot{q}_w .

Теперь имеется восемь определяющих параметров: y , τ_w , ρ , μ , k , c_p , \dot{q}_w и $T_w - T$, имеющих *четыре* размерности: массу, длину, время и температуру. Теория размерностей (или метод Тейлора) позволяет сделать вывод, что существует $8 - 4 = 4$ независимых безразмерных комплекса и удобнее всего найти соотношение между $T_w - T$ и y (профиль температуры), применяя метод исключения Тейлора (задача 6.1):

$$\frac{T_w - T}{\dot{q}_w / \rho c_p u_\tau} = f_2 \left(\frac{u_\tau y}{\nu}, \frac{\mu c_p}{k}, \frac{\rho u_\tau^2}{\dot{q}_w} \right), \quad (6.5a)$$

где величина $\dot{q}_w / \rho c_p u_\tau$ называется *динамической температурой* и обозначается T_τ по аналогии с динамической скоростью u_τ . Вторым комплексом в правой части соотношения (6.5a) является молекулярное число Прандтля, являющееся теплофизическим свойством жидкости. Последний комплекс, который затруднительно было бы найти интуитивно и который можно было бы вообще пропустить, если бы не была проведена описанная выше проверка общего числа независимых безразмерных комплексов, можно трактовать как отношение изменения по времени работы движущейся жидкости против напряжения поверхностного трения $\tau_w \equiv \rho u_\tau^2$ (пропорциональной произведению τ_w на масштаб скорости u_τ) к скорости подвода энергии путем переноса тепла от поверхности \dot{q}_w . В низкоскоростном течении (с постоянными свойствами) это отношение очень мало, так что «кинетический нагрев» течения вследствие диссипации механической энергии в тепловую, выраженный через работу, совершаемую против напряжения поверхностного трения τ_w , пренебрежимо мал. В дальнейшем будем пренебрегать последним ком-

плексом в правой части соотношения (6.5a) и заметим только, что анализ размерностей, являющийся разделом математики, а не физики, часто дает правильные, но не имеющие существенного значения параметры. В итоге получаем закон стенки для температуры, который используется на практике при анализе несопряженных турбулентных течений,

$$\frac{T_w - T}{T_\tau} = f_2\left(\frac{u_\tau y}{\nu}, \text{Pr}\right). \quad (6.5b)$$

Логарифмический профиль

На следующем этапе анализа профиля скорости после вывода соотношения (6.4) проводится дифференцирование этого соотношения. После преобразования получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_\tau}{y} f_3\left(\frac{u_\tau y}{\nu}\right), \quad (6.6)$$

где $f_3(Z) = Z(df_1/dZ)$ для любой переменной Z . Как нетрудно видеть, $u_\tau y/\nu$ имеет форму числа Рейнольдса и можно ожидать, что если величина $u_\tau y/\nu$ достаточно велика, то вязкость будет оказывать слабое влияние на местные особенности профиля скорости. В таком случае

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_\tau}{\kappa y}, \quad (6.7)$$

где κ — универсальная постоянная, а не коэффициент температуропроводности. На основании экспериментальных данных установлено, что формула (6.7) справедлива приблизительно при $u_\tau y/\nu > 50$, а величина κ составляет примерно 0,40—0,41. По аналогии можно ожидать, что при $u_\tau y/\nu > 50$ вязкость будет оказывать слабое влияние на профиль температуры; кроме того, если величина комплекса

$$\frac{u_\tau y}{\nu} \text{Pr} \equiv \frac{u_\tau y}{k/\rho c_p} \quad (6.8)$$

велика (предположительно больше ~ 50), влияние теплопроводности на профиль температуры также будет слабым. Этот комплекс имеет форму числа Пекле и выражает отношение скоростей переноса тепла путем конвекции и молекулярной диффузии; знаменатель $k/\rho c_p$ представляет собой «коэффициент диффузии тепла», или «коэффициент температуропроводности», и ниже будет показано, что

коэффициент турбулентной теплопроводности пропорционален $u_\tau y$. Отметим, что, если Pr больше единицы (для жидкости с высокой вязкостью и(или) низкой теплопроводностью), условие пренебрежимости влиянием вязкости $u_\tau y/\nu > 50$ является более жестким ограничением (нижняя предельная величина y должна быть больше) по сравнению с условием пренебрежимости влиянием теплопроводности $(u_\tau y/\nu)Pr > 50$, а если $Pr < 1$, то наблюдается противоположная картина. Если оба условия выполняются, то можно ожидать, что μ и k не влияют на местное изменение $\partial T/\partial y$, и, проводя формальное дифференцирование соотношения (6.5) без параметра кинетического нагрева $\rho u_\tau^3/\dot{q}_w$ в правой части, получаем соотношение

$$\frac{\partial(T_w - T)}{\partial y} = \frac{T_\tau}{y} f_4\left(\frac{u_\tau y}{\nu}, \frac{\mu c_p}{k}\right), \quad (6.9)$$

аналогичное соотношению (6.6), и далее

$$\frac{\partial(T_w - T)}{\partial y} = \frac{T_\tau}{\kappa_h y}, \quad (6.10)$$

где κ_h — универсальная постоянная, которая, как можно ожидать, примерно равна κ . На основании экспериментальных данных установлено, что нижним пределом применимости соотношения (6.10) действительно является меньшее из значений $u_\tau y/\nu \approx 50$ и $(u_\tau y/\nu)Pr \approx 50$ (эти пределы, правда, установлены недостаточно корректно, поскольку соотношение (6.10), как и соотношение (6.7), становится справедливым асимптотически) и что величина κ_h составляет примерно 0,44. Различие между κ и κ_h не столь уж существенно, особенно если учесть трудности экспериментального измерения \dot{q}_w и $T(y)$, причем последняя функция еще и дифференцируется; кроме того, согласно опубликованным данным, диапазоны изменения величин κ и κ_h перекрываются.

Интегрируя соотношение (6.7) по y и выполняя условие совместности с соотношением (6.4), получаем

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_\tau y}{\nu} + c, \quad (6.11a)$$

или

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + c, \quad (6.11b)$$

где c — постоянная, величина которой, согласно экспериментальным данным, составляет примерно 5,0—5,2. Соотношение (6.11)

представляет собой логарифмический закон изменения скорости. Аналогичным образом, интегрируя соотношение (6.10) и выполняя условие совместности с соотношением (6.5), получаем

$$\frac{T_w - T}{T_\tau} = \frac{1}{\kappa_h} \ln \frac{u_\tau y}{\nu} + c_h, \quad (6.12a)$$

или

$$T^+ = \frac{1}{\kappa_h} \ln y^+ + c_h, \quad (6.12b)$$

где c_h является функцией Pr. Кажется более логичным выразить аргумент логарифма через число Пекле $y^+ Pr$, т. е. применить коэффициент температуропроводности вместо коэффициента вязкости, но это повлияет лишь на вид функциональной зависимости c_h от Pr, но не исключит ее вообще, а представленное соотношение легче сравнивать с соотношением (6.11).

Напомним пределы применимости проведенного анализа:

1. Логарифмический профиль скорости (6.11) существует приблизительно при $50\nu/u_\tau < y < 0,2 \delta$.

2. Логарифмический профиль температуры (6.12) существует приблизительно при $[50\nu/u_\tau, 50\nu/(u_\tau Pr)] < y < 0,2 \delta$.

В течениях с массообменом на стенке или со значительными продольными градиентами давления касательное напряжение τ будет изменяться по y даже во внутренней части слоя, а, если \dot{q}_w изменяется по x или в жидкости есть источники тепла, плотность теплового потока \dot{q} также будет изменяться по y . В этих случаях в правых частях соотношений (6.7) и (6.10), по-видимому, следует применять местные значения параметров, а не их значения на стенке, что приводит к соотношениям

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(\tau/\rho)^{1/2}}{\kappa y} = \frac{(-\overline{u'v'})^{1/2}}{\kappa y}, \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial(T_w - T)}{\partial y} = \frac{(\dot{q}/\rho c_p)}{(\tau/\rho)^{1/2} \kappa_h y} = \frac{\overline{T'v'}}{(-\overline{u'v'})^{1/2} \kappa_h y}, \quad (6.14)$$

справедливым примерно в тех диапазонах, что и логарифмические законы, которые они заменяют. Очевидно, что в этих диапазонах вкладом молекулярных составляющих в τ и \dot{q} можно пренебречь.

Соотношение (6.13), видимо, справедливо для течений с массообменом (задача 6.5) даже при больших значениях $\partial\tau/\partial y$, но оно не намного точнее соотношения (6.7) для пограничного слоя с резко

изменяющимися характеристиками в направлении потока, поскольку при выводе обоих соотношений предполагается, что влияние изменения скоростей переноса в продольном направлении мало. Соотношение (6.14) имеет еще меньше преимуществ, связанных в основном с высокоскоростными течениями, в которых \dot{q} изменяется по y вследствие кинетического нагрева; данные исследований высокоскоростных течений также подтверждают применимость соотношения (6.13) в случаях, когда ρ , но не τ изменяется по y .

Вязкий подслой и теплопроводный подслой

Соотношения (6.11) и (6.12) применимы в области, расположенной на достаточном удалении от стенки, так что можно пренебречь влиянием вязкости и проводимости, включая влияние вязкого касательного напряжения и теплопроводности. В области, достаточно близкой к поверхности, где можно пренебречь турбулентным касательным напряжением (на практике приблизительно при $y^+ < 3$), на основании закона вязких напряжений получаем просто

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy}, \quad (6.15a)$$

или

$$u = \frac{\tau_w y}{\mu}, \quad (6.15b)$$

или

$$u^+ = y^+, \quad (6.15c)$$

т. е., как и следовало ожидать, получается частный случай соотношения (6.4). Рассматривая профиль температуры, на основании закона теплопроводности при $y^+ \text{Pr} < 3$ и $y^+ < 3$ находим

$$\dot{q}_w = -k \frac{dT}{dy}, \quad (6.16a)$$

или

$$T_w - T = \frac{\dot{q}_w y}{k}, \quad (6.16b)$$

или

$$T^+ = y^+ \text{Pr}. \quad (6.16c)$$

что является частным случаем соотношения (6.5b).

В вязком подслое закон стенки (6.4) можно представить, применяя один из нескольких эмпирических подходов. Можно получить хорошее приближение профиля скорости в вязком подслое, заменив

соотношение (6.13) эмпирической корреляционной зависимостью [6]

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(-\overline{u'v'})^{1/2}}{\kappa y [1 - \exp(-y/A)]}. \quad (6.17)$$

Здесь A — постоянная «длина демпфирования», которая для наиболее точного описания экспериментальных данных должна быть равна значению, правильному с точки зрения размерности и составляющему примерно $26\nu/u_\tau$. Нетрудно видеть, что при $y \gg A$ (в действительности при $u_\tau y/\nu > 50$, как отмечалось ранее) соотношение (6.17) сводится к формуле (6.13). Теперь можно исключить $-\overline{u'v'}$, замечая, что суммарное касательное напряжение $-\rho\overline{u'v'} + \mu(du/dy)$ практически не зависит от y и равно $\tau_w \equiv \rho u_\tau^2$. Получаем

$$\nu \frac{du}{dy} + (\kappa y)^2 \left[1 - \exp\left(\frac{-y}{A}\right)\right]^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = u_\tau^2. \quad (6.18)$$

Решая это квадратное уравнение относительно du/dy и применяя безразмерные переменные, находим

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a}}{2a}, \quad (6.19)$$

где $a = (\kappa y^+)^2 [1 - \exp(-y^+/A^+)]^2$ и $A^+ = 26$. Это уравнение можно формально проинтегрировать и получить в результате

$$u^+ = \int_0^{y^+} \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4a}} dy^+, \quad (6.20)$$

но интеграл приходится рассчитывать численным методом. Окончательный профиль скорости показан на рис. 6.4.

Соотношение (6.5), как и соотношение (6.4), можно обобщить, включив в рассмотрение (теплопроводный) подслой и применяя ту же методику, которая использовалась при анализе профиля скорости. Выполняя требование о том, чтобы тепловой поток не зависел от y и был равен \dot{q}_w , получаем

$$\frac{k}{\rho c_p} \frac{dT}{dy} - \overline{T'v'} = -\frac{\dot{q}_w}{\rho c_p}. \quad (6.21)$$

Используя определение коэффициента турбулентной температуропроводности (6.2), перепишем уравнение (6.21) в виде

$$\left(\frac{1}{\text{Pr}} + \varepsilon_h^+\right) \frac{dT}{dy} = -\frac{\dot{q}_w}{\rho c_p \nu}, \quad (6.22a)$$

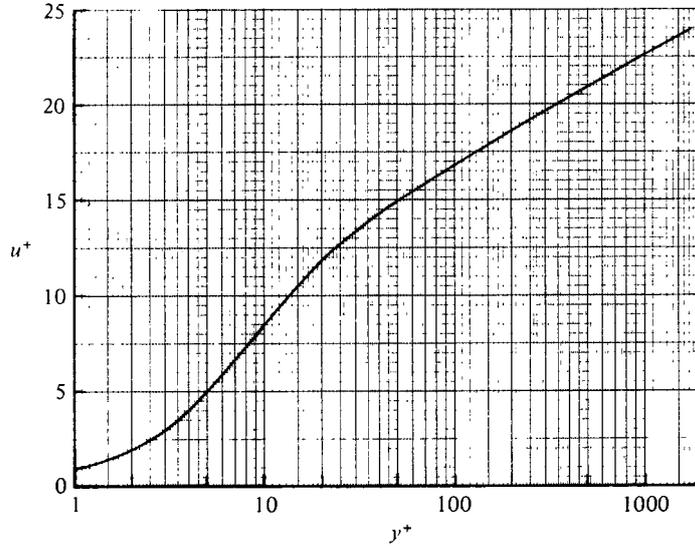


Рис. 6.4. Профиль безразмерной скорости во внутренней части пограничного слоя.

где $\varepsilon_h^+ \equiv \varepsilon_h/\nu$, или в безразмерном виде

$$\frac{dT^+}{dy^+} = \frac{1}{1/\text{Pr} + \varepsilon_h^+}. \quad (6.22b)$$

Чтобы проинтегрировать это уравнение, необходимо знать выражение для ε_h^+ . Рассматривая уравнение (6.22), нетрудно видеть, что в теплопроводном подслое, где величина ε_h^+ мала, профиль температуры при $\text{Pr} < 1$ определяется членом $1/\text{Pr}$. Это означает, что для жидкостей с низким числом Прандтля характер изменения ε_h^+ в пристенной области не имеет существенного значения при расчете профиля температуры. С другой стороны, если величина Pr не мала по сравнению с единицей, то член безразмерной турбулентной теплопроводности играет важную роль даже в пристенной области. Если применить формулу (6.17), то соотношение (6.14) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial(T_w - T)}{\partial y} = \frac{\overline{T'v'}}{(-\overline{u'v'})^{1/2} \kappa_h y [1 - \exp(-y/B)]}, \quad (6.23)$$

так что

$$\varepsilon_h = (-\overline{u'v'})^{1/2} \kappa_h y \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{B}\right) \right], \quad (6.24)$$

где величина B равна отношению ν/u_τ , умноженному на функцию Pr , которую необходимо найти эмпирически. В соответствии с моделью, предложенной Себиси [7, 8], искомую функцию можно достаточно точно выразить с помощью ряда по степеням $\lg \text{Pr}$:

$$B = \frac{B^+ \nu}{u_\tau}, \quad B^+ = \frac{1}{\text{Pr}^{1/2}} \sum_{i=1}^5 C_i (\lg \text{Pr})^{i-1}, \quad (6.25)$$

где $C_1 = 34,96$, $C_2 = 28,79$, $C_3 = 33,95$, $C_4 = 6,3$ и $C_5 = -1,186$. Если использовать определение коэффициента турбулентной кинематической вязкости (6.1) и соотношение (6.17), то можно записать

$$\text{Pr}_t = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h} = \frac{\kappa}{\kappa_h} \frac{1 - \exp(-y/A)}{1 - \exp(-y/B)}. \quad (6.26)$$

Из соотношения (6.17) следует также

$$\varepsilon_m = \kappa^2 y^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{A}\right) \right]^2 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (6.27a)$$

или в безразмерной форме

$$\varepsilon_m^+ = \kappa^2 y^{+2} \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right]^2 \frac{\partial u^+}{\partial y^+}. \quad (6.27b)$$

Величина $\varepsilon_m/\varepsilon_h$ представляет собой отношение коэффициента турбулентного переноса количества движения к коэффициенту турбулентного переноса тепла [см. равенство (6.3)], т. е. это — турбулентное число Прандтля Pr_t . В таком случае уравнение (6.22b) можно записать в виде

$$\frac{dT^+}{dy^+} = \frac{1}{1/\text{Pr} + \varepsilon_m^+/\text{Pr}_t}. \quad (6.28)$$

Уравнение (6.28) можно проинтегрировать численно и найти зависимость T^+ от y^+ , если выразить $\text{Pr}_t \equiv \varepsilon_m/\varepsilon_h$ и ε_m^+ с помощью соотношений (6.26) и (6.27b), определяя $\partial u^+/\partial y^+$ по формуле (6.19). На рис. 6.5 представлены зависимости Pr_t от y^+ при различных значениях Pr , а на рис. 6.6 приведены расчетные профили T^+ .

Внутренняя часть слоя на шероховатой поверхности

До сих пор мы проводили анализ автомодельных профилей скорости и температуры во внутренней части турбулентного пограничного слоя на гладкой поверхности, имеющей постоянную температуру. Теперь будет проведен аналогичный анализ для шероховатых

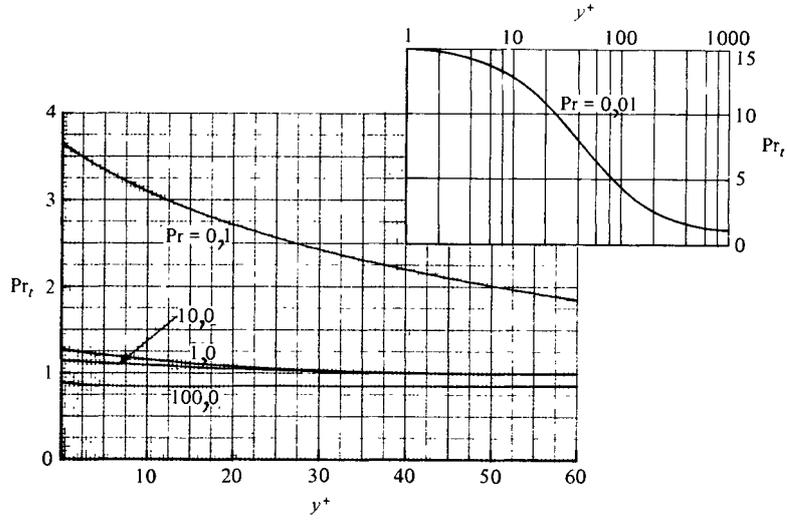


Рис. 6.5. Зависимости турбулентного числа Прандтля от y^+ при различных значениях молекулярного числа Прандтля Pr .

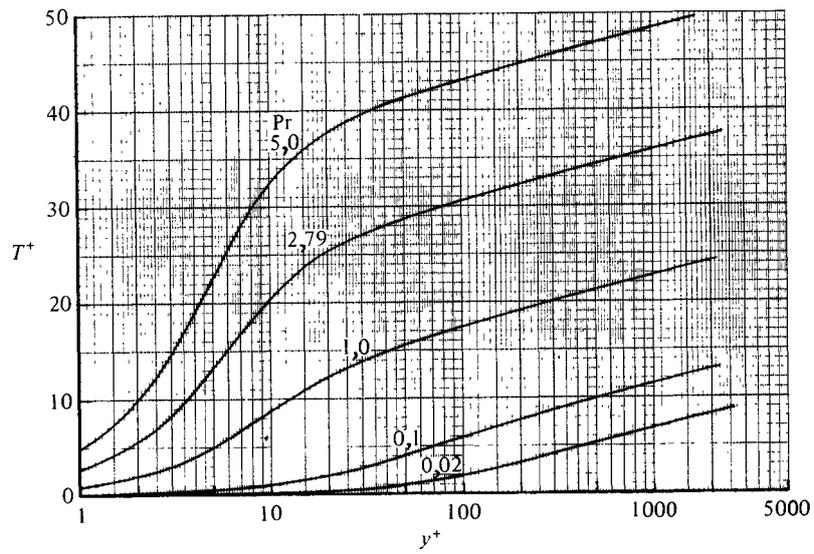


Рис. 6.6. Зависимости средней температуры в пограничном слое T^+ от y^+ при различных значениях молекулярного числа Прандтля.

поверхностей; шероховатость стенки оказывает существенное влияние на характеристики турбулентного пограничного слоя, если высота элементов шероховатости k удовлетворяет условию $u_\tau k/\nu > 5$ (приблизительно)¹⁾. Поскольку в большинстве случаев толщина вязкого подслоя очень мала, меньше 1% толщины сдвигового слоя в пограничном слое при $u_e \delta/\nu > 10^5$, высота элементов шероховатости должна быть очень малой, если требуется, чтобы поверхность была аэродинамически гладкой.

Проведенный выше анализ размерностей для гладкой поверхности можно обобщить на случай шероховатой поверхности, включив дополнительно высоту шероховатости k , а также геометрию элементов шероховатости и плотность их расположения в список определяющих параметров, использованных при выводе соотношений (6.4) и (6.5). В результате (задача 6.2) соотношения (6.4) и (6.5) будут содержать дополнительный безразмерный комплекс — *число Рейнольдса шероховатости*

$$k^+ = \frac{u_\tau k}{\nu}, \quad (6.29)$$

и указанные выше геометрические характеристики шероховатости. Поскольку следует ожидать, что при $y \gg k$ соотношения (6.6) и (6.10) будут независимы от k подобно тому, как при $y \gg \nu/u_\tau$ они не зависят от ν , очевидный способ, позволяющий определить влияние шероховатости, состоит в том, чтобы выразить постоянные интегрирования s и s_h , входящие в соотношения (6.11) и (6.12), в виде эмпирических функций от k^+ и геометрических характеристик шероховатости. При заданной форме элементов шероховатости соотношение (6.11) можно записать в виде

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B_1(k^+). \quad (6.30)$$

Разумно предположить, что величина κ будет той же самой, что и для гладкой поверхности, поскольку κ в этом случае не зависит от течения в подслое и, следовательно, можно ожидать, что то же самое будет справедливо и для шероховатой поверхности. Если принять

$$B_2 = \frac{1}{\kappa} \ln k^+ + B_1(k^+), \quad (6.31)$$

¹⁾ Обозначение высоты шероховатости символом k , равно как и обозначение постоянной, входящей в соотношение (6.7), символом κ , является общепринятым, хотя эти обозначения вносят некоторую путаницу при изложении теории теплообмена.

то соотношение (6.30) можно записать в форме

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ - \frac{1}{\kappa} \ln k^+ + B_2 = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k} + B_2. \quad (6.32)$$

Если теперь принять

$$\Delta u^+ = \frac{\Delta u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln k^+ + c - B_2, \quad (6.33)$$

где величина c равна соответствующему значению для гладкой поверхности, то соотношение (6.32) можно будет записать следующим образом:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + c - \Delta u^+. \quad (6.34)$$

Здесь Δu^+ , как и B_2 , является функцией геометрии и плотности расположения элементов шероховатости. Зависимость Δu^+ от k^+ находится эмпирически для элементов шероховатости различной формы (рис. 6.7).

Из соотношения (6.34) следует, что, поскольку для заданной геометрии шероховатости Δu^+ является известной функцией k^+ , вли-

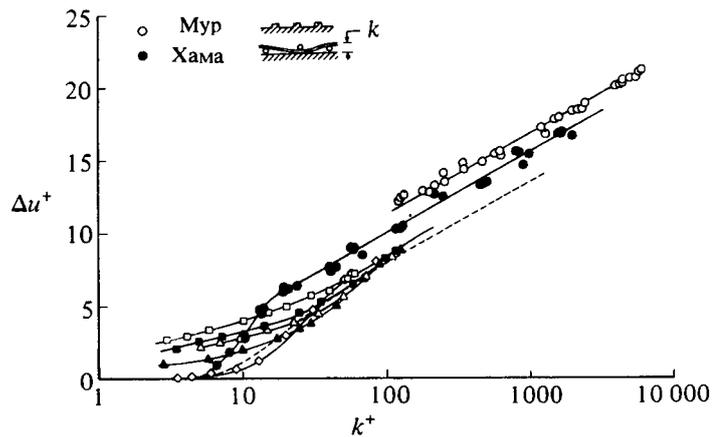


Рис. 6.7. Влияние шероховатости поверхности на универсальные профили скорости [9].

--- зависимость для песочной шероховатости Прандтля — Шлихтинга; данные Коулбрука и Уайта; □ 95% гладкая поверхность, 5% крупные зерна; ■ 48% гладкая поверхность, 47% мелкие зерна, 5% крупные зерна; △ 95% песок, 5% крупные зерна; ▲ 97,5% песок, 2,5% крупные зерна; ○ песок.

яние шероховатости проявляется только в том, что логарифмическая часть профиля сдвигается вниз на величину Δu^+ , как показано на рис. 6.8. При значениях k^+ , меньших примерно 5, сдвиг по вертикали Δu^+ стремится к нулю, исключая случай шероховатой поверхности с настолько широким распределением размеров элементов шероховатости, что некоторые наиболее крупные из них выступают за пределы вязкого подслоя, несмотря на то что средняя высота шероховатости меньше толщины подслоя. При больших значениях k^+ сдвиг по вертикали пропорционален $\ln k^+$, причем коэффициент пропорциональности равен $1/k$, и сравнение соотношений (6.32) и (6.34) позволяет сделать вывод, что B_2 не зависит от k^+ . Это означает, что сопротивление элементов шероховатости не зависит от вязкости, и этот вывод можно считать разумным результатом для случая обтекания препятствий при больших числах Рейнольдса.

Для поверхностей с равномерно распределенной шероховатостью отчетливо различаются три режима (рис. 6.7). В случае плотной шероховатости песочного типа можно приближенно определить границы этих режимов следующим образом:

1. Режим обтекания гидравлически гладкой поверхности: $k_s^+ \leq 5$.
2. Переходный режим: $5 \leq k_s^+ \leq 70$.
3. Режим полного проявления шероховатости: $k_s^+ \geq 70$.

Поскольку в переходном режиме молекулярная вязкость продолжает играть заметную роль, геометрия элементов шероховатости оказывает сравнительно сильное влияние на величину сдвига скорости (рис. 6.7). Однако, поскольку величины сдвига скорости в режиме полного проявления шероховатости линейны в полулогарифмических координатах (рис. 6.7), при построении профилей можно ис-

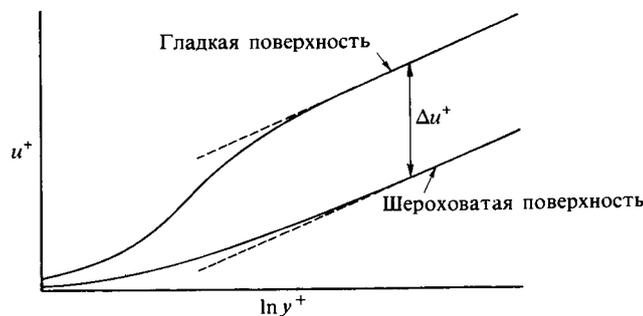


Рис. 6.8. Профили средней скорости при обтекании гладкой и шероховатой поверхностей, построенные в координатах y^+ , u^+ .

пользовать для сравнения различных геометрических форм шероховатости некий эталон шероховатости. Из соотношения (6.33) следует, что при одинаковом сдвиге скорости Δu^+ высоты двух шероховатостей связаны соотношением

$$\frac{k}{k_s} = \exp[\kappa(B_2 - B_{2,s})], \quad (6.35)$$

где индекс s относится к эталонной шероховатости, в качестве которой обычно выбирается равномерная песочная шероховатость.

Теплообмен при обтекании шероховатой поверхности

В рассматриваемой задаче применение изложенных выше рассуждений для постоянной интегрирования c_h , входящей в соотношение (6.12), служит наглядным примером, показывающим различия между процессами переноса количества движения и тепла. Перенос количества движения в режиме полного проявления шероховатости (скажем, при $k^+ > 200$) осуществляется вследствие возмущений давления элементами шероховатости, в то время как молекулярный (вязкий) перенос пренебрежимо мал. С другой стороны, теплообмен на шероховатой поверхности всегда осуществляется посредством механизма молекулярного (кондуктивного) переноса, и поэтому постоянная интегрирования зависит от k^+ — точнее от $k^+ Pr$ — даже при очень больших числах Рейнольдса шероховатости. Следовательно, предельная форма выражения для c_h при больших k^+ , рассмотренная в других обозначениях Джайатиллеком, выглядит следующим образом:

$$c_h = f(k^+ Pr). \quad (6.36)$$

6.3. Внешняя часть слоя

За пределами вязкого подслоя профиль скорости установившегося плоского пограничного слоя с постоянными свойствами при постоянном давлении, а значит, и при постоянной скорости u_e , не зависит от вязкости и можно вполне обоснованно предположить, что он зависит только от u_e , y и δ . Предыстория потока не оказывает непосредственного влияния, хотя в пограничном слое с продольным градиентом давления, т. е. в том случае, когда u_e зависит от x , форма профиля сложным образом зависит от всей предыстории изменения градиента давления. Мы не можем вести отсчет скорости от соответствующего значения на стенке, поскольку она зависела

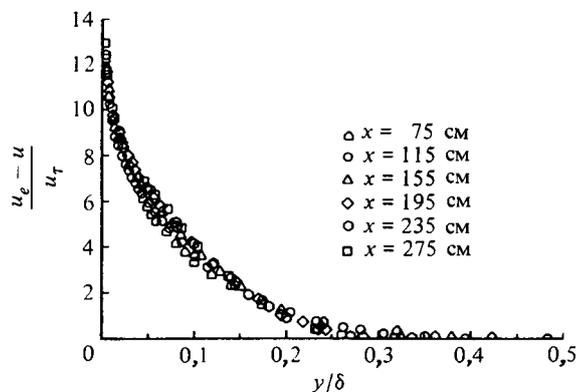


Рис. 6.9. Универсальный профиль относительной избыточной скорости турбулентного пограничного слоя для течения с нулевым градиентом давления [11].

бы от перепада скоростей поперек вязкого подслоя, который исключен из анализа; поэтому мы ведем отсчет скорости от скорости внешнего потока u_e и описываем профиль средней скорости во внешней части слоя с помощью следующего соотношения, которое очень просто получить на основании теории размерностей и которое известно под названием *закона дефекта скорости* (рис. 6.9):

$$\frac{u_e - u}{u_\tau} = F_1\left(\frac{y}{\delta}\right). \quad (6.37)$$

Было установлено эмпирически, что для пограничного слоя с нулевым градиентом давления или течения в канале постоянного сечения (в этом случае δ заменяется на радиус трубы или полуширину канала) функция F_1 не зависит от числа Рейнольдса (за исключением течения в пограничном слое с низким числом Рейнольдса, $u_e \theta / \nu \leq 5000$) и, что наиболее важно, не зависит от шероховатости поверхности. Для пограничного слоя на плоской пластине числовое значение функции F_1 отличается от соответствующего значения для течения в канале в основном вследствие наличия свободной внешней границы.

Профиль температуры

Аналогичным образом, если \dot{q}_w не зависит от x , можно ожидать, что всюду за пределами вязкого подслоя и теплопроводного подслоя температура, отсчитываемая от температуры внешнего потока T_e , будет зависеть только от T_τ , y и δ ; рассмотрение по от-

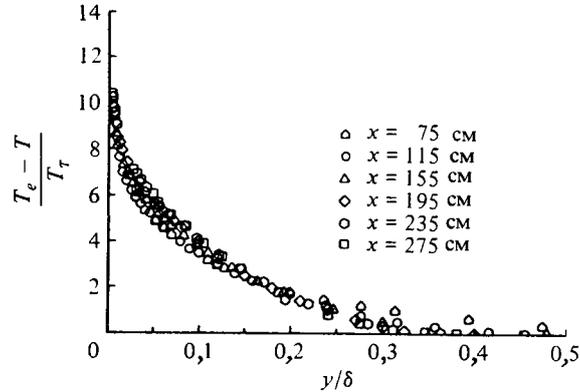


Рис. 6.10. Универсальный профиль относительной избыточной температуры турбулентного пограничного слоя для течения с нулевым градиентом давления [11].

дельности ρ , τ_w , \dot{q}_w и т. д. позволит выявить масштаб температуры T_r и несущественный безразмерный комплекс $\rho u_i^3 / \dot{q}_w$. Таким образом, можно ожидать, что справедливо соотношение

$$\frac{T_e - T}{T_r} = F_2\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad (6.38)$$

которое не зависит от κ и ν (и, следовательно, от Pr) за пределами вязкого и теплопроводного подслоев (рис. 6.10). Отметим, что, опуская δ_i , мы ограничиваемся случаем пограничного слоя, нагреваемого равномерно от передней кромки; в более общем случае, когда существует ненагреваемый начальный участок, отношение δ_i / δ входит вторым аргументом в функцию F_2 в соотношении (6.38), но, поскольку влияние обоих аргументов нельзя разделить, анализ станет существенно сложнее. Если постоянной является величина T_w , а не \dot{q}_w , результаты проведенного выше анализа справедливы, но функция F_2 несколько изменяется.

Соотношение (6.26) является эмпирической формулой для турбулентного числа Прандтля, определенного выражением (6.3), и номинально справедливо во внутренней части теплового слоя, скажем в области $0 < y < 0,2 \delta_i$. За пределами вязкого и теплопроводного подслоев, где экспоненциальные коэффициенты демпфирования, входящие в соотношение (6.26), становятся равными единице, Pr_t становится равным κ / κ_h , т. е. 0,91 (если принять, как в настоящей книге, $\kappa = 0,40$ и $\kappa_h = 0,44$), хотя в литературе приводились значения от 0,86 до 1,0. Согласно экспериментальным данным, нельзя считать, что величина Pr_t постоянна во внешней части слоя, $y >$

$> 0,2 \delta_t$, хотя постоянное значение часто применяется в инженерных расчетах; в свободных сдвиговых слоях и вблизи внешней границы пограничного слоя число Pr_t может снижаться до 0,5. Это свидетельствует о том, что аналогия Рейнольдса между процессами переноса тепла и количества движения, которая строго справедлива при $Pr_t = 1,0$, применима лишь во внутренней части турбулентного пристенного течения.

6.4. Слой в целом

Логарифмический профиль скорости (6.11) применим только в области вне вязкого подслоя, толщина которой составляет 10—20% толщины пограничного слоя (или радиуса трубы). Однако можно формально записать выражение для профиля скорости во внешней части слоя через его отклонение от логарифмического закона

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_\tau y}{\nu} + c + \frac{\Pi}{\kappa} w\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad (6.39)$$

где w — функция y/δ , величина Π не зависит от y , а остальные обозначения выбраны таким образом, чтобы в дальнейшем было удобнее вести преобразования. Используя соотношение (6.39), можно записать закон дефекта скорости для пограничного слоя с нулевым градиентом давления (6.37) в виде выражения

$$\frac{u_e - u}{u_\tau} = F_1\left(\frac{y}{\delta}\right) = -\frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\delta} - \frac{\Pi}{\kappa} \left[w\left(\frac{y}{\delta}\right) - w(1) \right], \quad (6.40)$$

из которого следует, что величина Π , как и F_1 , не зависит от x и, следовательно, должна быть постоянной. Функцию $w(y/\delta)$ нужно подобрать из условия наиболее точного соответствия экспериментальным данным; часто применяется эмпирическая функция

$$w\left(\frac{y}{\delta}\right) = 1 - \cos \frac{\pi y}{\delta}, \quad (6.41)$$

которая вполне удовлетворительно описывает экспериментальные данные, с тем лишь исключением, что расчет по формуле (6.39) дает при $y = \delta$ величину $\partial u / \partial y = u_\tau / \kappa \delta$ вместо правильного нулевого значения. Отметим, что для удобства полагается $w(1) = 2$; согласно экспериментальным данным, величина Π составляет около 0,55 для пограничных слоев при $u_e \theta / \nu > 5000$. Функция $w(y/\delta)$ называется *функцией следа* [12], а Π — *параметром следа*; не следует считать, что эти названия отражают количественное соответствие характеристик пограничного слоя и следа. Теперь, заменяя в соотно-

шении (6.39) логарифмическую функцию общей функцией, выражающей закон стенки, $f_1(u_\tau y/\nu)$, из соотношения (6.4), включающего логарифмический закон и профиль в вязком подслое, получаем соотношение, описывающее профиль скорости для всего слоя в целом

$$u^+ \equiv \frac{u}{u_\tau} = f_1\left(\frac{u_\tau y}{\nu}\right) + \frac{\Pi}{\kappa} \left(1 - \cos \pi \frac{y}{\delta}\right). \quad (6.42)$$

Для профиля температуры в пограничном слое с нулевым градиентом давления при постоянной температуре поверхности или при постоянной плотности теплового потока в стенку можно получить выражение, аналогичное по форме соотношению (6.42). Вновь формула (6.41) позволяет достаточно точно описать функцию следа; комбинируя соотношения (6.5b) и (6.41), можно записать

$$T^+ \equiv \frac{T_w - T}{T_\tau} = f_2\left(\frac{u_\tau y}{\nu}, \text{Pr}\right) + \frac{\Pi_h}{\kappa_h} w\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad (6.43)$$

где Π_h — константа, величина которой в случае постоянной температуры поверхности несколько отличается от величины в случае постоянной плотности теплового потока в стенку, но в обоих случаях они не равны Π , поскольку во внешней части слоя $\text{Pr}_t \neq \kappa/\kappa_h$. Величина Π_h не зависит от Pr и числа Рейнольдса при достаточно высоких числах Рейнольдса. Поскольку Π зависит от числа Рейнольдса при $u_e \theta/\nu < 5000$, следует ожидать, что то же самое будет справедливо и для Π_h , так как, если влияние вязкости на турбулентность сказывается в изменении пульсационных составляющих скорости, оно будет приводить не только к изменению характеристик переноса количества движения, но и к изменению характеристик переноса тепла. В принципе Π_h может зависеть от коэффициента теплопроводности, если число Пекле $(u_e \theta/\nu)\text{Pr}$ меньше примерно 5000 в соответствии с обычным предположением о справедливости аналогии между процессами переноса количества движения и тепла. Однако имеющихся экспериментальных данных недостаточно для того, чтобы определить характер изменения Π_h при низких числах Рейнольдса и низких числах Пекле, и даже величина Π_h при высоких числах Рейнольдса определена недостаточно точно (она составляет около 0,3). За пределами вязкого и теплопроводного подслоев соотношение (6.43) принимает вид

$$T^+ \equiv \frac{T_w - T}{T_\tau} = \frac{1}{\kappa_h} \ln \frac{u_\tau y}{\nu} + c_h + \frac{\Pi_h}{\kappa_h} w\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (6.44)$$

по аналогии с выражением (6.39); напомним, что c_h зависит от Pr . Соотношения (6.39) и (6.44) можно применять для шероховатых по-

верхностей, если заменить s на $s - \Delta u^+$, как в формуле (6.34), а s_h выразить с помощью соотношения типа (6.36).

Все приведенные выше выражения, описывающие профили скорости и температуры, можно применить для полностью развитого течения в круглой трубе или плоском канале опять-таки в условиях постоянной плотности теплового потока в стенку или постоянной разности между температурой поверхности и среднemasсовой температурой течения, определенной формулой (5.4). Толщина пограничного слоя заменяется радиусом трубы или полушириной канала. Значения Π и Π_h меньше, чем в случае пограничного слоя, — на практике величина Π для течения в трубе настолько мала, что ею часто пренебрегают. Влиянием низких чисел Рейнольдса на Π и Π_h для течения в трубе или канале, видимо, можно пренебречь, учитывая, что в пограничном слое это влияние обусловлено нерегулярным характером поверхности раздела между областью турбулентного течения и зоной нетурбулентного течения («вязким надслоем»).

В случае течения с произвольным градиентом давления соотношения (6.39) и (6.43), как правило, еще достаточно точно описывают экспериментальные данные, но значения Π и Π_h зависят от всей предыстории распределения давления. Соотношение (6.43) не всегда достаточно точно описывает профиль температуры при произвольном распределении температуры поверхности или теплового потока в стенку. Рассмотрим случай, когда за участком постоянной плотности теплового потока в стенку, на котором выполняется соотношение (6.43), следует участок более низкой плотности теплового потока, так что величина T_r изменяется скачкообразно, в то время как профиль температуры *не* претерпевает такого изменения. Даже соотношение (6.5), выражающее $T_w - T$ во внутренней части слоя, становится несправедливым при ступенчатом изменении \dot{q}_w ; новое состояние во внутренней части слоя устанавливается довольно быстро, но во внешней части слоя оно устанавливается намного медленнее.

6.5. Плоский пограничный слой с нулевым градиентом давления

Как уже отмечалось в предыдущих разделах данной главы, для течений в турбулентном пограничном слое в отличие от некоторых ламинарных течений не существует автомодельных решений, и поэтому решение всегда приходится находить, как для неавтомодельных ламинарных течений, с помощью интегрального или диффе-

ренциального метода (разд. 4.3). Если градиент давления равен нулю, а температура стенки постоянна, удобно применить интегральный метод и получить формулы, выражающие c_f , Nu_x , δ , δ_i , δ^* , θ и H , как будет сделано в этом разделе. С другой стороны, если тепловой слой развивается при различных граничных условиях, то даже при нулевом градиенте давления удобнее использовать дифференциальный метод, как будет показано в разд. 6.6 для случая двумерного течения.

Рассмотрим несопряженное (с постоянными свойствами) течение на гладкой плоской пластине (течение с нулевым градиентом давления или с постоянным давлением) с постоянной температурой поверхности. Во-первых, рассчитаем параметры динамического пограничного слоя. На основании интегрального уравнения количества движения (3.68) можно записать

$$\frac{dR_\theta}{dR_x} = \frac{c_f}{2}. \quad (6.45)$$

Здесь $R_\theta = u_e \theta / \nu$ и $R_x = u_e x / \nu$. Прежде чем перейти к интегрированию этого уравнения, необходимо вспомнить, что при обтекании такой поверхности с достаточно высокими числами Рейнольдса наблюдаются три различных режима течения (рис. 6.11). От передней кромки начинается первый участок ($0 < R_x < R_{x_{lr}}$), на котором течение в пограничном слое является ламинарным. Затем расположен участок $R_{x_{lr}} < R_x < R_{x_t}$, на котором происходит переход ламинарного режима течения в турбулентный, т. е. на котором напряжения Рейнольдса постепенно возрастают. На третьем участке $R_x \geq R_{x_t}$ течение становится полностью турбулентным. Число Рейнольдса $R_{x_{lr}}$ в начале зоны перехода зависит частично от интенсивности турбулентности внешнего потока и существенно от условий на стенке (от того, нагревается она или охлаждается, является гладкой или шероховатой) и может изменяться в довольно широком диапазоне, от 4×10^5 до 4×10^6 . Штриховой линией на рис. 6.11 показаны результаты расчета для воображаемого турбулентного пограничного слоя, начинающегося в точке $x = x_0$ и имеющего в этой точке нулевую толщину, а затем развивающегося таким образом, что в точке $x = x_t$ его толщина становится равной толщине реального пограничного слоя. Точка $x = x_0$ называется *эффективной*, или *виртуальной*, началом турбулентного пограничного слоя. На практике она определяется путем экстраполяции вверх по потоку формулы для расчета скорости роста толщины реального турбулентного пограничного слоя.

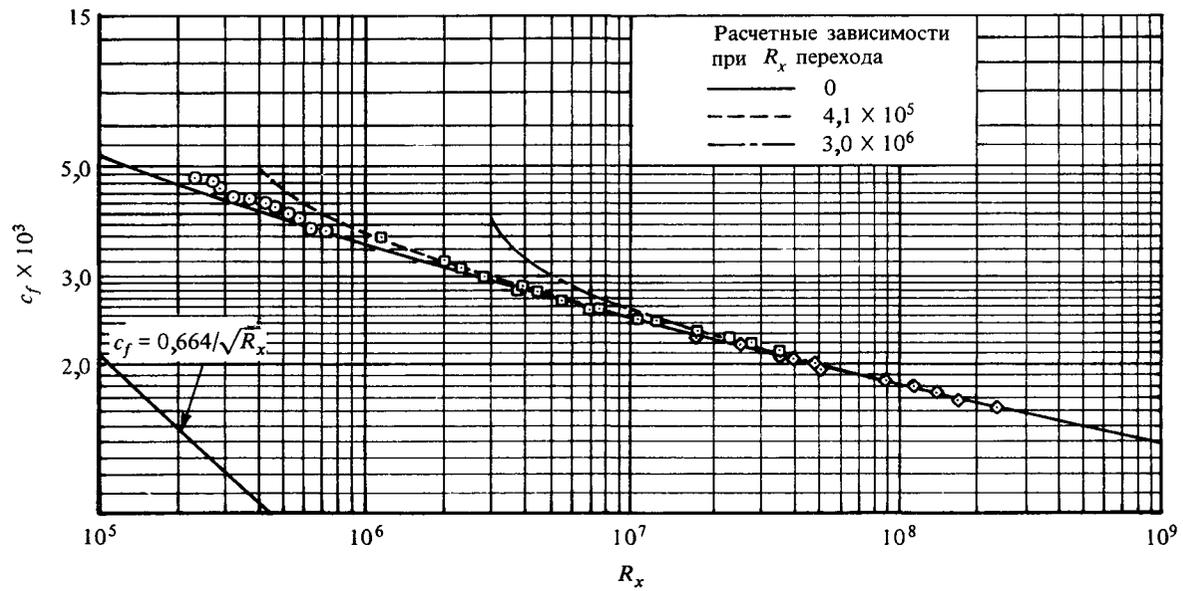


Рис. 6.11. Рассчитанные по формуле (6.51) зависимости для местного коэффициента поверхностного трения на гладкой плоской пластине при трех значениях числа Рейнольдса перехода.

Зависимость c_f от R_x для ламинарного пограничного слоя рассчитана по формуле (4.35) при $f_w'' = 0,332$.

Формулы для расчета поверхностного трения на гладкой стенке

При интегрировании уравнения (6.45) будет предполагаться для простоты, что зона перехода стягивается в точку, так что переход от ламинарного режима течения к турбулентному происходит мгновенно; это означает, что $R_{x_{tr}} = R_{x'}$. Обозначая $(2/c_f)^{1/2}$ через z и интегрируя уравнение (6.45) по частям, получаем

$$R_x = z^2 R_\theta - 2 \int_{z_{tr}}^z R_\theta z dz + A_1, \quad (6.46)$$

где A_1 — постоянная интегрирования, а z_{tr} — величина параметра поверхностного трения z непосредственно за точкой перехода.

Интеграл, входящий в соотношение (6.46), можно вычислить при условии, что R_θ выражается в виде функции z . Это можно сделать, исходя из определения θ и записывая его в виде

$$\theta = \delta \int_0^1 \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) d\eta = \delta \int_0^1 \frac{u_e - u}{u_e} d\eta - \delta \int_0^1 \left(\frac{u_e - u}{u_e}\right)^2 d\eta, \quad (6.47)$$

где $\eta = y/\delta$. Однако для течения с нулевым градиентом давления при высоких числах Рейнольдса из соотношения (6.37) следует, что параметры c_1 и c_2 , определенные выражениями

$$c_1 \equiv \int_0^1 \frac{u_e - u}{u_\tau} d\eta, \quad c_2 \equiv \int_0^1 \left(\frac{u_e - u}{u_\tau}\right)^2 d\eta, \quad (6.48)$$

являются постоянными (рис. 6.10). Подставляя выражения (6.48) в соотношение (6.47) и проводя нормализацию, получаем

$$R_\theta \equiv \frac{u_e \delta}{\nu} = \frac{R_\theta z}{c_1 - c_2/z}. \quad (6.49)$$

Соотношение между толщиной пограничного слоя δ и местным коэффициентом поверхностного трения c_f можно получить, рассматривая одну из нескольких эмпирических формул, предложенных для расчета профиля скорости турбулентного пограничного слоя. Будем пользоваться формулой «закон стенки + закон следа» (6.42).

Подставляя выражение (6.11b) в соотношение (6.42) и вычисляя значение u^+ на границе пограничного слоя, $y = \delta$, получаем

$$z = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{R_\delta}{z} + c + \frac{2\Pi}{\kappa}. \quad (6.50)$$

Принимая значения c и Π равными соответственно 5,0 и 0,55, можно теперь проинтегрировать уравнение (6.46) с использованием выражений (6.49) и (6.50). В результате получаем следующее соотношение [9]:

$$(R_x - A_2)c_f = 0,324 \exp \left[\frac{0,58}{\sqrt{c_f}} (1 - 8,125\sqrt{c_f} + 22,08c_f) \right]. \quad (6.51)$$

Здесь A_2 — постоянная интегрирования, зависящая от величин c_f и R_x в точке перехода. На рис. 6.11 представлены результаты расчета при трех значениях числа Рейнольдса перехода: $R_{x_{tr}} = 4 \times 10^5$, 3×10^6 и 0 (в последнем случае предполагается, что переход происходит на передней кромке). Величина $R_x = 4 \times 10^5$ приблизительно соответствует минимальному значению R_x , при котором течение может стать турбулентным. Наибольшая величина R_x является типичным числом Рейнольдса естественного перехода на гладкой плоской пластине в экспериментальных установках с низким уровнем турбулентности при отсутствии теплообмена. Если пластина нагревается, точка естественного перехода в газовом потоке смещается вверх по течению, т. е. величина числа Рейнольдса перехода снижается, а если пластина охлаждается, точка перехода смещается вниз по течению. Это объясняется тем, что, поскольку вязкость μ возрастает с повышением температуры газа, нагрев приводит к уменьшению градиента скорости вблизи стенки и форма профиля скорости становится менее устойчивой; при охлаждении стенки наблюдается противоположная картина. В потоке жидкости, вязкость которой μ уменьшается с возрастанием температуры, отмечается обратный эффект.

Полагая в соотношении (6.51) $A_2 = 0$ (т. е. предполагая, что турбулентный пограничный слой начинается в точке $x = 0$, имея нулевую толщину), логарифмируя и используя некоторые приближения, получаем формулы типа

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = a + b \lg c_f R_x,$$

где a и b — постоянные, выбранные из условия наиболее точного соответствия экспериментальным данным. Подобные не слишком строгие формулы были получены во многих предыдущих работах. Карман [13], принимая $a = 1,7$ и $b = 4,15$, получил в итоге формулу

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = 1,7 + 4,15 \lg c_f R_x. \quad (6.52)$$

На основании приведенного выше соотношения Шоенгерр [13] вывел формулу для среднего коэффициента поверхностного трения c_f (осредненного на длине x)

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = 4,13 \lg \bar{c}_f R_x. \quad (6.53)$$

Степенные профили скорости

Связывая параметр профиля Π с толщиной вытеснения δ^* и толщиной потери импульса θ (задача 6.7), а также с местным коэффициентом поверхностного трения c_f , как это было сделано при выводе формулы (6.52), можно получить соотношения между δ , c_f , δ^* , θ и H . Значительно более простые, но менее точные соотношения можно получить, предполагая, что профиль скорости выражается «степенным законом»

$$\frac{u}{u_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n}. \quad (6.54)$$

Здесь $n \approx 7$ для течения с нулевым градиентом давления и слабо возрастает с увеличением числа Рейнольдса. Используя соотношение (6.54) и определения δ^* , θ и H , можно получить выражения

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{1+n}, \quad (6.55a)$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{n}{(1+n)(2+n)}, \quad (6.55b)$$

$$H = \frac{2+n}{n}. \quad (6.55c)$$

В работе Шлихтинга [13] на основании предположения о степенном профиле скорости с $n = 7$ получены следующие формулы, справедливые только в диапазоне чисел Рейнольдса $5 \times 10^5 < R_x < 10^7$:

$$c_f = 0,059 R_x^{-0,20}, \quad (6.56)$$

$$\bar{c}_f = 0,074 R_x^{-0,20}, \quad (6.57)$$

$$\frac{\delta}{x} = 0,37 R_x^{-0,20}, \quad (6.58)$$

$$\frac{\theta}{x} = 0,036 R_x^{-0,20}. \quad (6.59)$$

При выводе соотношений (6.53) и (6.57) предполагалось, что пограничный слой является турбулентным, начиная с передней кромки, т. е. эффективное начало слоя совпадает с точкой $x = 0$. Для турбулентного течения при умеренных числах Рейнольдса следует учесть, что на некотором начальном участке пограничный слой является ламинарным. Предложено несколько эмпирических формул для \bar{c}_f , учитывающих этот эффект. Две подобные формулы приведены в монографии Шлихтинга [13]

$$\bar{c}_f = \frac{0,455}{(\lg R_x)^{2,58}} - \frac{A}{R_x}, \quad (6.60)$$

$$\bar{c}_f = 0,074 R_x^{-0,20} - \frac{A}{R_x}, \quad 5 \times 10^5 < R_x < 10^7. \quad (6.61)$$

Здесь A — коэффициент, зависящий от числа Рейнольдса перехода $R_{x_{tr}}$. Он выражается соотношением

$$A = R_{x_{tr}} (\bar{c}_{f_l} - \bar{c}_{f_t}), \quad (6.62)$$

где \bar{c}_{f_t} и \bar{c}_{f_l} — значения среднего коэффициента поверхностного трения при $R_{x_{tr}}$ для турбулентного и ламинарного режимов течения соответственно. Отметим, что, хотя формула (6.61) ограничена указанным диапазоном R_x , формула (6.60) справедлива в широком диапазоне изменения R_x и позволяет получить достаточно точные результаты при значениях R_x , достигающих 10^9 .

Формулы для расчета теплообмена на гладкой стенке при заданной температуре поверхности

Для течения с нулевым градиентом давления можно решить интегральное уравнение энергии (3.78b) и найти в результате зависимость числа Стантона St от числа Рейнольдса. Это можно сделать, подставляя выражение для профиля скорости (6.39) и аналогичное выражение для профиля температуры (6.44) в определение θ_T . Однако, поскольку мы уже нашли формулу для c_f , проще вычислить T^+ по выражению (6.44) при $y = \delta$ и применить соотношение (6.50). Например, при $y = \delta$ выражение (6.44) принимает вид

$$\frac{T_w - T_e}{T_\tau} = \frac{1}{\kappa_h} \ln \frac{R_\delta}{z} + c_h + \frac{2\Pi_h}{\kappa_h}. \quad (6.63)$$

Используя определения T_τ и местного числа Стантона St , можно записать левую часть этого выражения в виде

$$\frac{T_w - T_c}{T_\tau} = \frac{1}{St} \sqrt{\frac{c_f}{2}}. \quad (6.64)$$

Если приравнять два значения $\ln(R_\delta/z)$, найденные с помощью соотношений (6.50) и (6.63), подставить выражение (6.64) в соотношение (6.63) и выполнить некоторые преобразования, то можно получить следующее равенство:

$$\frac{St}{c_f/2} = \frac{\kappa_h/\kappa}{1 - \{[c\kappa - c_h\kappa_h + 2(\Pi - \Pi_h)]/\kappa\} \sqrt{c_f/2}}. \quad (6.65)$$

Ввиду разброса результатов измерения профиля температуры проще всего выбрать величину, заключенную в скобки, равной такому значению, которое обеспечивает наиболее точное соответствие результатам измерения числа Стантона St . Для воздуха находим

$$\frac{St}{c_f/2} = \frac{1,11}{1 - 1,20\sqrt{c_f/2}} \quad (6.66)$$

при $\kappa = 0,40$ и $\kappa_h = 0,44$. Эта формула, выражающая коэффициент аналогии Рейнольдса $St/(c_f/2)$, часто приводится в литературе с различными значениями эмпирических постоянных. При значении $c_f \approx 3 \times 10^{-3}$, типичном для пограничного слоя в лабораторных исследованиях, и использованных нами значениях постоянных получается $St/(c_f/2) \approx 1,16$, в то время как при очень высоких числах Рейнольдса, когда величина c_f мала, $St/(c_f/2)$ асимптотически стремится к 1,11 [14].

Подставляя (6.56) в (6.66), получаем

$$St = \frac{0,0327R_x^{-0,20}}{1 - 0,206R_x^{-0,10}}. \quad (6.67)$$

Согласно результатам подробного экспериментального исследования Кадера и Яглома [15], эмпирическая формула

$$St = \frac{1}{Pr} \frac{\sqrt{c_f}}{4,3 \ln R_x c_f + 3,8} \quad (6.68)$$

достаточно точно описывает имеющиеся экспериментальные данные для воздуха ($Pr = 0,7$). Для жидкостей с $Pr \geq 0,7$ авторы ра-

боты [15] рекомендуют следующую формулу:

$$\text{St} = \frac{\sqrt{c_f/2}}{2,12 \ln R_x c_f + 12,5 \text{Pr}^{2/3} + 2,12 \ln \text{Pr} - 7,2}. \quad (6.69)$$

При выводе соотношений (6.68) и (6.69) использовалась формула Кармана (6.52) для c_f с несколько измененным коэффициентом при $\lg c_f R_x$:

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = 1,7 + 4,07 \lg c_f R_x.$$

Для случая обтекания плоской изотермической пластины в работе Рейнольдса и др. [16] рекомендуется следующая формула, выражающая число Стантона:

$$\text{St Pr}^{0,4} \left(\frac{T_w}{T_e} \right)^{0,4} = 0,0296 R_x^{-0,20}, \quad (6.70)$$

справедливая в диапазонах $5 \times 10^5 < R_x < 5 \times 10^6$ и $0,5 \leq \text{Pr} \leq 1,0$.

Приближенную методику, с помощью которой было получено выражение для числа Стантона при обтекании плоской изотермической пластины с ненагреваемым начальным участком (разд. 4.3), также можно распространить на турбулентное течение, сделав соответствующие предположения относительно профилей скорости, температуры и касательного напряжения и используя понятия турбулентной вязкости и турбулентного числа Прандтля [17]. Например, при использовании степенных профилей скорости и температуры

$$\frac{u}{u_e} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/n}, \quad \frac{T_w - T}{T_w - T_e} = \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^{1/n}, \quad (6.71a)$$

профиля касательного напряжения вида

$$\frac{\tau}{\tau_w} = 1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{(n+2)/n}, \quad (6.71b)$$

выражения $\tau/\rho = \varepsilon_m (\partial u/\partial y)$ и $\text{Pr}_t = 1$ число Стантона можно выразить следующим соотношением:

$$\text{St} = \frac{c_f}{2} \left(\frac{\delta_t}{\delta} \right)^{-1/n}. \quad (6.72)$$

Подставляя это соотношение в интегральное уравнение энергии (3.78b) и используя интегральное уравнение количества движения, которое в рассматриваемом случае имеет вид (4.57), получаем следующее уравнение:

$$\int_{\delta_{x_0}}^{\delta} \frac{d\delta}{\delta} = \int_0^{\delta_t/\delta} \frac{n+1}{n} \frac{(\delta_t/\delta)^{2/n}}{1 - (\delta_t/\delta)^{(2+n)/n}} d\left(\frac{\delta_t}{\delta}\right), \quad (6.73)$$

где δ_{x_0} — толщина динамического пограничного слоя в точке $x = x_0$ (рис. 4.7).

Интегрируя уравнение (6.73), получаем

$$\frac{\delta}{\delta_{x_0}} = \left[1 - \left(\frac{\delta_t}{\delta} \right)^{(2+n)/n} \right]^{- (n+1)/(n+2)},$$

или

$$\frac{\delta_t}{\delta} = \left[1 - \left(\frac{\delta_{x_0}}{\delta} \right)^{(n+2)/(n+1)} \right]^{n/(2+n)}. \quad (6.74)$$

В диапазоне $5 \times 10^5 \leq R_x \leq 10^7$ величина δ пропорциональна $x^{4/5}$ (формула (6.58)). Следовательно, выражение (6.74) можно записать в виде

$$\frac{\delta_t}{\delta} = \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{4(n+2)/5(n+1)} \right]^{n/(2+n)}. \quad (6.75)$$

Подставляя (6.75) в (6.72) и принимая $n=7$, получаем

$$\text{St} = \frac{c_f}{2} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{9/10} \right]^{-1/9}. \quad (6.76)$$

Для пластины, нагреваемой на всем протяжении от передней кромки ($x_0 = 0$), выражение (6.76) сводится к следующему:

$$\text{St} = \text{St}_T = \frac{c_f}{2},$$

где St_T — число Стантона для изотермической плоской пластины. Применяя это обозначение, можно переписать выражение (6.76) в виде

$$\frac{\text{St}}{\text{St}_T} = \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{9/10} \right]^{-1/9}, \quad x > x_0. \quad (6.77)$$

Используя определения коэффициента теплоотдачи \hat{h} и числа Стантона St , для изотермической плоской пластины с ненагреваемым начальным участком получаем

$$\hat{h} = \rho u_e c_p St_T \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{9/10} \right]^{-1/9}. \quad (6.78)$$

Аналогичным образом, применяя выражение для St_T (6.70), находим

$$St Pr^{0,4} \left(\frac{T_w}{T_e} \right)^{0,4} = 0,0296 R_x^{-0,20} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{9/10} \right]^{-1/9}. \quad (6.79)$$

Для неизотермической поверхности, температура которой изменяется произвольным образом, плотность теплового потока на расстоянии x от передней кромки определяется, согласно принципу суперпозиции [18], соотношением

$$\dot{q}_w = \int_{\xi=0}^{\xi=x} \hat{h}(\xi, x) dT_w(\xi), \quad (6.80)$$

где при числе Стантона $St_T(x)$, рассчитанном в точке x ,

$$\hat{h}(\xi, x) = \rho u_e c_p St_T(x) \left[1 - \left(\frac{\xi}{x} \right)^{9/10} \right]^{-1/9}. \quad (6.81)$$

Соотношение (6.80) интегрируется «по Стилтесу», а не как обычно, «по Риману» или «по площади» [19]. Это делается потому, что заданная температура стенки может иметь конечные разрывы, так что в некоторых точках величина dT_w будет неопределенной. Однако интеграл Стилтеса можно выразить в виде суммы обыкновенного интеграла или интеграла Римана и члена, учитывающего влияние конечных разрывов [18]. Интеграл (6.80) можно представить в форме

$$\dot{q}_w(x) = \int_{\xi=0}^{\xi=x} \hat{h}(\xi, x) \frac{dT_w(\xi)}{d\xi} d\xi + \sum_{n=1}^N \hat{h}(x_{0n}, x) [T_w(x_{0n}^+) - T_w(x_{0n}^-)]. \quad (6.82)$$

Здесь N — число разрывов, а разность $T_w(x_{0n}^+) - T_w(x_{0n}^-)$ обозначает скачок температуры в n -й точке разрыва.

В качестве примера рассмотрим пластину, температура которой равна T_{w_1} на участке от передней кромки до точки $x = x_0$ и

T_{w_2} — при $x > x_0$. Чтобы найти плотность теплового потока при $x > x_0$, отметим, что, поскольку производная $dT_w/d\xi$ равна нулю всюду, за исключением точки $x = x_0$, первый член в правой части соотношения (6.82) равен нулю. Следовательно, нужно рассмотреть только второй член. Поскольку $N = 2$, можно записать

$$n = 1, \quad \hat{h}(0, x) = \rho u_e c_p St_T(x) [1 - 0]^{-1/9},$$

$$T_w(0^+) - T_w(0^-) = T_{w_1} - T_e,$$

$$n = 2, \quad \hat{h}(x_0, x) = \rho u_e c_p St_T(x) \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{9/10} \right]^{-1/9},$$

$$T_w(x_0^+) - T_w(x_0^-) = T_{w_2} - T_{w_1}.$$

Следовательно, плотность теплового потока при $x > x_0$ выражается соотношением

$$\dot{q}_w(x) = \rho u_e c_p St_T(x) \left\{ (T_{w_1} - T_e) + (T_{w_2} - T_{w_1}) \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{9/10} \right]^{-1/9} \right\}. \quad (6.83)$$

Отметим, что величина $St_T(x)$ вычисляется при $T_w = T_{w_2}$.

Формулы для расчета теплообмена на гладкой стенке при заданной плотности теплового потока

Анализ теплового пограничного слоя на гладкой стенке при заданной плотности теплового потока проводится примерно таким же образом, как и в случае заданной температуры поверхности. На основании экспериментальных данных Рейнольдса, Кейса и Клайна в работе Кейса и Кроуфорда [20] рекомендуется следующая эмпирическая формула:

$$St Pr^{0.4} = 0,030 R_x^{-0.2}, \quad (6.84)$$

которая почти идентична аналогичной формуле при заданной температуре стенки (6.70). Отметим, что в случае ламинарного течения различие в формулах для расчета числа Стантона при заданной плотности теплового потока и при заданной температуре стенки существенно больше и расчетные значения для обоих случаев могут отличаться на 36%.

Если при обтекании пластины создается произвольное распределение плотности теплового потока на ее поверхности и, кроме то-

го, имеется ненагреваемый участок, разность между температурой стенки и температурой на границе пограничного слоя можно рассчитать с помощью следующего соотношения, полученного в работе Рейнольдса и др. [18]:

$$T_w(x) - T_e = \int_{\xi=0}^{\xi=x} g(\xi, x) \dot{q}_w(\xi) d\xi, \quad (6.85)$$

$$\text{где } g(\xi, x) = \frac{\frac{9}{10} \text{Pr}^{-0,6} R_x^{-0,8}}{\Gamma(\frac{1}{9}) \Gamma(\frac{8}{9}) (0,0287k)} \left[1 - \left(\frac{\xi}{x} \right)^{9/10} \right]^{-8/9}.$$

а Γ — гамма-функция (приложение С). Характер изменения подынтегральной функции, входящей в соотношение (6.85), таков, что всегда можно выполнить обычное интегрирование «по Риману», в том числе и в окрестности точек разрыва. Чтобы подтвердить это, рассмотрим пластину с ненагреваемым участком, простирающимся от передней кромки до точки $x = x_0$, и с постоянной плотностью теплового потока \dot{q}_w при $x > x_0$. Чтобы найти температуру стенки при $x > x_0$ запишем соотношение (6.85) в виде

$$T_w(x) - T_e = \frac{3,42 \dot{q}_w}{\text{Pr}^{0,6} R_x^{0,8} k} \int_{x_0}^x \left[1 - \left(\frac{\xi}{x} \right)^{9/10} \right]^{-8/9} d\xi. \quad (6.86)$$

Интеграл можно рассчитать, применяя бета-функции (см. приложение С). Окончательное выражение имеет вид

$$T_w(x) - T_e = \frac{33,61 \dot{q}_w \text{Pr}^{0,4} R_x^{0,2}}{\rho c_p u_e} \frac{\beta_r(1/9, 10/9)}{\beta_1(1/9, 10/9)}, \quad (6.87)$$

или с использованием определения числа Стантона

$$\text{St} = \frac{0,030 \text{Pr}^{-0,4} R_x^{-0,2}}{\left[\beta_r\left(\frac{1}{9}, \frac{10}{9}\right) \right] / \left[\beta_1\left(\frac{1}{9}, \frac{10}{9}\right) \right]}, \quad (6.88)$$

где $r = 1 - (x_0/x)^{9/10}$.

Формулы для расчета поверхностного трения на шероховатой стенке

В разд. 6.2 было показано, что одной из возможных форм закона стенки для течения на шероховатой поверхности является соотношение (6.32), а именно

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k} + B_2. \quad (6.32)$$

Это соотношение применимо только во внутренней части пограничного слоя, а чтобы применить его для всего пограничного слоя, оно должно быть модифицировано с учетом закона следа во внешней части слоя. Применим закон следа Коулса (6.41), что позволяет переписать соотношение (6.32) в виде

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k} + B_2 + \frac{\Pi}{\kappa} w. \quad (6.89)$$

Вычисляя u^+ на границе пограничного слоя и подставляя полученное выражение в формулу (6.45), можно вновь использовать методику, аналогичную примененной для построения диаграмм коэффициент поверхностного трения — число Рейнольдса в случае гладкой поверхности, и построить с ее помощью аналогичные диаграммы для обтекания пластины с шероховатой поверхностью (шероховатость песочного типа).

На рис. 6.12 и 6.13 представлены рассчитанные по этой методике зависимости c_f и \bar{c}_f от R_x и построены линии постоянных значений числа Рейнольдса шероховатости $R_k = u_e k / \nu$ и постоянных значений относительной высоты шероховатости x/k . Как и в случае обтекания гладкой пластины, предполагалось, что начало турбулентного пограничного слоя находится в окрестности передней кромки пластины.

6.6. Плоское течение с градиентом давления

В большинстве практических задач пограничного слоя с градиентом давления необходимо рассчитать характеристики пограничного слоя вдоль всей рассматриваемой поверхности. Это означает, что при заданном распределении скорости внешнего течения, заданном распределении температуры стенки или плотности теплового потока и при заданном положении зоны перехода требуется рассчитать характеристики ламинарного, переходного и турбулентного пограничных слоев, начиная расчет от передней кромки или от критической точки.

Как описано в гл. 4, уравнения пограничного слоя можно решить дифференциальными или интегральными методами. Первые в настоящее время используются более широко и будут рассматриваться вначале частично по этой причине, а частично потому, что дополнительную физическую информацию, требуемую для решения уравнений осредненного турбулентного течения, легче осмыслить, если сначала рассмотреть дифференциальные уравнения движения.

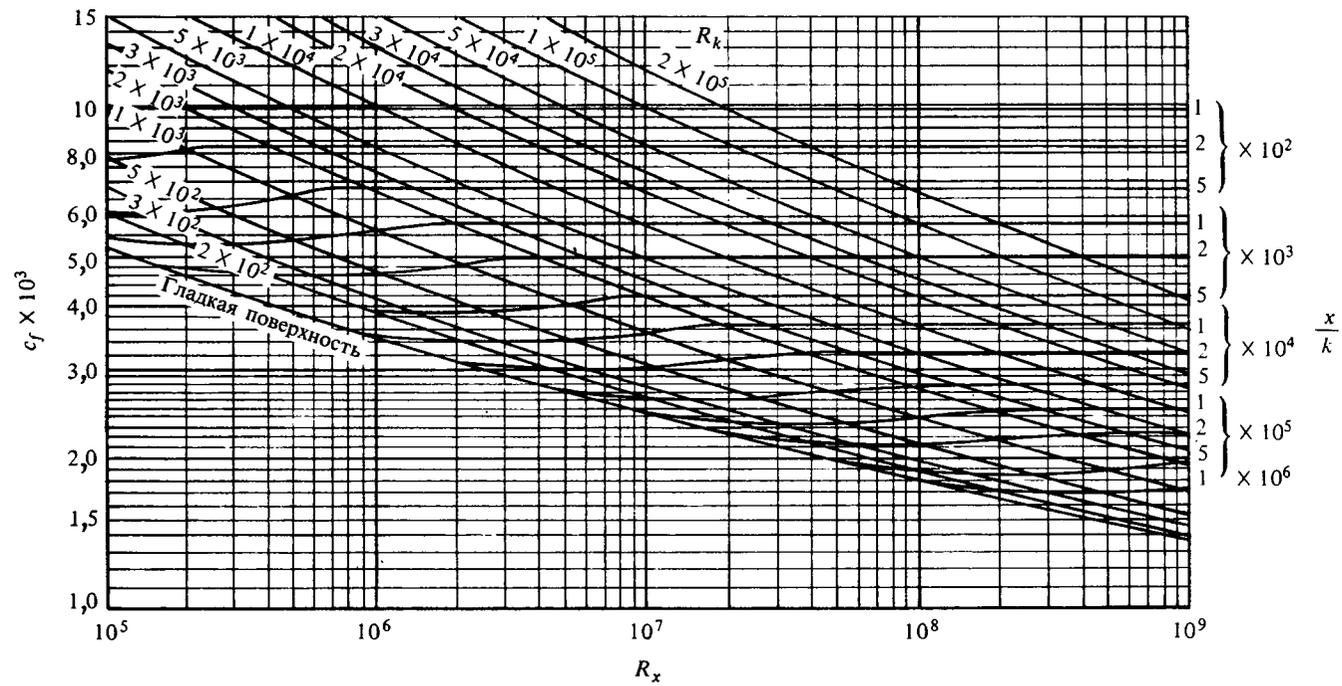


Рис. 6.12. Местный коэффициент поверхностного трения на плоской пластине с песочной шероховатостью поверхности.

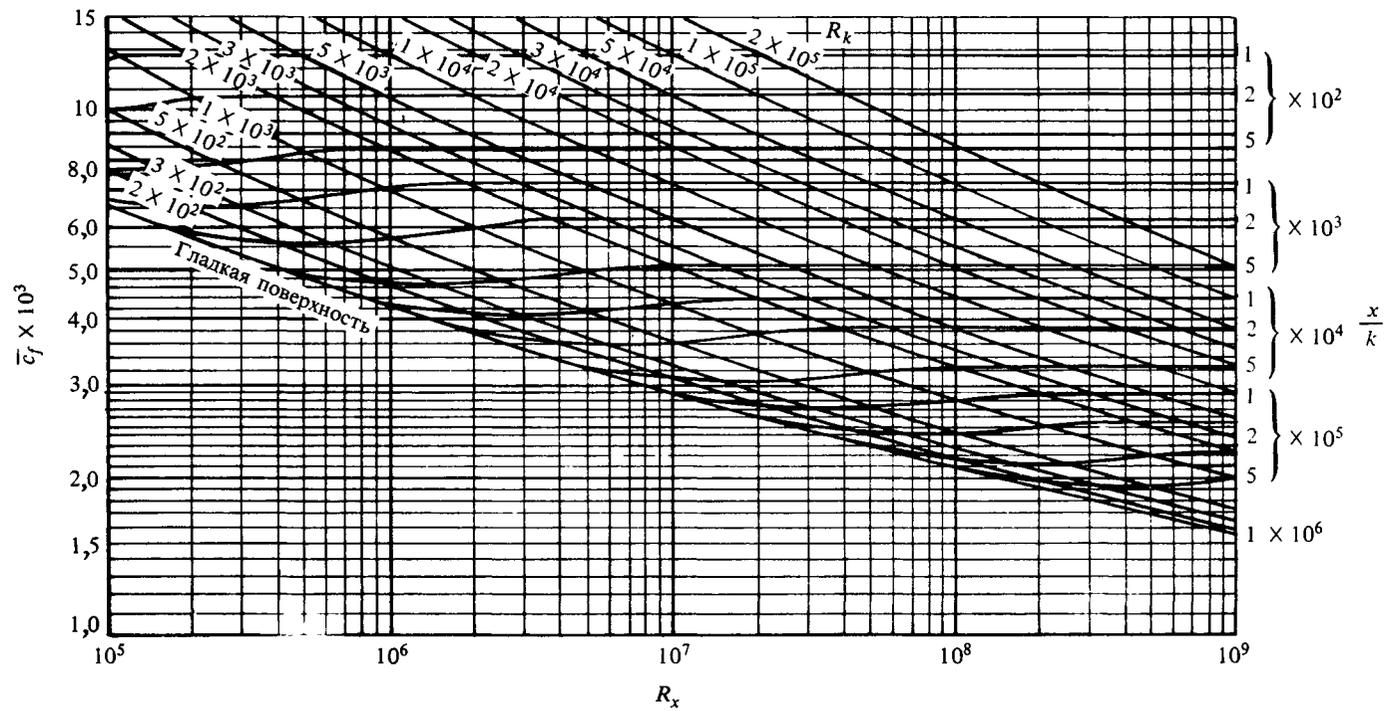


Рис. 6.13. Осредненный коэффициент поверхностного трения на плоской пластине с песочной шероховатостью поверхности.

Дифференциальные методы

Основные принципы дифференциальных методов, рассмотренные в разд. 4.3, распространяются здесь на турбулентные течения. Решается система уравнений неразрывности, движения и энергии для плоского несопряженного турбулентного течения

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.5)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'}, \quad (3.12)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{T'v'}, \quad (3.14)$$

при начальных и граничных условиях, определенных соотношениями (3.85) и (3.88). Турбулентные потоки количества движения и тепла можно выразить различными способами, и частично для того, чтобы дать более простое объяснение рассматриваемому явлению, применяются понятия турбулентной вязкости и турбулентного числа Прандтля, рассмотренные в предыдущих разделах. Используя понятие турбулентной вязкости, запишем суммарное (молекулярное плюс турбулентное) касательное напряжение в виде

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} = \rho \nu (1 + \epsilon_m^+) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (6.90)$$

где $\epsilon_m^+ = \epsilon_m/\nu$, ϵ_m — коэффициент турбулентной кинематической вязкости, определенный выражением (6.1). Используя понятие турбулентного числа Прандтля (6.3), выразим суммарную плотность теплового потока соотношением

$$\dot{q} = -k \frac{\partial T}{\partial y} + \rho c_p \overline{T'v'} = -\mu c_p \left(\frac{1}{Pr} + \frac{\epsilon_m^+}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (6.91)$$

Подставляя эти соотношения в приведенные выше уравнения сохранения и применяя преобразование Фолкнера — Скэн, определенное выражениями (4.19b) и (4.19c), а также безразмерную температуру (4.25), получаем следующие уравнения:

$$(bf'')' + \frac{m+1}{2} ff'' + m[1 - (f')^2] = x \left(f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (6.92)$$

$$(eg')' + \frac{m+1}{2} fg' + n(1-g)f' = x \left(f' \frac{\partial g}{\partial x} - g' \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (6.93)$$

которые совпадают с уравнениями (4.21) и (4.28) с той лишь разницей, что члены, учитывающие вязкость и теплопроводность, умножены на коэффициенты

$$b = 1 + \varepsilon_m^+, \quad e = \frac{1}{Pr} + \frac{\varepsilon_m^+}{Pr_t}, \quad (6.94)$$

выражающие связь коэффициента суммарного (молекулярного плюс турбулентного) переноса с коэффициентом молекулярного переноса. Полагая $\varepsilon_m^+ = 0$ (т. е. учитывая только молекулярный перенос), вновь получаем уравнения ламинарного пограничного слоя. При турбулентном режиме течения требуются соответствующие эмпирические формулы для ε_m^+ и Pr_t , чтобы использовать «универсальные» уравнения для расчета характеристик ламинарного, переходного и турбулентного пограничных слоев при обычных граничных условиях (4.30), применимых как для ламинарного, так и для турбулентного режимов течения.

В некоторых случаях при анализе турбулентного пограничного слоя удобно заменить истинные граничные условия при $y = 0$ новыми «граничными условиями», определенными на некотором расстоянии y_0 от стенки, за пределами вязкого и теплопроводного подслоев, чтобы избежать интегрирования уравнений поперек пристенной области с большими градиентами параметров по y . Обычно величина y_0 определяется из условия

$$y_0 = \left(\frac{\nu}{u_\tau} \right) y_0^+, \quad (6.95)$$

где значение y_0^+ принимается постоянным и равным примерно 50 для гладких поверхностей. Тогда граничные условия «на стенке» для u , v и T при $y = y_0$ в случае заданной температуры поверхности можно выразить соотношениями

$$u_0 = u_\tau \left(\frac{1}{\kappa} \ln \frac{y_0 u_\tau}{\nu} + c \right), \quad (6.96)$$

$$v_0 = - \frac{u_0 y_0}{u_\tau} \frac{du_\tau}{dx}, \quad (6.97)$$

$$T_0 = T_w - T_\tau \left(\frac{1}{\kappa_h} \ln \frac{y_0 u_\tau}{\nu} + c_h \right). \quad (6.98)$$

Здесь c и c_h — постоянные, определенные в разд. 6.2, или соответствующие постоянные для шероховатой поверхности. Соотно-

шение (6.97) получено путем интегрирования уравнения неразрывности, когда u определяется выражением (6.4). Кроме того, используются соотношения, выражающие изменение касательного напряжения и плотности теплового потока на участке от $y=0$ до $y=y_0$, а именно

$$u_\tau^2 = \frac{\tau_0}{\rho} - \alpha y_0,$$

где

$$\alpha = 0,3 \frac{du_0^2}{dx} - u_e \frac{du_e}{dx},$$

и

$$T_\tau = \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p u_\tau} = \frac{\dot{q}_0 - \tau_0 u_0}{\rho c_p u_\tau}, \quad \dot{q}_0 = -\mu c_p \left(\frac{1}{\text{Pr}} + \frac{\varepsilon_m^+}{\text{Pr}_t} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_0. \quad (6.99)$$

Отметим, что α является приближением среднего значения $\partial\tau/\partial y$ на участке $0 < y \leq y_0$, где $0 < u \leq u_0$; первый член в определении α представляет собой приближение $u(\partial u/\partial x) + v(\partial u/\partial y)$. Соответствующим членом в соотношении для плотности теплового потока является член кинетического нагрева $\tau_0 u_0$, который мал в низкоскоростных течениях. В преобразованных координатах соотношения (6.96)—(6.99) записываются следующим образом:

$$\eta = \eta_0, \quad (f_0')^2 = \alpha_2 f_0'' - \gamma_1,$$

$$x \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{m+1}{2} f_0 = \frac{\eta_0 f_0'}{2} \left(1 + m + \frac{x}{u_\tau^2} \frac{du_\tau^2}{dx} \right), \quad (6.100a)$$

$$g_0 = B^* \left(\frac{1}{\text{Pr}} + \frac{\varepsilon_m^+}{\text{Pr}_t} \right)_0 \left(\frac{u_e}{u_\tau} \right) \frac{g_0'}{\sqrt{R_x}}, \quad (6.100b)$$

где b_0 обозначает величину $b \equiv 1 + \varepsilon_m^+$, вычисленную в точке $y = y_0$, и

$$\alpha_2 = \frac{B^2}{R_x^{1/2}} b_0, \quad \gamma_1 = \frac{\alpha y_0}{u_\tau^2} B^2, \quad B = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y_0 u_\tau}{\nu} + c, \quad (6.101)$$

$$B^* = \frac{1}{\kappa_h} \ln \frac{y_0 u_\tau}{\nu} + c_h.$$

Формулы для расчета коэффициентов
турбулентного переноса

К настоящему времени предложено несколько соотношений, выражающих коэффициент турбулентной вязкости и турбулентное число Прандтля, которые можно применить для расчета ϵ_m^+ и Pr_t . Воспользуемся формулами Себиси и Смита [12]¹⁾. Точность этих формул проверена для широкого класса течений, исследованных экспериментально, и установлено, что они позволяют получить достаточно точные расчетные данные для большинства инженерных задач. В соответствии с подходом Себиси и Смита турбулентный пограничный слой считается состоящим из внутренней и внешней областей, коэффициент турбулентной вязкости в которых описывается различными соотношениями. Эти соотношения являются эмпирическими и получены на основании ограниченного количества экспериментальных данных. Во внутренней части слоя на гладкой поверхности при наличии или отсутствии массообмена коэффициент турбулентной вязкости можно определить по формуле

$$(\epsilon_m)_i = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \gamma_{tr} \gamma, \quad 0 \leq y \leq y_c. \quad (6.102)$$

Входящая в эту формулу длина пути перемешивания l выражается соотношением

$$l = \kappa y \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{A}\right) \right], \quad (6.103)$$

где $\kappa = 0,40$, а A — постоянная длина демпфирования, которую можно определить следующим образом:

$$A = 26 \frac{v}{N} u_\tau^{-1}, \quad N = \left\{ \frac{p^+}{v_w^+} [1 - \exp(11,8v_w^+)] + \exp(11,8v_w^+) \right\}^{1/2}, \quad (6.104a)$$

$$p^+ = \frac{v u_e}{u_\tau^2} \frac{du_e}{dx}, \quad v_w^+ = \frac{v_w}{u_\tau}. \quad (6.104b)$$

Для течения при отсутствии массообмена ($v_w^+ = 0$)

$$N = (1 - 11,8p^+)^{1/2}. \quad (6.104c)$$

Очевидно, что при нулевом градиенте давления и отсутствии массообмена $N = 1$, а величина A определяется соотношением (6.17).

¹⁾ Подобные формулы рассмотрены в монографии [2]*.—Прим. ред.

Входящий в формулу (6.102) коэффициент перемежаемости γ_{tr} необходим для описания характеристик пограничного слоя в области перехода от ламинарного режима течения к турбулентному. Он определяется эмпирическим соотношением

$$\gamma_{tr} = 1 - \exp \left[-G(x - x_{tr}) \int_{x_{tr}}^x \frac{dx}{u_e} \right]. \quad (6.105)$$

Здесь x_{tr} — координата начала области перехода, а коэффициент G , имеющий размерность скорость/(длина)² и вычисляемый в области перехода, определяется выражением

$$G = 8,33 \times 10^{-4} \frac{u_e^3}{\nu^2} R_x^{-1,34}. \quad (6.106)$$

Это выражение было получено вначале для несопряженных течений и, как будет показано в гл. 11, применимо для сопряженных течений с числами Маха меньше 5 при отсутствии теплообмена. Оно становится несправедливым для сопряженных течений с теплообменом, поскольку значительные перепады между температурами стенки и внешнего потока оказывают существенное влияние на длину зоны перехода. Согласно корреляционной зависимости Чена и Тайсона [21] длина области перехода $R_{\Delta x} (\equiv R_{x_t} - R_{x_{tr}})$ для несопряженных течений определяется формулой

$$R_{\Delta x} = 60 R_{x_{tr}}^{2/3}, \quad (6.107)$$

из которой следует, что область перехода пограничного слоя имеет относительно большую протяженность при сравнительно низких числах Рейнольдса и становится менее существенной при высоких числах Рейнольдса.

В формулу (6.102) входит еще один коэффициент перемежаемости γ , который учитывает тот факт, что при приближении к внешней границе пограничного слоя турбулентность становится перемежающейся, т. е. течение бывает турбулентным лишь часть всего времени γ . Коэффициент γ определяется эмпирическим соотношением

$$\gamma = \left[1 + 5,5 \left(\frac{y}{y_0} \right)^6 \right]^{-1}, \quad (6.108)$$

где y_0 — координата y точки, в которой $u/u_e = 0,995$.

Во внешней части слоя коэффициент турбулентной вязкости выражается формулой

$$(\epsilon_m)_0 = \alpha \int_0^\infty (u_e - u) dy \gamma_{tr} \gamma, \quad y_c \leq y \leq \delta. \quad (6.109)$$

В обычных пограничных слоях с $u < u_e$ эта формула сводится к простому соотношению $(\varepsilon_m)_0 = \alpha u_e \delta^* \gamma_{ir} \gamma$. Постоянная α равна 0,0168 при $R_\theta \geq 5000$. При более низких значениях R_θ величина α зависит от R_θ в соответствии с эмпирической формулой, предложенной в работе [12]:

$$\alpha = 0,0168 \frac{1,55}{1 + \Pi}, \quad (6.110a)$$

причем эмпирическая корреляционная зависимость Π от R_θ имеет вид

$$\Pi = 0,55 \left[1 - \exp(-0,243z_1^{1/2} - 0,298z_1) \right], \quad (6.110b)$$

где $z_1 = R_\theta/425 - 1$ при $R_\theta > 425$.

Граница между внутренней и внешней областями пограничного слоя определяется из условия непрерывности коэффициента турбулентной вязкости; на расстоянии от стенки до этой границы применяется формула для коэффициента турбулентной вязкости для внутренней области до тех пор, пока не будет выполняться равенство $(\varepsilon_m)_i = (\varepsilon_m)_0$.

Предложены различные соотношения для турбулентного числа Прандтля. Иногда величина P_r выражается в зависимости от расстояния y до стенки и молекулярного числа Прандтля, иногда она просто считается постоянной. Для воздуха, имеющего молекулярное число Прандтля, близкое к единице, учет влияния P_r не вносит существенных изменений и, во всяком случае, P_r оказывает влияние на P_r , лишь при $u_e y / \nu P_r < 50$. Согласно результатам исследования Себиси и Смита [12], при использовании формулы для турбулентного числа Прандтля типа соотношения (6.26) для вязкого и теплопроводного подслоев в случае воздуха получаются примерно такие же результаты, что и при использовании постоянного значения турбулентного числа Прандтля. С другой стороны, положение изменяется, если молекулярное число Прандтля существенно отличается от единицы. Как будет показано в гл. 7, при использовании переменного турбулентного числа Прандтля в подслое получается значительно более точное соответствие результатов расчета экспериментальным данным, чем при использовании постоянной величины турбулентного числа Прандтля.

Примеры расчета

В качестве примера плоского турбулентного течения при наличии теплообмена (но при отсутствии массообмена) рассмотрим обтекание эллипса с гладкой поверхностью (рис. 6.14). Распределение

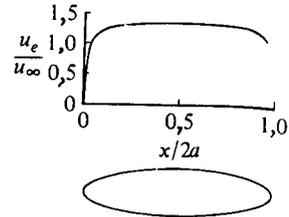


Рис. 6.14. Распределение скорости невязкого потока по образующей эллипса с относительной толщиной 1/4.

скорости внешнего потока можно с достаточной точностью рассчитать на основании теории невязкого течения, и при нулевом угле атаки оно выражается соотношениями (Р4.36) и (Р4.37).

На рис. 6.15—6.18 представлены результаты решения уравнений (6.92) и (6.93) с граничными условиями (4.30) при отсутствии массообмена, полученные с помощью программы на языке Фортран, описанной в разд. 13.5. Расчеты проводились для воздуха ($Pr = 0,72$) при использовании модели турбулентности, описанной соотношениями (6.102)—(6.110) для постоянной температуры стенки; величина Pr_s принималась постоянной и равной 0,90. Расчеты выполнены при двух значениях числа Рейнольдса $R_{2a} = 10^6$ и 10^7 . Положение перехода определялось по эмпирической формуле Мишеля [22]

$$R_{\theta_{tr}} = 1,174 \left(1 + \frac{22400}{R_{x_{tr}}} \right) R_{x_{tr}}^{0,46}. \quad (6.111)$$

Эта формула применима только для несопряженных ламинарных течений и не учитывает влияния теплообмена, которое может пов-

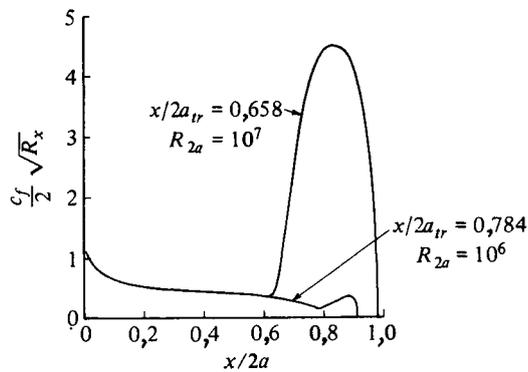


Рис. 6.15. Влияние числа Рейнольдса на распределение параметра поверхностного трения $f_w'' (= c_f/2)\sqrt{R_x}$ по осевой координате $x/2a$.

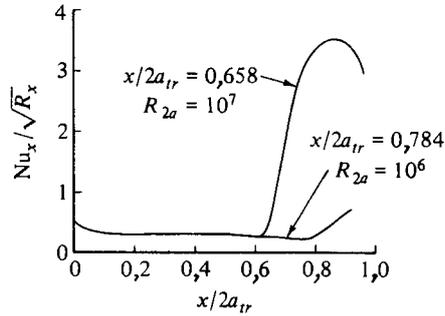


Рис. 6.16. Влияние числа Рейнольдса на распределение параметра плотности теплового потока в стенку g'_w ($\equiv Nu_x / \sqrt{R_x}$) по осевой координате $x/2a$.

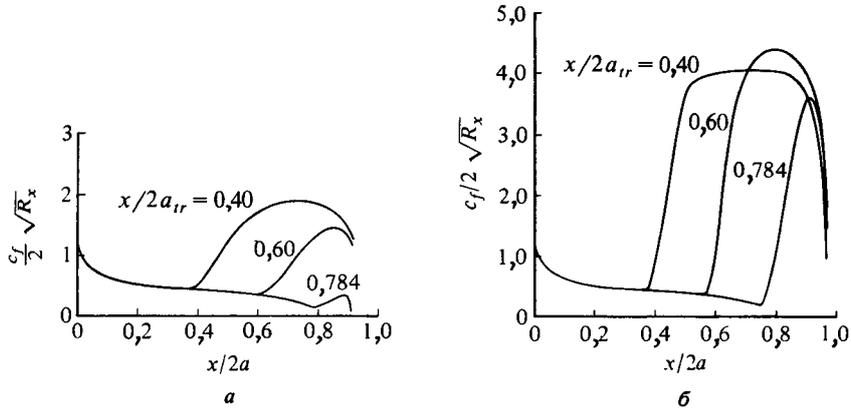


Рис. 6.17. Влияние положения перехода на распределение параметра поверхностного трения f''_w .
 $a - R_{2a} = 10^6$; $б - R_{2a} = 10^7$.

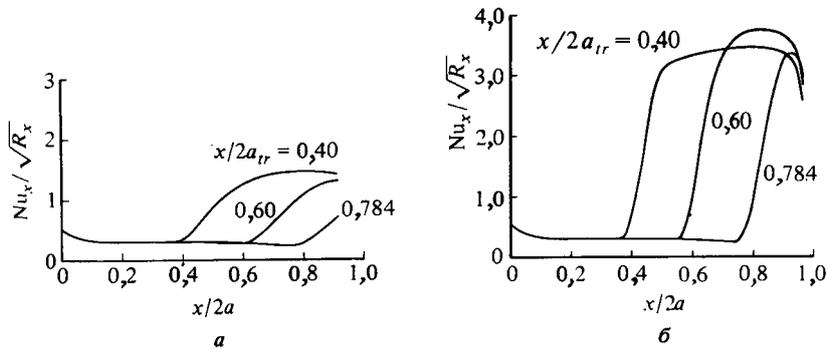


Рис. 6.18. Влияние положения перехода на распределение параметра плотности теплового потока в стенку g'_w .
 $a - R_{2a} = 10^6$; $б - R_{2a} = 10^7$.

лится на положение перехода. Чтобы применить эту формулу, проводился расчет $R_\theta (\equiv u_e \theta / \nu)$ в процессе решения уравнений ламинарного пограничного слоя для текущей продольной координаты s , соответствующей определенному значению $R_x \equiv u_e s / \nu$. Как только R_θ и R_x удовлетворяли условию (6.111), можно было начинать расчет турбулентного пограничного слоя с использованием соотношений для коэффициента турбулентной вязкости. В некоторых случаях в расчетах или в реальных задачах достигаются условия отрыва ламинарного пограничного слоя, т. е. производная $(\partial u / \partial y)_w$ становится равной нулю, до перехода. В подобных ситуациях разумно предположить, что точка отрыва ламинарного пограничного слоя является точкой перехода; на практике после отрыва ламинарного слоя очень скоро происходит переход в слое смешения с последующим (по крайней мере в некоторых случаях) присоединением турбулентного слоя.

Результаты расчета положения перехода при двух числах Рейнольдса показывают, что при $R_{2a} = 10^6$ отрыв ламинарного пограничного слоя происходит при $x/2a = 0,784$, когда значения R_θ и R_x еще не удовлетворяют условию (6.111). С другой стороны, результаты расчета при $R_{2a} = 10^7$ показывают, что переход происходит при $x/2a = 0,658$ согласно соотношению (6.111).

Данные, приведенные на рис. 6.15, показывают влияние числа Рейнольдса на распределение безразмерного параметра поверхностного трения $f_w' (\equiv c_f / 2\sqrt{R_x})$ по осевой координате $x/2a$. Отметим, что в обоих случаях течение начинается от критической точки $x/2a = 0$ при $m = 1$ и $f_w' = 1,23259$ (табл. 4.1) и на участке ламинарного пограничного слоя величина f_w' не зависит от числа Рейнольдса. Течение с $R_{2a} = 10^6$ отрывается при $x/2a = 0,784$ и расчет турбулентного пограничного слоя начинается с этой точки. Течение с $R_{2a} = 10^7$, отрыв которого также произошел бы в точке $x/2a = 0,784$ (поскольку положение отрыва ламинарного пограничного слоя при заданном распределении давления не зависит от числа Рейнольдса), становится турбулентным раньше, в точке $x/2a = 0,658$. После этого параметр напряжения поверхностного трения резко возрастает по x , достигает максимума при $x/2a = 0,85$, а затем начинает снижаться и в точке $x/2a = 0,98$ становится равным нулю, что свидетельствует об отрыве турбулентного пограничного слоя. С другой стороны, течение с более низким числом Рейнольдса отрывается раньше, в точке $x/2a = 0,91$, поскольку пограничный слой имеет большую толщину в основном вследствие большей скорости роста толщины слоя на участке ламинарного режима течения.

Таким образом, согласно результатам расчета, возрастание чис-

да Рейнольдса вызывает смещение точки перехода вверх по потоку и затягивание отрыва турбулентного пограничного слоя.

Данные, представленные на рис. 6.16, показывают, что число Рейнольдса оказывает примерно такое же влияние на распределение безразмерного градиента температуры на стенке $g'_w (\equiv Nu_x/\sqrt{R_x})$ по осевой координате $x/2a$, как и на распределение безразмерного параметра напряжения поверхностного трения f''_w . И в этом случае при обоих числах Рейнольдса величина g'_w в критической точке равна 0,5017, а распределение g'_w в области ламинарного пограничного слоя не зависит от числа Рейнольдса. Как и f''_w , величина g'_w при $R_{2a} = 10^7$ резко возрастает в точке перехода и, достигнув максимума в точке $x/2a = 0,85$, начинает снижаться. Однако в отличие от f''_w величина g'_w в точке отрыва не становится равной нулю ни при каком числе Рейнольдса.

На рис. 6.17 и 6.18 показано влияние положения перехода на f''_w и g'_w соответственно при двух значениях числа Рейнольдса. Результаты расчета при $R_{2a} = 10^6$, представленные на рис. 6.17, а и 6.18, а, показывают, что при уменьшении координаты x точки перехода от 0,784 до 0,4 оба параметра возрастают. Однако положение точки отрыва остается при этом практически неизменным. Результаты расчета при $R_{2a} = 10^7$, приведенные на рис. 6.17, б и 6.18, б, свидетельствуют, что при смещении координаты x точки перехода из $x/2a = 0,784$ в $x/2a = 0,4$ наблюдается аналогичное возрастание напряжения поверхностного трения и плотности теплового потока в стенку. Однако они показывают также, что увеличение числа Рейнольдса приводит к затягиванию отрыва пограничного слоя.

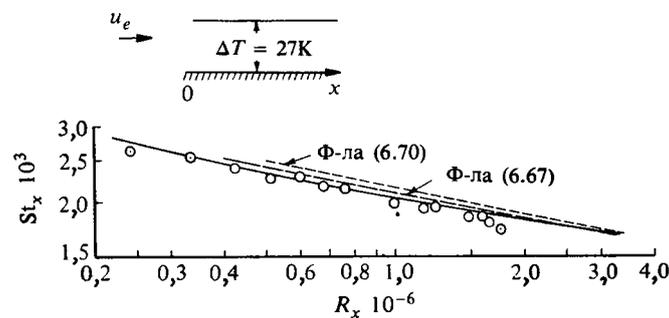


Рис. 6.19. Сравнение расчетной зависимости для числа Стантона в пограничном слое на плоской пластине с экспериментальными данными Себана и Даути [23].

расчетная зависимость; \odot экспериментальные данные.

Теперь рассмотрим три течения с нулевым градиентом давления при различных распределениях температуры стенки, чтобы показать, с какой степенью точности результаты расчета соответствуют экспериментальным данным, и оценить таким образом точность численной схемы и модели турбулентности.

На рис. 6.19 расчетное распределение местного числа Стантона St сравнивается с экспериментальными данными Себана и Даути [23] для изотермически нагреваемой плоской пластины при $Pr = 0,70$.

На рис. 6.20 и 6.21 результаты расчета местного числа Стантона сравниваются с экспериментальными данными Рейнольдса и др. [17] при одноступенчатом и двухступенчатом распределении температуры соответственно. Нетрудно видеть, что в обоих случаях результаты расчета, полученные дифференциальным методом и с помощью эмпирических соотношений (6.79) и (6.83), достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными. Отметим, что в случае двухступенчатого распределения температуры стенки соотношение (6.83) можно записать в виде

$$St = St_r(x) \left\{ 1 + \frac{T_{w2} - T_{w1}}{T_{w1} - T_e} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{9/10} \right]^{-1/9} \right\}.$$

В качестве последнего примера рассмотрим турбулентный пограничный слой на гладкой поверхности с продольным градиентом

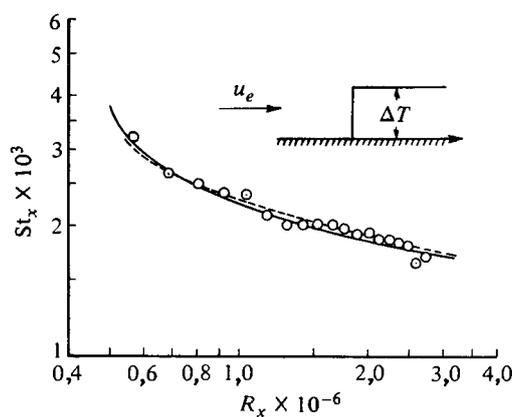


Рис. 6.20. Сравнение расчетной зависимости для числа Стантона в пограничном слое на плоской пластине с экспериментальными данными Рейнольдса и др. [17].

— расчетная зависимость; --- результаты расчета по формуле (6.79); ⊙ экспериментальные данные.

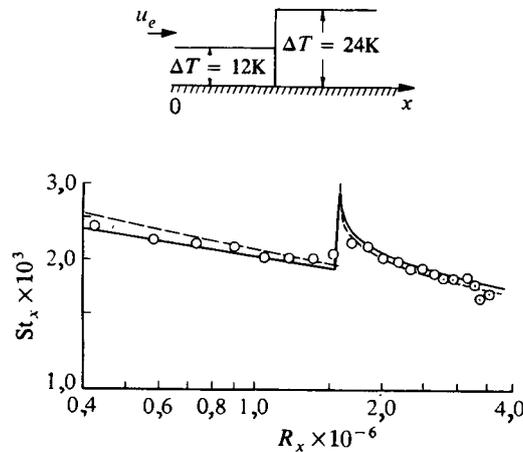


Рис. 6.21. Сравнение расчетной зависимости для числа Стантона в пограничном слое на плоской пластине с экспериментальными данными Рейнольдса и др. [17].

— расчетная зависимость; --- результаты расчета по формуле (6.83); \odot экспериментальные данные. Довольно плавное изменение результатов измерения St указывает на то, что ступенчатая функция недостаточно точно описывает реальное изменение температуры.

давления и сравним результаты расчета дифференциальным методом с экспериментальными данными. На рис. 6.22 представлены данные для ускоряющегося потока, полученные Моретти и Кейсом [24]. Расчет проводился при измеренных в экспериментах разности температур стенки и внешнего потока $\Delta T(x)$ и распределении скорости $u_e(x)$. В этом случае результаты расчета также достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Шероховатые поверхности

Модель турбулентной вязкости Себиси — Смита, описанную соотношениями (6.102)—(6.110), можно обобщить на случай турбулентного пограничного слоя на шероховатой стенке. Обобщение основано на полученных ранее результатах Ротта [25], который показал, что профили скорости на гладкой и шероховатой поверхностях могут быть подобными, если сместить начало координаты y . Перепишем соотношение (6.103) для l следующим образом:

$$l = \kappa(y + \Delta y)[1 - \exp\{-(y + \Delta y)/A\}] \quad (6.112)$$

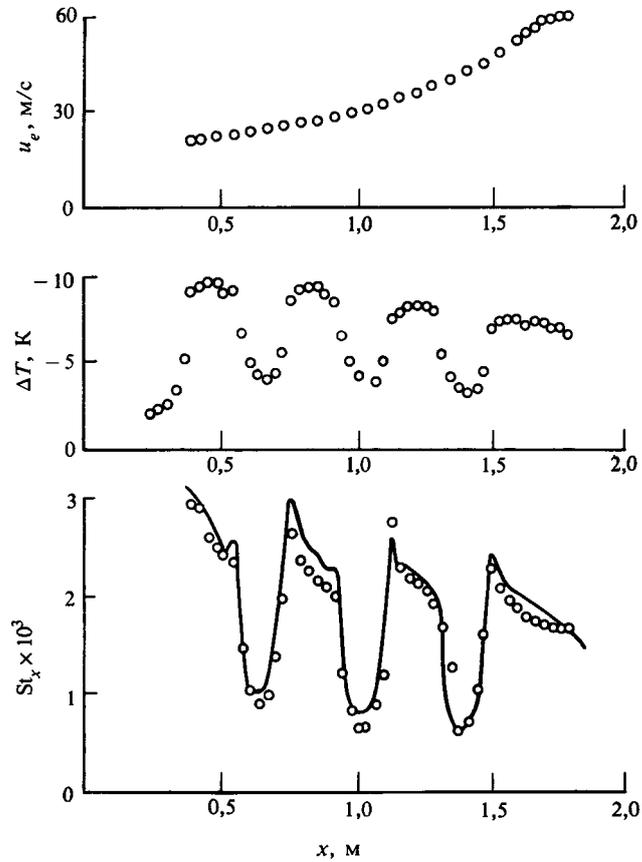


Рис. 6.22. Сравнение результатов расчета числа Стантона для ускоряющегося течения в пограничном слое с экспериментальными данными Моретти и Кейса [24].

и выразим Δy в зависимости от параметра эквивалентной песочной шероховатости $k_s^+ (\equiv k_s u_\tau / \nu)$, а именно

$$\frac{\Delta y u_\tau}{\nu} = \Delta y^+ = \begin{cases} 0,9 \left[\sqrt{k_s^+} - k_s^+ \exp\left(-\frac{k_s^+}{6}\right) \right], & 5 \leq k_s^+ \leq 70, \\ 0,7 (k_s^+)^{0,58}, & 70 \leq k_s^+ \leq 2000 \end{cases} \quad (6.113)$$

для гидравлически гладкой поверхности; при меньших значениях k_s^+ полагаем $\Delta y = 0$, чтобы получить результаты для гладкой стенки.

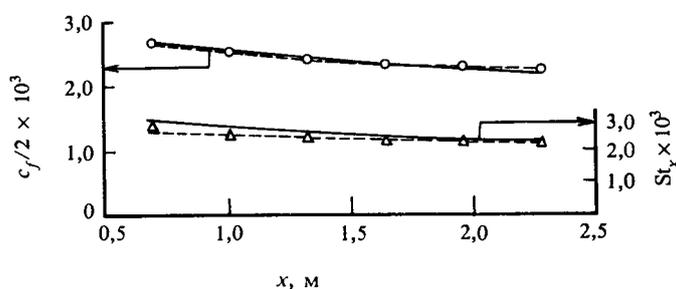


Рис. 6.23. Изменение поверхностного трения и теплообмена вдоль шероховатой поверхности (шероховатость создается плотно расположенными сферами диаметром 1,27 мм); $u_\tau d/\nu \approx 120$.

— расчетные зависимости; --- результаты расчета по соотношению (6.114); ○△ экспериментальные данные Пименты и др. [26]. Вариант 2, $u_\infty = 27,1$ м/с.

На рис. 6.23 результаты расчета сравниваются с экспериментальными данными Пименты и др. [26], которые измерили характеристики течения с нулевым градиентом давления на шероховатой поверхности, причем шероховатость создавалась плотно расположенными сферами одинакового диаметра 1,27 мм. Штриховыми линиями на рис. 6.23 показаны результаты расчета по эмпирическим соотношениям, предложенным в работе [26]:

$$\frac{c_f}{2} = 0,00328 \left(\frac{\theta}{r} \right)^{-0,175}, \quad (6.114a)$$

$$St_x = 0,00317 \left(\frac{\theta}{r} \right)^{-0,175}. \quad (6.114b)$$

Шероховатость именно такого типа рассматривалась Шлихтингом [13] для течений в трубе. Предложенная Шлихтингом высота эквивалентной песочной шероховатости k_s ($\equiv 1,25 r$, где r — радиус элемента шероховатости) применялась в работе [27]. Мы считаем, что градиент давления не может существенно повлиять на расчетные результаты для шероховатой поверхности при условии, что метод расчета позволяет получить достаточно точные результаты для течения с градиентом давления на гладкой поверхности. Действительно, шероховатость вызывает изменение граничного условия на стенке, но не влияет на вид расчетных формул, применяющихся во внешней части слоя.

Интегральные методы

Как и в случае ламинарного течения с градиентом давления, известно несколько интегральных методов расчета переноса количества движения в турбулентном пограничном слое и значительно меньше методов расчета теплообмена. Это несоответствие обусловлено трудностью учета влияния возможного резкого изменения температуры стенки или плотности теплового потока на профили температуры, применяющиеся при решении интегрального уравнения энергии. Рассмотрим интегральные методы, вначале те, которые применяются для расчета переноса количества движения, а затем применяющиеся для расчета теплообмена.

Интегральное уравнение количества движения

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} (H + 2) = \frac{c_f}{2} \quad (3.68)$$

содержит три неизвестных параметра θ , H , c_f , и поэтому требуется найти соотношения между этими интегральными параметрами. Существует несколько способов достижения этой цели, как указано, например, в работе Рейнольдса [28]. Один из подходов, которому мы будем следовать, заключается в использовании предположения о том, что толщина турбулентного пограничного слоя растет вследствие «подмешивания» нетурбулентной жидкости на границе пограничного слоя и вовлечения ее в область турбулентного течения. Этот подход впервые применил Хед [29], который предположил, что составляющая средней скорости по нормали к границе пограничного слоя (которую называют скоростью подмешивания v_E (рис. 6.24)) зависит только от характеристик профиля средней скорости, в частности от H . Он предположил, что безразмерная скорость подмешивания v_E/u_e определяется соотношением

$$\frac{v_E}{u_e} \equiv \frac{1}{u_e} \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy = \frac{1}{u_e} \frac{d}{dx} [u_e (\delta - \delta^*)] = F(H), \quad (6.115)$$

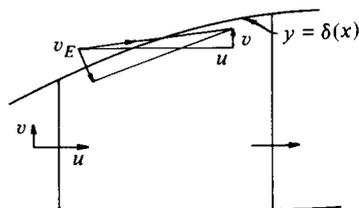


Рис. 6.24. Определение скорости подмешивания.

где использовано определение δ^* (3.69b). Если ввести определение

$$H_1 = \frac{\delta - \delta^*}{\theta}, \quad (6.116)$$

то правое равенство соотношения (6.115) можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}(u_e \theta H_1) = u_e F. \quad (6.117)$$

Кроме того, Хед предположил, что величина H_1 связана с формпараметром H соотношением

$$H_1 = G(H). \quad (6.118)$$

Функции F и G определялись эмпирически, и было установлено, что различные группы экспериментальных данных наиболее точно описываются следующими приближенными формулами:

$$F = 0,0306(H_1 - 3,0)^{-0,6169}, \quad (6.119)$$

$$G = \begin{cases} 0,8234(H - 1,1)^{-1,287} + 3,3 & H \leq 1,6, \\ 0,5501(H - 0,6778)^{-3,064} + 3,3 & H \geq 1,6. \end{cases} \quad (6.120)$$

Если F и G выражаются формулами (6.119) и (6.120), то соотношение (6.117) позволяет найти связь между θ и H . Требуется еще одно соотношение, связывающее c_f и θ и(или) H . Хед использовал полуэмпирический закон поверхностного трения Людвиг — Тилмана [30]

$$c_f = 0,246 \times 10^{-0,678H} R_\theta^{-0,268}, \quad (6.121)$$

где $R_\theta = u_e \theta / \nu$. Система, состоящая из уравнения (3.68) и соотношений (6.115)—(6.121), включает в себя два обыкновенных дифференциальных уравнения. Ее можно решить численно при заданном распределении скорости внешнего потока и найти в результате характеристики пограничного слоя, развивающегося на двумерном теле с гладкой поверхностью (приложение D). Чтобы начать расчеты, скажем, с сечения $x = x_0$, необходимо задать две из трех величин θ , H и c_f , а третью определить по соотношению (6.121). Если расчет турбулентного пограничного слоя выполняется после проведения расчета ламинарного пограничного слоя на той же самой поверхности, расчет методом Хеда часто начинается с предположения, что толщина потери импульса θ непрерывна, а начальное значение H равно 1,4 — приближенному значению, соответствующему случаю обтекания плоской пластины.

Усовершенствованным интегральным методом расчета переноса количества движения в турбулентном пограничном слое является метод «задержки подмешивания» Грина [31], который представляет собой обобщение метода Хеда и отличается тем, что интегральное уравнение количества движения и уравнение подмешивания дополняются уравнением скорости продольного изменения коэффициента подмешивания F . Это дополнительное уравнение позволяет получить более точные расчетные результаты для течений с быстро изменяющимися характеристиками и является существенным усовершенствованием метода Хеда. По существу, метод Грина является «интегральным» аналогом «дифференциального» метода Брэдшоу и др. [32]. При его использовании требуется, как и раньше, найти решение уравнений (3.68) и (6.115) и, кроме того, учесть уравнение «скорости изменения коэффициента подмешивания», имеющее вид

$$\theta(H_1 + H) \frac{dF}{dx} = \frac{F(F + 0,02) + 0,2667c_{f_0}}{F + 0,01} \times \\ \times \left\{ 2,8 \left[(0,32c_{f_0} + 0,024F_{\text{eq}} + 1,2F_{\text{eq}}^2)^{1/2} - (0,32c_{f_0} + 0,024F + 1,2F^2)^{1/2} \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{\delta}{u_e} \frac{du_e}{dx} \right)_{\text{eq}} - \frac{\delta}{u_e} \frac{du_e}{dx} \right\}, \quad (6.122)$$

причем числовые значения входящих в него коэффициентов подобраны из условия наиболее полного соответствия экспериментальным данным и эмпирическим функциям Брэдшоу и др. [32], а c_{f_0} — коэффициент поверхностного трения для плоской пластины, рассчитанный по эмпирической формуле

$$c_{f_0} = \frac{0,01013}{\lg R_\theta - 1,02} - 0,00075. \quad (6.123)$$

Индекс eq в уравнении (6.122) относится к параметрам равновесного течения, в котором по определению форма профилей скорости и касательного напряжения в пограничном слое не зависит от x . Функциональные выражения для F_{eq} , $[(\theta/u_e)(du_e/dx)]_{\text{eq}}$ и $[(\delta/u_e)(du_e/dx)]_{\text{eq}}$ имеют вид

$$F_{\text{eq}} = H_1 \left[\frac{c_f}{2} - (H + 1) \left(\frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} \right)_{\text{eq}} \right], \quad (6.124)$$

$$\left(\frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} \right)_{\text{eq}} = \frac{1,25}{H} \left[\frac{c_f}{2} - \left(\frac{H - 1}{6,432H} \right)^2 \right], \quad (6.125)$$

и как очевидное следствие из определений H и H_1

$$\left(\frac{\delta}{u_e} \frac{du_e}{dx} \right)_{\text{eq}} = (H + H_1) \left(\frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} \right)_{\text{eq}}. \quad (6.126)$$

Формула для коэффициента поверхностного трения и соотношение, связывающее формпараметры H и H_1 , замыкают соотношения, необходимые для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.68), (6.115) и (6.122). Формула для поверхностного трения имеет вид

$$\left(\frac{c_f}{c_{f_0}} + 0,5 \right) \left(\frac{H}{H_0} - 0,4 \right) = 0,9, \quad (6.127a)$$

где

$$1 - \frac{1}{H_0} = 6,55 \left(\frac{c_{f_0}}{2} \right)^{1/2}, \quad (6.127b)$$

так что соотношения (6.123), (6.127) и (6.128) позволяют найти c_f в зависимости от H и R_θ , причем числовые значения близки к результатам расчета по формуле (6.121).

Соотношение для формпараметра

$$H_1 = 3,15 + \frac{1,72}{H-1} - 0,01(H-1)^2 \quad (6.127c)$$

дает значения, близкие к результатам расчета по формуле (6.120).

Результаты расчета описанным методом вполне удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными для течения в пограничном слое несжимаемой жидкости и в следе. Кроме того, этот метод обобщен на случай течения сжимаемой жидкости [31].

Характеристики плоского турбулентного пограничного слоя можно также рассчитать сравнительно простыми методами типа метода Твейтса, описанного в гл. 4. Хотя эти методы ограничены и не дают столь же точных результатов, как конечно-разностные и интегральные методы, рассмотренные в данной главе, они тем не менее полезны для оценки параметров пограничного слоя без проведения расчетов на ЭВМ. Согласно методу, описанному в работе [33], толщина потери импульса θ вычисляется по формуле

$$\theta \left(\frac{u_e \theta}{\nu} \right)^{1/5} u_e^4(x) = 0,0106 \int_{x_{ir}}^x u_e^4(x) dx + \text{const}. \quad (6.128)$$

Нижний предел интегрирования определяется на основании начальных условий. Например, если во всей рассматриваемой области по-

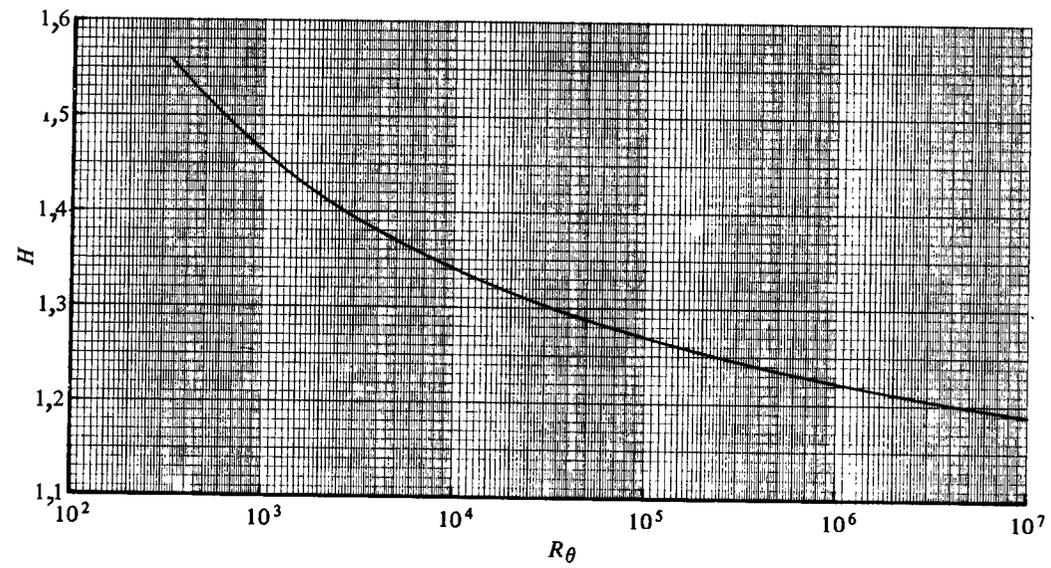


Рис. 6.25. Формпараметр H для турбулентного пограничного слоя в течении с нулевым градиентом давления.

граничный слой является турбулентным, то и нижний предел интегрирования, и постоянную интегрирования можно принять равными нулю. С другой стороны, если турбулентному слою предшествует ламинарный слой, то постоянная интегрирования определяется из условия непрерывности θ , а сама величина θ находится по результатам расчета ламинарного пограничного слоя. В таком случае постоянная интегрирования равна величине $\theta(u_e \theta / \nu)^{1/5} u_e^4$ в точке перехода.

Формпараметр H вычисляется по другой эмпирической формуле

$$u_e^2 \left(\frac{1}{H-1} - 4,762 \right) = \text{const} + 0,00307 \int_{x_{tr}}^x u_e^2 \theta^{-1} \left(\frac{u_e \theta}{\nu} \right)^{-1/5} dx. \quad (6.129a)$$

Величина постоянной также определяется на основании начальных условий, в качестве которых обычно принимается величина H , равная значению в точке перехода, полученному с помощью зависимости H от R_θ для турбулентного пограничного слоя с нулевым градиентом давления (рис. 6.25). Для расчета местного коэффициента поверхностного трения c_f используется еще одна эмпирическая формула

$$c_f = \frac{G(H)}{R_\theta^{1/5}}, \quad (6.129b)$$

где $G(H)$ в диапазоне чисел Рейнольдса 10^6-10^8 определяется по табл. 6.1.

При использовании интегральных методов расчета теплообмена в турбулентном пограничном слое в общем требуется найти решение интегральных уравнений количества движения и энергии, хотя иногда можно использовать решения интегральной формы одного уравнения и дифференциальной формы другого уравнения. Для ре-

Таблица 6.1. Универсальная функция $G(H)$

H	$G(H)$	H	$G(H)$
1,2	0,0108	2,0	0,0027
1,3	0,0092	2,1	0,0022
1,4	0,0079	2,2	0,0017
1,5	0,0067	2,3	0,0012
1,6	0,0057	2,4	0,0008
1,7	0,0048	2,5	0,0004
1,8	0,0040	2,6	0
1,9	0,0033		

шения уравнения энергии, разумеется, необходимы экспериментальные данные, которые используются обычно в виде зависимости плотности теплового потока в стенку от известных интегральных параметров совместно с соотношением, связывающим толщины динамического и теплового пограничных слоев. Эмпирические соотношения, которые были бы справедливы для многих классов течений, а не лишь для самых простых, получить трудно; поэтому интегральные методы не нашли широкого распространения и в общем следует отдать предпочтение дифференциальным методам.

Если для сравнительно простого течения требуется приближенно оценить характеристики теплообмена, можно использовать соотношения, полученные с помощью интегральных методов. Например, в методе Амброка [20] предполагается, что справедлива аналогия Рейнольдса, и на основании решения интегрального уравнения энергии получено следующее приближенное соотношение:

$$\text{St} = \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p u_e (T_w - T_e)} = \frac{\text{Pr}^{-0,4} R_L^{-0,2} (T_w - T_e)^{0,25}}{\left[\int_0^{x^*} u_e^* (T_w - T_e)^{1,25} dx^* \right]^{0,2}}, \quad (6.130)$$

где u_e^* и R_L — безразмерные параметры, определенные выражениями (4.77)

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad u_e^* = \frac{u_e}{u_{\text{ref}}}, \quad R_L = \frac{u_{\text{ref}} L}{\nu}.$$

Полезно отметить, что соотношение (6.130) учитывает, хотя и приближенно, влияние переменной температуры стенки.

Рассмотренное соотношение аналогично описанному выше соотношению (4.68) для расчета ламинарного пограничного слоя с градиентом давления. Более подробное описание этого и других интегральных методов расчета можно найти в работе [20].

6.7. Пристенные струи и завесное охлаждение

При турбулентном режиме течения в пограничном слое характеристики завесного охлаждения зависят, как и при ламинарном режиме течения, от отношения скорости течения в щели к скорости внешнего потока, отношения температуры течения в щели к температуре внешнего потока T_c/T_e , граничных условий на защищаемой поверхности и формы начальных профилей. Кроме того, геометрические характеристики могут быть настолько разнообразными, что решение задач о пристенной струе и завесном охлаждении можно полу-

читать только дифференциальным методом (типа описанного в разд. 4.5), к рассмотрению которого мы и приступаем в данном разделе.

Для простого случая завесного охлаждения в условиях турбулентного пограничного слоя на плоской пластине предложено несколько эмпирических формул. Результаты исследования [34] показали, что для схемы течения, представленной на рис. 4.18, зависимость эффективности завесного охлаждения η^* от параметра вдува $F \equiv \rho_c u_c / \rho_e u_e$ удовлетворительно описывается следующими эмпирическими соотношениями:

$$\eta^* = \begin{cases} 2,73F^{0,4} \left(\frac{x}{h}\right)^{-0,38} & \frac{x}{h} \leq 20, \\ 5,44F^{0,4} \left(\frac{x}{h}\right)^{-0,58} & 20 \leq \frac{x}{h} \leq 150, F < 1. \\ 2,04 \left(\frac{x}{h}\right)^{-0,38} & \end{cases} \quad (6.131a)$$

В области $x/h < 65$ при $0,45 < F < 1$ рекомендуется применять меньшее значение η^* из полученных с помощью двух последних соотношений

$$\eta^* = \begin{cases} 1,96F^{0,55} \left(\frac{x}{h}\right)^{-0,38} & \frac{x}{h} < 150, 1 \leq F < 2, \\ 2,71 \left(\frac{x}{h}\right)^{-0,38} & \frac{x}{h} < 150, 2 \leq F < 3,5. \end{cases} \quad (6.131b)$$

Кроме того, авторы работы [34] рекомендуют следующую формулу для определения числа Нуссельта $Nu_c (\equiv \bar{h}x/k_c)$, рассчитанного по коэффициенту теплопроводности при температуре охладителя T_c , в случае $F \leq 1$:

$$Nu_c = 0,004R_x^{0,9}F^{-0,1}, \quad 8 \leq \frac{x}{h} \leq 60. \quad (6.131c)$$

где число Рейнольдса $R_x (\equiv u_e x / \nu_e)$ рассчитано по скорости внешнего потока u_e и теплофизическим параметрам, определенным при температуре внешнего потока T_e . Авторы установили, что при более высоких скоростях вдува $1 < F < 2$ более сильное влияние на теплообмен оказывает число Рейнольдса струи охладителя $R_{x_c} (\equiv u_c x / \nu_c)$; поэтому для числа Нуссельта используются следующие корреляционные соотношения:

$$Nu_c = \begin{cases} 0,057R_{x_c}^{0,7}, & \frac{x}{h} < 10, \\ 6,39 \times 10^{-5} \left(\frac{R_{x_c}}{F}\right)^{1,3}, & 10 \leq \frac{x}{h} \leq 35. \end{cases} \quad (6.131d)$$

Методика расчета характеристик турбулентной пристенной струи и завесного охлаждения аналогична методике расчете ламинарной пристенной струи и завесного охлаждения, описанной в разд. 4.5, с той лишь разницей, что теперь необходимо рассчитать напряжения Рейнольдса и плотности турбулентного теплового потока, входящие в уравнения движения и энергии. При наличии такой расчетной модели можно решить основные уравнения, если заданы начальные профили скорости и температуры и заданы граничные условия.

Профиль скорости в области, примыкающей к щели (см. рис. 4.18 для ламинарного режима течения), имеет местные максимум и минимум помимо асимптотической максимальной величины во внешнем потоке, стремление к которой отмечалось во всех рассмотренных выше течениях. Возникает вопрос, применимы ли модели турбулентной вязкости и пути перемешивания типа модели Себиси — Смита, описанной в предыдущем разделе, для подобных сложных профилей, поскольку при использовании таких моделей точка нулевого градиента скорости соответствует точке нулевого коэффициента турбулентной вязкости или нулевой длины пути перемешивания. Даже если учитывать только молекулярную вязкость, будут создаваться области низкого или нулевого касательного напряжения, являющиеся барьером для переноса количества движения и тепла или компонентов.

На рис. 6.26 показаны два профиля скорости в пристенной струе, соответствующие высокой и низкой скорости струи. В этих и во всех осесимметричных течениях возникают точки бесконечно большого или нулевого коэффициента турбулентной вязкости независимо от того, получены ли характерные линейные масштабы алгебраическим методом, как здесь, или на основании решения уравнений для скорости диссипации энергии турбулентности или для соответствующих линейных масштабов. Возникающие трудности можно преодолеть, используя модель турбулентности, основанную на решении уравнений напряжений Рейнольдса, для которых не

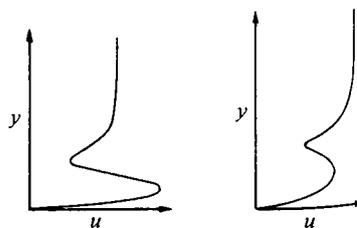


Рис. 6.26. Профили скорости в пристенной струе при высокой и низкой скоростях вдува.

применяется понятие турбулентной вязкости, или внося специальные изменения в модель турбулентной вязкости. Здесь выбран последний подход, поскольку он существенно проще и, как показано в работе [35], позволяет получить достаточно точные результаты для большинства инженерных задач. Отметим основные особенности этого метода.

Для заданного профиля скорости в пристенной струе (рис. 6.26) сначала находим координаты y точек, в которых скорость u достигает максимума u_{\max} и минимума u_{\min} . Обозначим их соответственно y_{\max} и y_{\min} . Затем вычисляем координаты

$$y_+ = y_{\min} + 0,04(x - x_0), \quad (6.132a)$$

$$y_- = y_{\min} - 0,04(x - x_0), \quad (6.132b)$$

определяющие рост толщины слоя смешения согласно имеющимся экспериментальным данным. Затем применяется модифицированный вариант алгебраической модели турбулентной вязкости Себиси — Смита, описанной в предыдущем разделе.

1. В пристенной области, $0 \leq y \leq y_{\max}$, применяются обычные соотношения (6.102) и (6.109) без коэффициента γ , а именно

$$(\epsilon_m)_i = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad 0 \leq y \leq y_c, \quad (6.133a)$$

$$(\epsilon_m)_0 = 0,0168 \int_0^{y_{\max}} (u_{\max} - u) dy, \quad y_c \leq y \leq y_{\max}, \quad (6.133b)$$

где l определяется по формуле (6.103). (В нескольких статьях были предприняты попытки показать, что логарифмический закон стенки для пристенной струи и для пограничного слоя неодинаков. Это справедливо, но является просто следствием большой отрицательной величины $\partial \tau / \partial u$ вблизи стенки; соотношение (6.133a) еще остается справедливым.)

2. В средней области типа следа, $y_+ \leq y \leq y_-$, применяется выражение

$$\epsilon_m = \kappa \frac{u_\tau + (u_\tau)_{b.l.}}{2} (y_+ - y_-) \quad (6.134a)$$

или

$$\epsilon_m = \kappa [u_\tau + (u_\tau)_{b.l.}] 0,04(x - x_0) \quad (6.134b)$$

где u_τ — динамическая скорость при $y = 0$, а $(u_\tau)_{b.l.}$ — динамическая скорость в пограничном слое на «разделительной пластине»

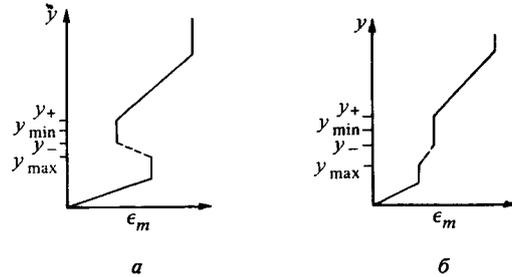


Рис. 6.27. Профиль коэффициента турбулентной вязкости в пристенной струе, рассчитанный по формулам (6.133) — (6.135).

щели; обе величины u_τ постоянны и определяются профилем скорости, заданным в сечении $x = x_0$.

3. В области $y_+ \leq y \leq \delta$ профиль коэффициента турбулентной вязкости вновь определяется выражениями, аналогичными соотношениям (6.102) и (6.109), за исключением того, что теперь

$$(\epsilon_m)_i = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad y_+ \leq y \leq y_0, \quad (6.135a)$$

$$(\epsilon_m)_0 = 0,0168 \int_{y_+}^{\delta} |(u_e - u)| dy, \quad y_0 \leq y \leq \delta, \quad (6.135b)$$

где $l = \kappa(y - y_{\min})$, а y_0 соответствует величине y_c в соотношениях (6.133).

На рис. 6.27 показано распределение коэффициента турбулентной вязкости поперек слоя, найденное с помощью соотношений (6.132)—(6.135). На участке от y_{\max} до y_- проводится линейная интерполяция коэффициента турбулентной вязкости, показанная на рис. 6.27 штриховой линией.

Отметим, что при изменении профиля пристенной струи величина ϵ_m , рассчитанная по формуле (6.134), может превысить величину $(\epsilon_m)_0$, определенную выражением (6.133b). В таком случае распределение коэффициента турбулентной вязкости на участке $y_{\max} \leq y \leq y_-$ строится, как показано на рис. 6.27, б. Если величина ϵ_m , рассчитанная по формуле (6.134), больше величины $(\epsilon_m)_0$, рассчитанной по формуле (6.135b), то на участке $y_- \leq y \leq \delta$ используется распределение коэффициента турбулентной вязкости, выраженное формулой (6.135), а формула (6.134) не применяется.

Чтобы решить уравнения пограничного слоя для схемы течения, показанной на рис. 4.18, снова используются соотношения (4.123)—(4.128). Поскольку режим течения является турбулентным

и необходимо применять понятия турбулентной вязкости и турбулентного числа Прандтля, уравнения (4.123) и (4.124) несколько модифицируются по сравнению со случаем ламинарного течения и принимают вид

$$(bf'')' + \frac{1}{2}ff'' = \xi \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right), \quad (6.136)$$

$$(eg')' + \frac{1}{2}fg' = \xi \left(f' \frac{\partial g'}{\partial \xi} - g'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right), \quad (6.137)$$

где

$$b = 1 + \epsilon_m^+, \quad e = \frac{1}{Pr} + \frac{\epsilon_m^+}{Pr_t}. \quad (6.138)$$

На рис. 6.28 и 6.29 показано изменение местного коэффициента поверхностного трения и эффективности охлаждения теплоизолированной стенки η^* в зависимости от безразмерной координаты

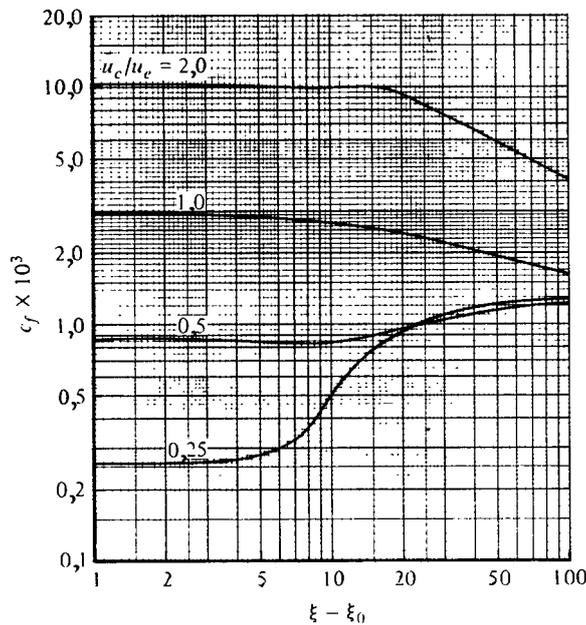


Рис. 6.28. Зависимости местного коэффициента поверхностного трения c_f от $\xi - \xi_0$ при $\delta/y_c = 2,0$, $Pr = 0,72$ и четырех значениях отношения скоростей u_c/u_e . (Расчеты проведены для теплоизолированной стенки.)

ξ при $\delta/y_c = 2,0$ для четырех значений u_c/u_e . Начальные профили скорости и температуры соответствуют числу Рейнольдса, рассчитанному по длине при $\xi_0 = 1$ и равному 10^6 . Как и в случае ламинарного течения, расчеты проводились с помощью численного метода и программы, описанных в гл. 13 и 14. Отметим, что, согласно расчетным данным, приведенным на этих рисунках, и результатам расчета для ламинарного режима течения, представленным на рис. 4.21 и 4.22, ламинарные и турбулентные пристенные струи имеют аналогичные основные особенности, но турбулентные струи развиваются значительно быстрее. Например, приведенные на рис. 6.29 результаты, которые имеют важное практическое значение, показывают, что при увеличении u_c/u_e от 0,25 до 1,0 эффективность охлаждения теплоизолированной стенки возрастает: при этом увеличении отношения скоростей длина участка, на котором температура стенки остается равной температуре истекающего из щели охладителя, увеличивается от $3y_c$ до $20y_c$ (y_c — высота щели). Можно ожидать, что эта тенденция не всегда будет сохраняться при более высоких отношениях скоростей, поскольку по крайней мере при равенстве толщин пограничных слоев на обеих сторонах

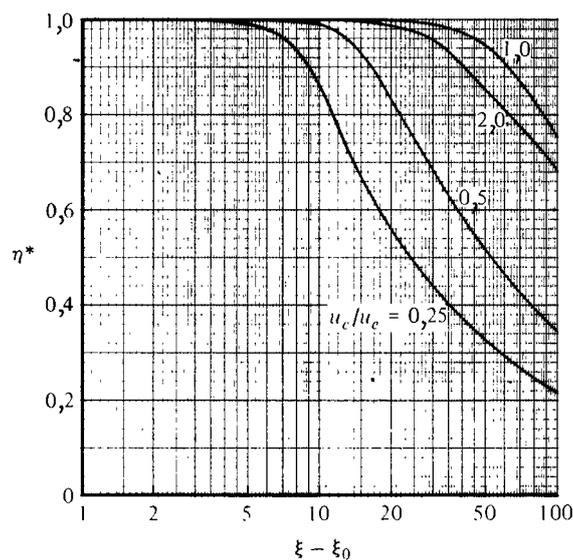


Рис. 6.29. Зависимости эффективности охлаждения теплоизолированной стенки η^* от $\xi - \xi_0$ при $\delta/y_c = 2,0$, $Pr = 0,72$ и четырех значениях отношения скоростей u_c/u_e .

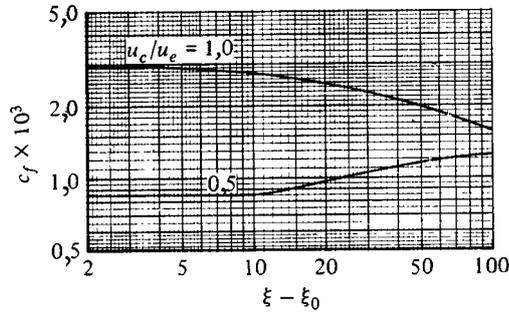


Рис. 6.30. Зависимости местного коэффициента поверхностного трения c_f от $\xi - \xi_0$ на изотермической стенке при $\delta/y_c = 0,95$ и $Pr = 0,72$.

кромки щели при равных скоростях интенсивность смещения снижается. Толщина пограничного слоя на верхней поверхности кромки щели δ не оказывает существенного влияния на характеристики турбулентного течения, особенно если кромка щели имеет значительную толщину. Величина $\delta/y_c = 2,0$ типична для некоторых практических приложений, поскольку при высоте щели y_c , равной, скажем, 5 мм, значение δ равно 10 мм, что достигается при скорости внешнего потока 10 м/с на конце пластины длиной 0,5 м или меньше, если используются устройства для искусственного утолщения пограничного слоя.

На рис. 6.30 и 6.31 представлены расчетные результаты для изотермической плоской пластины. Расчеты проводились для случая $Pr = 0,72$, $\delta/y_c = 0,95$ при двух значениях отношения скоростей с использованием тех же самых начальных профилей скорости и температуры, которые применялись в предыдущих расчетах. Как и

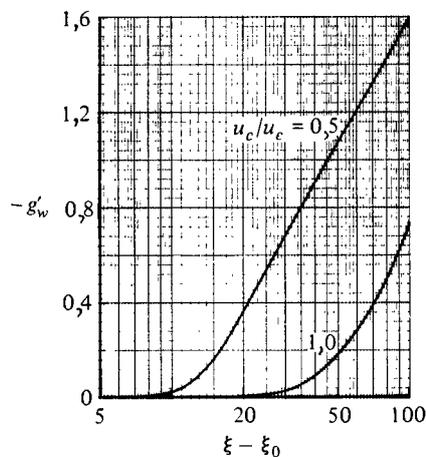


Рис. 6.31. Зависимости безразмерного параметра плотности теплового потока в стенку g'_w от $\xi - \xi_0$ на изотермической стенке при $\delta/y_c = 0,95$ и $Pr = 0,72$.

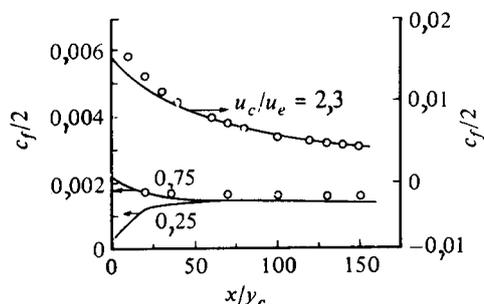


Рис. 6.32. Зависимости местного коэффициента поверхностного трения от x/y_c при трех значениях u_c/u_e .

прежде, связь между безразмерным градиентом температуры на стенке g'_w , плотностью теплового потока и числом Рейнольдса определяется соотношением (4.130).

Точность результатов численного расчета, представленных на рис. 6.30 и 6.31, определяется точностью модели турбулентности. Чтобы оценить степень соответствия расчетных результатов экспериментальным данным, было проведено сравнение экспериментальных данных Кэжера и Уайтло [36] с результатами расчета модифицированным методом Себиси — Смита (соотношения (6.133)—(6.135)). Расчетные зависимости, представленные на рис. 6.32 и 6.33, хорошо согласуются с экспериментальными данными работы [36] и с расчетными результатами работы [35], полученными при использовании понятия пути перемешивания. Можно ожидать, что модели турбулентности более высокого порядка типа предложенной Лондером, Рисом и Роди [37] приведут примерно к таким же результатам, хотя предположения, аналогичные использованным при построении рис. 6.27, будут заменены предположениями относительно особенностей уравнений, в которых неизвестными переменными будут напряжения Рейнольдса и скорость диссипации турбулентности.

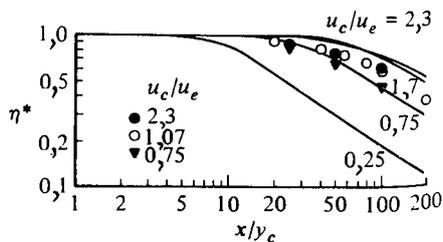


Рис. 6.33. Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными для турбулентного течения при различных значениях u_c/u_e .

Задачи

- 6.1. Вывести «закон стенки» для температуры (соотношения (6.12)) методом исключения из матрицы. Начать с вывода приведенной ниже матрицы, элементы которой представляют собой показатели степени при основных единицах измерения (которыми являются масса M , длина L , время T и температура θ) в размерностях параметров, указанных в левом столбце:

$$\begin{array}{c}
 T_w - T \\
 y \\
 \tau_w \\
 \dot{q}_w \\
 \rho \\
 \mu \\
 k \\
 c_p
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 M \quad L \quad T \quad \theta \\
 \left| \begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & -1 & -2 & 0 \\
 1 & 0 & -3 & 0 \\
 1 & -3 & 0 & 0 \\
 1 & -1 & -1 & 0 \\
 1 & 1 & -3 & -1 \\
 0 & 2 & -2 & -1
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

- 6.2. Применяя метод исключения из матрицы, показать, что закон стенки для скорости при обтекании шероховатой поверхности имеет вид

$$u^+ = \phi(y^+, k^+).$$

- 6.3. Показать, что на основании уравнения неразрывности величина $\overline{u'v'}$ должна изменяться в вязком подслое по закону y^3 , в то время как из формулы Ван Дрифта для длины пути перемешивания (6.17) следует $\overline{u'v'} \sim y^4$ при малых значениях y .
- 6.4. Показать, что параметр «кинетического нагрева» $\rho u_\tau^3 / q_w$ равен

$$\frac{(\gamma - 1)(u_\tau / a_w)^2}{\dot{q}_w / (\rho c_p u_\tau T_w)},$$

где $a_w = \sqrt{\gamma R T}$.

- 6.5. Применяя соотношение (6.13) для внутренней части слоя, показать, что логарифмический закон для непроницаемой стенки (6.11) можно обобщить на случай течения с равномерной скоростью вдува v_w и представить его в виде

$$\frac{2}{v_w} \left[(u_\tau^2 + uv_w)^{1/2} - u_\tau \right] = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yu_\tau}{v} + c, \tag{P6.1}$$

где c — безразмерный параметр, зависящий от v_w / u_τ .

- 6.6. Показать, что при $\bar{v}_w \rightarrow 0$ соотношение (P6.1) сводится к соотношению (6.11).
- 6.7. Если выражение для профиля скорости во всем пограничном слое (6.39) вычислить при $y = \delta$, то можно связать параметр профиля Π с местным коэффициентом поверхностного трения $c_f = 2\tau_w / \rho u_e^2$ и толщиной пограничного слоя δ соотношением

$$\frac{\sqrt{2}}{c_f} \equiv \frac{u_e}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\delta u_\tau}{v} + c + \frac{2\Pi}{\kappa}. \tag{P6.2}$$

Показать, что Π можно связать также с толщиной вытеснения δ^* и толщиной потери импульса θ соотношениями

$$\kappa \frac{\delta^* u_e}{\delta u_\tau} = 1 + \Pi \quad (\text{Р6.3})$$

$$\kappa^2 \frac{(\delta^* - \theta) u_e^2}{\delta u_\tau^2} = 2 + 2 \left[1 + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\pi) \right] \Pi + \frac{3}{2} \Pi^2, \quad (\text{Р6.4})$$

Кроме того, показать, что справедливо равенство

$$\frac{H}{H-1} \frac{u_\tau}{\kappa u_e} \equiv \frac{1}{\kappa G} = F(\Pi), \quad (\text{Р6.5})$$

где $\text{Si}(\pi) = \int_0^\pi [\sin u/u] du = 1,8519$, а G — формпараметр Клаузера:

$$G = \int_0^\infty \left(\frac{u - u_e}{u_\tau} \right)^2 d\left(\frac{y}{\Delta}\right),$$

$$\Delta = - \int_0^\infty \left(\frac{u - u_e}{u_\tau} \right) dy.$$

- 6.8. Применяя соотношения (Р6.2) и (Р6.3), найти коэффициент поверхностного трения в пограничном слое на плоской пластине при $R_{\delta^*} = u_e \delta^*/\nu = 2 \times 10^4$, а затем с помощью соотношения (Р6.5) вычислить $R_\theta = u_e \theta/\nu$. Принять $c = 5,0$ и $\kappa = 0,41$.
- 6.9. Воздух, имеющий температуру 298 К и давление 0,1 МПа, обтекает со скоростью 30 м/с плоскую пластину длиной 5 м. Величина $R_{x_{tr}}$ предполагается равной 3×10^6 .
- Найти эффективное начало x_0 турбулентного пограничного слоя.
Указание. Чтобы оценить x_0 , следует пренебречь областью перехода, предположить, что в точке перехода толщина потери импульса непрерывна и заменить x в формуле (6.59) на $x_{tr} - x$.
 - Применяя число Рейнольдса, рассчитанное по расстоянию от эффективного начала пограничного слоя, вычислить местный и средний коэффициенты поверхностного трения при $x = 5$ м.
 - В сечении $x = 4$ м рассчитать расстояния от стенки, соответствующие значениям y^+ , равным 5, 50, 100, 500 и 1000.
- 6.10. а. Если в условиях задачи 6.9 температура поверхности пластины поддерживается равной 348 К, рассчитать отводимый тепловой поток на единицу ширины пластины. Теплофизические свойства определять при средней температуре слоя T_f .
- Какая ошибка возникает в том случае, если предположить, что пограничный слой турбулентный, начиная с передней кромки?
 - Решить задачи (а) и (б) для условий, когда скорость течения равна 15 м/с при неизменных остальных параметрах. Обсудить полученные результаты.

- 6.11. Жидкий аммиак, имеющий температуру 248 К, обтекает со скоростью 2 м/с плоскую пластину длиной 2 м, поверхность которой поддерживается при температуре 263 К. Предполагая, что переход происходит при $R_x = 4 \times 10^5$, рассчитать местный и средний \bar{h} коэффициенты теплоотдачи на конце пластины. Теплофизические свойства определять при средней температуре слоя T_f .
- 6.12. Применяя интегральное уравнение количества движения (3.68) и степенной профиль (6.54), вывести соотношения (6.58), (6.59), (6.56) и (6.57). Выразить местный коэффициент поверхностного трения, входящий в выражение (3.68), формулой

$$c_f = \frac{0,0456}{(u_e \delta / \nu)^{1/4}},$$

которая является модифицированным вариантом формулы Блазиуса (7.17) для расчета коэффициента трения в круглой трубе.

- 6.13. Воздух при $u_e/\nu = 10^7 \text{ м}^{-1}$ обтекает пластину длиной 3 м, покрытую элементами шероховатости (поперечными планками квадратного сечения). Найти местный коэффициент поверхностного трения при $x = 1$ и средний коэффициент поверхностного трения для всей пластины. Для простоты предположить, что шероховатость вызывает переход пограничного слоя на передней кромке пластины, так что вкладом ламинарного пограничного слоя можно пренебречь и принять $k = 0,0005 \text{ м}$.
Указание. Вначале определить высоту эквивалентной песочной шероховатости для шероховатости типа планок квадратного сечения, исследованной Муром (рис. 6.7).

- 6.14. При условиях задачи 6.13 пластина а) покрыта краской, имеющей высоту эквивалентной песочной шероховатости $k_s = 0,01 \text{ мм}$ и б) изготовлена из чугуна с $k_s = 0,25 \text{ мм}$.

Рассчитать толщину потери импульса, толщину пограничного слоя, местный коэффициент поверхностного трения и средний коэффициент поверхностного трения при $x = 3 \text{ м}$.

Указание. При расчете θ и δ для пограничного слоя на шероховатой пластине учесть, что $c_f/2 = \theta/x$, а использование степенного профиля скорости позволяет довольно точно определить δ^* , δ и θ .

- 6.15. Используя степенной профиль скорости, вывести формулу (6.71b).
Указание. Сначала показать, что интегральное уравнение количества движения для плоской пластины можно записать в виде

$$-\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u(u_e - u) dy + (u_e - u) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u dy = \frac{\tau - \tau_w}{\rho}.$$

- 6.16. Применяя соотношение (6.71) и определения коэффициентов турбулентной вязкости и турбулентной теплопроводности, вывести формулу (6.72) при $\text{Pr}_t = 1$.

- 6.17. Воздух при $u_e/\nu = 3 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$ обтекает плоскую пластину длиной 3 м. Рассмотреть следующие случаи:

- а) пластина имеет постоянную температуру поверхности T_w ;
 б) нагреваемому участку предшествует ненагреваемый участок длиной 1 м. Рассчитать распределения числа Стантона в обоих случаях. Какое влияние на результаты расчета оказывает член $(T_w/T_e)^{0,4}$, входящий в соотношение (6.79)? Предположить, что пограничный слой является турбулентным, начиная с передней кромки, $T_w/T_e = 1,1$, а $\text{Pr} = 0,7$.

- 6.18. С помощью соотношения (6.82) получить выражение для плотности теплового потока на плоской пластине в случае, когда разность температур стенки и внешнего потока изменяется линейно по x , т. е.

$$T_w - T_e = A + Bx.$$

Указание. Учесть, что существует скачок температуры на передней кромке пластины, где $T_w - T_e = A$.

- 6.19. Используя соотношение (6.82), получить выражение для плотности теплового потока на плоской пластине при $x > x_2$, если $T_w = T_{w1}$ на участке $0 < x < x_1$, $T_w = T_{w2}$ на участке $x_1 < x < x_2$ и $T_w = T_{w3}$ на участке $x > x_2$.
- 6.20. Воздух, имеющий температуру 293 К и $u_e/\nu = 5 \times 10^5 \text{ м}^{-1}$, обтекает плоскую пластину длиной 4 м. Предположить, что пограничный слой является турбулентным, начиная с передней кромки, а температура стенки изменяется следующим образом: 323 К на участке 0—1 м, 333 К на участке 1—1,5 м, 353 К на участке 1,5—4 м. Найти местную плотность теплового потока при $x = 4$ м, полагая $\text{Pr} = 1$.
- 6.21. Воздух, имеющий температуру 293 К и $u_e/\nu = 5 \times 10^5 \text{ м}^{-1}$, обтекает плоскую пластину длиной 5 м. Предполагая, что нагрев начинается в сечении $x_0 = 2$ м и осуществляется равномерно на участке $x_0 < x \leq 5$ м, найти продольное распределение температуры стенки пластины. Предположить дополнительно, что пограничный слой является турбулентным, начиная с передней кромки.
- 6.22. Показать, что интеграл, входящий в соотношение (6.86), можно вычислить по формуле (6.87).
Указание. Умножив и разделив сначала интеграл на x (величина x считается параметром) и приняв $z = 1 - (\xi/x)^{9/10}$, привести интеграл к форме бета-функции

$$B_r(m, n) = \int_0^1 z^{m-1} (1-z)^{n-1} dz \quad (m, n > 0).$$

- 6.23. Используя закон стенки (6.4) и уравнение неразрывности (3.5), вывести соотношение (6.97).
- 6.24. Показать, что скорость подмешивания v_E , представляющую собой скорость изменения по x объемного расхода на единицу ширины, а именно

$$v_E = \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy,$$

можно выразить в форме соотношения (6.115).

Указание. Сначала, применяя уравнение неразрывности и правило дифференцирования Лейбница, показать, что составляющую скорости v на границе пограничного слоя ($y = \delta$) можно записать в виде

$$v_e = - \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy + u_e \frac{d\delta}{dx}.$$

Затем, используя определение толщины вытеснения δ^* , показать, что

$$v_e = \frac{d}{dx} (u_e \delta^*) - \delta \frac{du_e}{dx}$$

и

$$\int_0^\delta u dy = u_e (\delta - \delta^*).$$

- 6.25. Показать, что скорость подмешивания v_E для осесимметричного течения определяется соотношением

$$v_E = \frac{1}{r_\delta} \frac{d}{dx} \int_0^\delta r u dy = \frac{1}{r_\delta} \frac{d}{dx} \left[u_e \left(\delta \frac{r_0 + r_\delta}{2} - \delta^* \right) \right]$$

где

$$r_\delta = r_0 + \delta \cos \phi,$$

$$\delta^* = \int_0^\delta r \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy, \quad \theta = \int_0^\delta r \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy.$$

- 6.26. Для предотвращения обледенения ветрового стекла осуществляется тангенциальный обдув его поверхности воздухом, имеющим температуру 325 К, со скоростью 25 м/с. Самолет летит со скоростью 50 м/с, а температура окружающего воздуха равна 275 К.
- Рассчитать требуемую ширину щели, если на длине стекла 1 м необходимо поддерживать температуру выше 300 К.
 - Определить, можно ли пользоваться результатами, представленными на рис. 6.28, которые были получены при несколько ином значении δ/y_c , и установить возможное влияние отличия в значениях δ/y_c . Предположить, что внешний поток направлен тангенциально к поверхности ветрового стекла и что соответствующий пограничный слой начинается на расстоянии 2 м от выходного сечения щели.
- 6.27. Предположение о том, что стенку можно считать теплоизолированной, вполне оправдано для ветрового стекла, но в меньшей степени для несущих поверхностей самолета. Предположим, что требуется поддерживать постоянную температуру (300 К) поверхности за щелью вдува, регулируя теплообмен воздуха с поверхностью при помощи электрических нагревателей. Для условий задачи (6.26) построить в безразмерной форме распределение плотности теплового потока на участке длиной 1 м. Учесть, что g'_w определяется соотношением (4.130).
- 6.28. Воздух при атмосферном давлении и температуре 288 К нагревается, обтекая двумерную гладкую поверхность, имеющую в сечении форму эллипса с относительным удлинением 1:4. Рассчитать распределения параметра поверхностного трения $(c_f/2)\sqrt{R_x}$ и параметра теплового потока $Nu_x/\sqrt{R_x}$ по безразмерной осевой координате $x/2a$ при ламинарном и турбулентном режимах течения в пограничном слое, определяя положение перехода по формуле (6.111), если $R_{2a} = 10^7$, температура стенки постоянна и составляет 298 К, а число Прандтля равно 0,72. Расчет характеристик ламинарного пограничного слоя провести методом Твейтса и методом Сполдинга — Смита, характеристик турбулентного пограничного слоя — с помощью соотношений (6.128) — (6.130). Сравнить полученные результаты с данными, представленными на рис. 6.15 и 6.16.
- 6.29. Лопатка газовой турбины имеет форму профиля NASA 2412; ее координаты и соответствующее распределение скорости внешнего потока представлены в таблице. Она работает в следующих условиях: температура торможения $T_0 = 1123$ К, скорость набегающего потока $u_\infty = 200$ м/с, коэффициент кинематической вязкости $\nu = 6 \times 10^{-5}$ м²/с. Требуется найти теплосъем (кВт/м), необходимый для поддержания температуры стенки на участке от передней кромки до точки перехода на уровне 823 К и последующего линейного ее снижения до 723 К на задней кромке. Кроме того, необходимо найти распределе-

ния местного коэффициента поверхностного трения и толщины вытеснения на верхней и нижней поверхностях лопатки. Применить следующую методику расчета:

- 1) найти характеристики переноса количества движения и тепла для ламинарного пограничного слоя;
- 2) определить положение перехода;
- 3) найти характеристики переноса количества движения и тепла для турбулентного пограничного слоя.

Принять длину хорды равной 0,1 м. Характеристики теплообмена рассчитать по формуле (6.130).

Координаты профиля NACA 2412 и распределение скорости внешнего потока при нулевом угле атаки

x/c	y/c	u_e/u_∞
0,975017	-0,002574	-0,923056
0,925000	-0,006500	-0,951147
0,850000	-0,011600	-0,967792
0,750002	-0,018235	-0,989543
0,650002	-0,024535	-1,006718
0,550005	-0,030586	-1,026400
0,450007	-0,035862	-1,046163
0,350006	-0,039787	-1,064401
0,275001	-0,041775	-1,084731
0,225000	-0,042390	-1,103499
0,174994	-0,041869	-1,122426
0,124977	-0,039573	-1,138186
0,087484	-0,036186	-1,154834
0,062454	-0,032608	-1,166511
0,037354	-0,026895	-1,159470
0,018586	-0,019930	-1,124105
0,004651	-0,009461	-0,729720
0,003899	0,012117	0,603138
0,018541	0,026010	1,075167
0,037283	0,036076	1,156801
0,062418	0,045696	1,198170
0,087457	0,053112	1,219485
0,124906	0,061678	1,241882
0,174955	0,069695	1,249947
0,224978	0,074922	1,249534
0,274990	0,077978	1,244678
0,350006	0,079106	1,227716
0,450027	0,075688	1,194753
0,550034	0,068384	1,162275
0,650039	0,058038	1,129654
0,750043	0,044950	1,091903
0,850053	0,029465	1,046916
0,925026	0,016242	1,000793
0,975055	0,005940	0,923055

- 6.30. В приложении D представлена программа численного расчета характеристик турбулентного пограничного слоя в плоском течении. Она основана на использовании метода Хеда и результатов решения двух обыкновенных дифференциальных уравнений (3.68) и (6.117) методом Рунге — Кутты четвертого порядка. Показать, что с минимальными модификациями уравнений (3.68) и (6.117) эта программа применима для расчета характеристик осесимметричного турбулентного пограничного слоя.

Указание. Учесть, что

$$B(2) = u_e r_0 \theta H_1,$$

$$C(1) = \frac{c_f}{2} - (H+2) \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} - \frac{\theta}{r_0} \frac{dr_0}{dx},$$

$$C(2) = r_0 u_e F.$$

Кроме того, необходимо ввести $r_0(x)/L$ и вычислить dr_0/dx или $d(r_0/L)/d(x/L)$. Последнее можно сделать с помощью трехточечной интерполяционной формулы Лагранжа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rodi W., Turbulence Models and Their Application in Hydraulics, International Association for Hydraulics Research, Delft, Netherlands, 1980.
2. Bradshaw P., Cebeci T., Whitelaw J. H., Engineering Calculation Methods for Turbulent Flows, Academic, London, 1981.
3. Klebanoff P. S., Diehl Z. W., Some features of artificially thickened fully developed turbulent boundary layers with zero pressure gradient, NASA Rept 1110, 1952.
4. Jacobs W., Umformung eines turbulenten Geschwindigkeitsprofils, *Z. Angew. Math. Mech.*, **19**, 87 (1939).
5. Taylor E. S., Dimensional Analysis for Engineers, Clarendon, Oxford, 1973.
6. Van Driest E. R., On turbulent flow near a wall, *J. Aero. Sci.*, **23**, 1007 (1956).
7. Cebeci T., A model for eddy conductivity and turbulent Prandtl number, *J. Heat Transfer*, **95**, 227 (1973). [Имеется перевод: Себеси. Метод расчета коэффициента турбулентной теплопроводности и турбулентного числа Прандтля. — Труды амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1973, № 2, с. 86.]
8. Na T. Y., Habib J. S., Heat transfer in turbulent pipe flow based on a new mixing-length model, *Appl. Sci. Res.*, **28** (1973).
9. Clauser F. H., The turbulent boundary layer, *Advan. Appl. Mech.*, **4**, 1 (1956).
10. Owen P. R., Thomson W. R., Heat transfer across rough surfaces, *J. Fluid Mech.*, **15**, 321—334 (1963).
11. Hoffmann P. H., Perry A. E., The development of turbulent thermal layers on flat plates, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **22**, 39 (1979).
12. Cebeci T., Smith A. M. O., Analysis of Turbulent Boundary Layers, Academic, N. Y., 1974.
13. Schlichting H., Boundary-Layer Theory, McGraw, N. Y., 1981. [Имеется перевод с пятого немецкого издания, исправленного по шестому (американскому) изданию: Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974.]
14. Simonich J. C., Bradshaw P., Effect of freestream turbulence on heat transfer through a turbulent boundary layer, *J. Heat Transfer*, **100**, 671 (1978). [Имеется перевод: Симонич, Брэдшоу. Влияние турбулентности внешнего потока на теплообмен в турбулентном пограничном слое. — Труды амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1978, № 4, с. 122.]

15. Kader B.A., Yaglom A.M., Heat and mass transfer laws for fully turbulent wall flows, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **15**, 2329 (1972). См. также Кадер Б.А., Яглом А.М. Законы подобия для пристенных турбулентных течений. — В сб.: *Механика жидкости и газа*. — М.: ВИНТИ, 1980, т. 15, с. 81—155.
16. Reynolds W.C., Kays W.M., Kline S.J., Heat transfer in the turbulent incompressible boundary layer. I. Constant wall temperature, NASA MEMO 12-1-58W, 1958.
17. Reynolds W.C., Kays W.M., Kline S.J., Heat transfer in the turbulent incompressible boundary layer. II. Step wall-temperature distribution, NASA MEMO 12-2-58W, 1958.
18. Reynolds W.C., Kays W.M., Kline S.J., Heat transfer in the turbulent incompressible boundary layer, III. Arbitrary wall temperature and heat flux, NASA MEMO 12-3-58W, 1958.
19. Hildebrand F.B., *Advanced Calculus for Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
20. Kays W.M., Crawford M.E., *Convective Heat and Mass Transfer*, McGraw, N.Y., 1980.
21. Chen K.K., Thyson N.A., Extension of Emmons' spot theory to flows on blunt bodies, *AIAA J.*, **5**, 821 (1971). [Имеется перевод: Чен, Тайсон. Применение теории турбулентных пятен Эммонса к обтеканию затупленных тел. — *Ракетная техника и космонавтика*, 1971, № 5, с. 63.]
22. Michel R., Etude de la transition sur les profils d'aile; établissement d'un critère de détermination de point de transition et calcul de la traînée de profile incompressible, ONERA, Rept 1/157A, 1951.
23. Seban R.A., Doughty D.L., Heat transfer to turbulent boundary layers with variable freestream velocity, *J. Heat Transfer*, **78**, 217 (1956).
24. Moretti P.M., Kays W.M., Heat transfer to a turbulent boundary layer with varying freestream velocity and varying surface temperature, an experimental study, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **8**, 1187 (1965).
25. Rotta J.C., Turbulent boundary layers in incompressible flows, *Prog. Aero. Sci.*, **2**, 1 (1962).
26. Pimenta M.M., Moffat R.J., Kays W.M., The turbulent boundary layer: An experimental study of the transport of momentum and heat with the effect of roughness. Rept No. HMT-21, Stanford University, Dept. of Mech. Eng., CA, 1975.
27. Sebeci T., Chang K.C., Calculation of incompressible rough-wall boundary layer flows, *AIAA J.*, **16**, 730 (1978). [Имеется перевод: Себечи Т., Чэнг К.К. Расчет характеристик пограничного слоя на шероховатых поверхностях. — *Ракетная техника и космонавтика*, 1978, № 7, с. 115.]
28. Reynolds W.C., *Computation of turbulent flows—state of the art*, 1970. Rept MD-27, Stanford University, Stanford, CA, 1970.
29. Head M.R., Entrainment in the turbulent boundary layers, ARS R&M 3152, 1958.
30. Ludwig H., Tillmann W., Untersuchungen über die Wandschubspannung in turbulenten reibungsschichten, *Ing. Arch.*, **17**, 288 (1949). Перевод на англ. язык NACA TM 1285, 1950.
31. Green J.E., Weeks D.J., Brooman J.W.F., Prediction of turbulent boundary layers and wakes in incompressible flow by a lag-entrainment method, ARC R&M 3791, 1973.
32. Bradshaw P., Ferriss D.H., Atwell N.P., Calculation of boundary-layer development using the turbulent energy equation, *J. Fluid Mech.*, **28**, 593 (1967).
33. Thwaites B. (ed.), *Incompressible Aerodynamics*, Clarendon, Oxford, 1960.
34. Ko S.-Y., Liu D.-Y., Experimental investigation of effectiveness, heat transfer coefficient and turbulence of film cooling, *AIAA J.*, **18**, 907—913 (1980). [Имеется перевод: Ко Шаоен, Лью Д. Экспериментальное исследование эффективности завесы,

- коэффициентов теплоотдачи и турбулентности течения при завесном охлаждении. — Ракетная техника и космонавтика, 1980, № 8, с. 57.]
35. Pai V. R., Whitelaw J. H., The prediction of wall temperature in the presence of film cooling, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **14**, 409 (1971).
 36. Kacker S. C., Whitelaw J. H., The effect of slot height and of slot turbulence intensity on the effectiveness of the uniform density, two-dimensional wall jet, *J. Heat Transfer*, **90**, 469 (1968). [Имеется перевод: Кэкер, Уайтло. Влияние высоты щели и интенсивности турбулентности потока в щели на эффективность пленочного охлаждения двумерной пристеночной струей с плотностью, равной плотности набегающего потока. — Труды амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1968, № 4, с. 110.]
 37. Launder B. E., Reece G. J., Rodi W., Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure, *J. Fluid Mech.*, **68**, 537 (1975).

Несопряженные турбулентные течения в каналах

7

Методика расчета характеристик переноса количества движения и тепла в турбулентных внутренних течениях аналогична соответствующей методике для ламинарных течений, описанной в гл. 5, с тем лишь отличием, что добавляются турбулентные напряжения. Вновь будут рассмотрены три различных случая, соответствующие различным условиям протекания процессов переноса количества движения и тепла при течении в канале. В разд. 7.1 рассматриваются течения с полностью развитыми полями скоростей и температур в каналах с гладкими и шероховатыми поверхностями. Разд. 7.2 посвящен анализу теплообмена на большом расстоянии от входного сечения канала, когда поле скоростей полностью развито ($\partial u/\partial x = 0$, $v = 0$), а поле температур еще развивается. В этом случае уравнение энергии можно записать в виде (5.3), используя понятия турбулентной вязкости и турбулентного числа Прандтля, а именно:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{1}{r^\kappa} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^\kappa \left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \varepsilon_m^+ \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right], \quad (7.1)$$

где y измеряется, как обычно, от стенки канала. Будут рассмотрены решения этого уравнения для течений в каналах с гладкими и шероховатыми стенками при использовании соответствующих формул для ε_m^+ и Pr_t .

В разд. 7.3 описано решение третьей задачи, когда и поле скоростей, и поле температур развиваются на начальном участке нагреваемого канала.

7.1. Полностью развитое течение в канале

Чтобы решить уравнение (7.1) в случае полностью развитого профиля температуры, применим, как и в разд. 5.1 для ламинарного режима течения, соотношение (5.14) и запишем уравнение (7.1) в виде

$$u \left[(1-G) \frac{dT_w}{dx} + G \frac{dT_m}{dx} \right] = \frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{1}{r^\kappa} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^\kappa \left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \varepsilon_m^+ \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right]. \quad (7.2)$$

Профиль скорости и коэффициент трения

Чтобы найти профиль скорости u для полностью развитого течения, рассмотрим уравнение движения в направлении x . Применяя определение коэффициента турбулентной вязкости и учитывая, что инерционные члены в левой части уравнения равны нулю, запишем это уравнение в виде

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\nu}{r^K} \frac{d}{dy} \left[r^K (1 + \epsilon_m^+) \frac{du}{dy} \right] = 0. \quad (7.3)$$

Если принять

$$b = r^K (1 + \epsilon_m^+), \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho} \quad (7.4)$$

и использовать определение $r (\equiv r_0 - y)$, то можно переписать уравнение (7.3) следующим образом:

$$\frac{d}{dr} \left(b \frac{du}{dr} \right) = \frac{r^K}{\nu} \frac{d\bar{p}}{dx}. \quad (7.5)$$

Интегрируя уравнение (7.5) и замечая, что $du/dr = 0$ при $r = 0$, получаем

$$b \frac{du}{dr} = \frac{r^{K+1}}{K+1} \frac{1}{\nu} \frac{d\bar{p}}{dx}. \quad (7.6)$$

Вычисляя соотношение (7.6) на стенке, чтобы связать dp/dx с $(du/dr)_{r=r_0} = -\tau_w/\mu \equiv -u_\tau^2/\nu$, можно после некоторых алгебраических преобразований записать соотношение (7.6) в виде

$$\left(\frac{r}{r_0} \right) \frac{u_\tau^2}{\nu} = (1 + \epsilon_m^+) \frac{du}{dy}. \quad (7.7)$$

Применяя безразмерные переменные $u^+ = u/u_\tau$, $y^+ = yu_\tau/\nu$ и $r_0^+ = r_0 u_\tau/\nu$, запишем равенство (7.7) в виде

$$\left(1 - \frac{y^+}{r_0^+} \right) = (1 + \epsilon_m^+) \frac{du^+}{dy^+}. \quad (7.8)$$

Предложено несколько соотношений для расчета ϵ_m^+ в условиях полностью развитого течения. Применяя широко известную формулу, основанную на соотношении Никурадзе для расчета длины пути перемешивания

$$l = r_0 \left[0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{r_0} \right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{r_0} \right)^4 \right], \quad (7.9)$$

которое при малых значениях y сводится к соотношению $l = 0,4y$, и коэффициент демпфирования Ван Дриста $1 - e^{-y/A}$, рассмотренный в разд. 6.2, получаем

$$\varepsilon_m = l^2 (1 - e^{-y/A})^2 \frac{du}{dy}, \quad (7.10)$$

или в безразмерных переменных

$$\varepsilon_m^+ = \{l^+ [1 - \exp(-y^+/A^+)]\}^2 \frac{du^+}{dy^+}, \quad (7.11)$$

где $l^+ = lu_r/\nu$ и $A^+ = 26$.

Другим полезным соотношением является формула для двухслойной модели, аналогичная использованной Себиси и Смитом для течения в пограничном слое (разд. 6.6). В этом случае коэффициент турбулентной вязкости во внутренней части слоя выражается соотношением (7.10), а входящая в него величина l вычисляется по формуле (6.103)

$$l = \kappa y \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{A}\right) \right]. \quad (6.103)$$

Во внешней части слоя $(\varepsilon_m)_0$ определяется выражением

$$(\varepsilon_m)_0 = \alpha \int_0^L (u_c - u) dy, \quad (7.12)$$

где L — радиус трубы или полуширина плоского канала, в зависимости от рассматриваемой задачи, u_c — скорость на оси, α — эмпирическая постоянная, зависящая от числа Рейнольдса, как будет показано ниже.

Для наглядности применим соотношения (7.9) и (7.11), а не двухслойную модель. Подставляя соотношение (7.11) в уравнение (7.8) и повторяя рассуждения, аналогичные использованным при выводе уравнения (6.19), можно найти «турбулентный» профиль скорости в целом, интегрируя следующее соотношение, которое является «осесимметричным» вариантом выражения (6.20):

$$u^+ = \int_0^{y^+} \frac{2(1 - y^+/r_0^+)^K}{1 + \sqrt{1 + 4(1 - y^+/r_0^+)^K (L^+)^2}} dy^+, \quad (7.13)$$

где

$$L^+ = l^+ \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right]. \quad (7.14)$$

Как только величина u^+ найдена, сразу определяется зависимость u от y при условии, что известно значение u_τ . Следовательно, чтобы начать расчет, необходимо знать коэффициент трения.

Чтобы найти соотношение между коэффициентом трения и числом Рейнольдса R_d , нужно выразить профиль скорости формулой, аналогичной соотношению (6.39) для пограничного слоя, с заменой r_0 на δ , а именно

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yu_\tau}{\nu} + c + \frac{\Pi}{\kappa} w\left(\frac{y}{r_0}\right). \quad (7.15)$$

Величина Π для течения в трубе пренебрежимо мала, но это просто случайное совпадение, а не следствие того, что приближения, справедливые для внутренней части пограничного слоя, применимы по всему сечению трубы. Затем, вычисляя (7.15) на оси, получаем выражение для u_{\max}/u_τ . После преобразований, связанных с заменой u_{\max} среднemasсовой скоростью u_m (задача 7.2), получаем

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,87 \ln R_d \sqrt{f} - 0,8, \quad (7.16)$$

где $f = \tau_w/(\rho u_m^2/8)$ — коэффициент трения для трубы. Это соотношение известно под названием закона сопротивления Прандтля для гладких труб. Соответствующий закон для плоских каналов, в которых $u_m = u_{\max} - 2,64u_\tau$, а Π является небольшой положительной величиной, имеет постоянную $-0,41$ вместо $-0,8$.

Блазиус предложил эмпирическую формулу для расчета коэффициента трения в гладких трубах [1]:

$$f = \frac{0,3164}{R_d^{0,25}}, \quad R_d \leq 10^5. \quad (7.17)$$

Нижний предел R_d , равный примерно 2×10^3 , определяется требованием, чтобы режим течения был турбулентным. При $R_d = 10^5$ формула (7.17) дает величину $f = 0,0178$, а более точные соотношения — величину $f = 0,0179$; при $R_d = 2 \times 10^3$ эти коэффициенты равны соответственно 0,0473 и 0,0497.

Чтобы найти поле скоростей (а это позволит определить коэффициент турбулентной температуропроводности ϵ_m/Pr_t) и применить его при решении уравнения (7.2), сначала рассчитывается коэффициент f по формуле (7.16) или (7.17) и вычисляется y_{\max}^+ ($\equiv r_0 u_\tau/\nu$), а затем определяется u^+ по соотношению (7.13) и находится зависимость ϵ_m^+ от u^+ с помощью выражения (7.11), причем u^+ заменяется на y с использованием формулы $u_\tau = u_m \sqrt{f}/8$.

При расчете профиля скорости u^+ и f необходимо обеспечить выполнение принципа сохранения массового расхода в канале. Чтобы пояснить этот вопрос, рассмотрим соотношение (5.2). Для круглой трубы это соотношение можно записать в наших обозначениях следующим образом:

$$1 = 2 \int_0^1 \bar{r} \bar{u} d\bar{r}. \quad (7.18)$$

Если профиль скорости рассчитывается с помощью выражений (7.13) и (7.14), вполне возможно, что соотношение (7.18) не будет точно выполняться, поскольку профиль скорости и коэффициент трения рассчитываются по эмпирическим формулам, которые могут не вполне соответствовать друг другу. Возможным способом, позволяющим избежать отклонений в величине массового расхода, даже если они малы, является использование двухслойной модели турбулентной вязкости, определенной соотношениями (7.10), (6.103) и (7.12).

Чтобы применить двухслойную модель турбулентной вязкости, рассчитаем сначала исходный профиль безразмерной скорости с помощью соотношения (7.13), а затем используем найденный профиль при расчете коэффициента турбулентной вязкости по формулам для внутренней и внешней частей слоя. Поскольку величина α , входящая в формулу (7.12), заранее неизвестна, полагаем ее равной, скажем, 0,0168. Рассчитав таким образом ε_m^+ , интегрируем уравнение (7.8), чтобы получить новый профиль скорости u^+ , и находим α с помощью соотношения (7.17). Если это значение безразмерной скорости не удовлетворяет условию (7.18), задается новая величина параметра турбулентной вязкости во внешней части слоя α . Весь процесс повторяется до тех пор, пока не будет удовлетворяться условие (7.18).

На рис. 7.1 приведена зависимость α от R_d , полученная таким способом. Отметим, что вначале величина α возрастает с увеличением числа Рейнольдса, от 0,0114 при $R_d = 10^4$ до 0,0270 при $R_d = 10^6$. Однако затем она стремится к постоянному значению, составляющему около 0,0333 при $R_d = 10^8$.

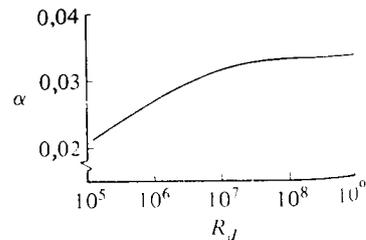


Рис. 7.1. Зависимость α от R_d .

Расчет теплообмена в гладких трубах

Чтобы продемонстрировать методику расчета теплообмена в условиях полностью развитого турбулентного течения, проведем расчет теплообмена в круглой трубе. Прежде всего запишем уравнение (7.2) в безразмерных переменных

$$\bar{u} \left[(1-G) \frac{dT_w}{d\bar{x}} + G \frac{dT_m}{d\bar{x}} \right] = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[\bar{r} \left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \varepsilon_m^+ \right) \frac{\partial T}{\partial \bar{r}} \right]. \quad (7.19)$$

Здесь

$$\bar{u} = \frac{u}{u_m}, \quad \bar{x} = \frac{2x/r_0}{R_d \text{Pr}}, \quad R_d = \frac{u_m d}{\nu}, \quad \bar{r} = \frac{r}{r_0}, \quad (7.20)$$

а граничные условия имеют вид

$$\bar{r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \bar{r}} = 0; \quad \bar{r} = 1, \quad T = T_w. \quad (7.21)$$

На рис. 7.2 представлены зависимости числа Нуссельта, определенного соотношением (5.23а),

$$\text{Nu} = \frac{\dot{q}_w}{T_w - T_m} \frac{d}{k} \quad (5.23a)$$

от числа Рейнольдса при трех значениях числа Прандтля: 0,02, 0,72 и 14,3. Расчеты проводились с использованием двухслойной модели турбулентной вязкости, описанной выше, при граничных условиях, соответствующих постоянной плотности теплового потока и постоянной температуре стенки. Величина Pr_t определяется соотношением (6.26). Кроме того, на рис. 7.2 приведены экспериментальные данные, полученные при этих значениях чисел Рейнольдса и Прандтля. Как нетрудно видеть, использованный метод позволяет вполне удовлетворительно рассчитать число Нуссельта для условий полностью развитого турбулентного течения в круглой трубе. Следует отметить, что, не считая небольших отклонений в массовом расходе, результаты расчета, полученные с помощью формулы (7.11) для коэффициента турбулентной вязкости [5], практически совпадают с расчетными данными, полученными при использовании двухслойной модели.

Если температура стенки постоянна, а молекулярное число Прандтля равно единице, аналогия Рейнольдса (при условии, что турбулентное число Прандтля также равно единице) требует, что-

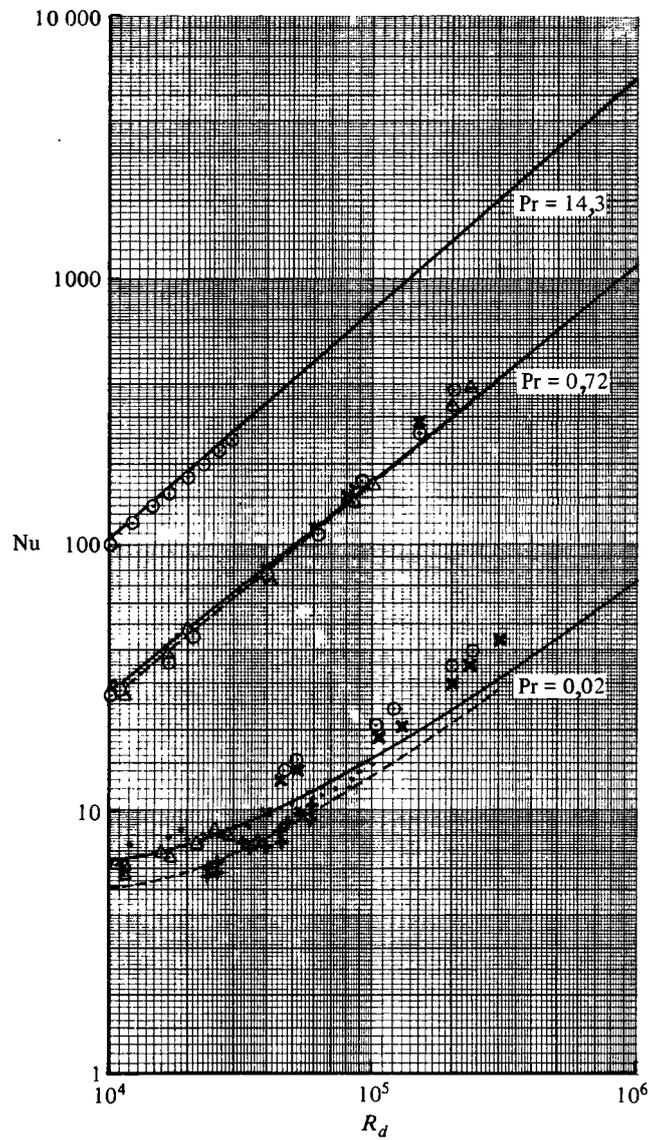


Рис. 7.2. Число Нуссельта в зависимости от числа Рейнольдса при трех значениях числа Прандтля для полностью развитого турбулентного течения в гладкой трубе. ---- постоянная температура стенки. - - - - постоянная плотность теплового потока. Экспериментальные данные: Мак-Адамса [2] при $Pr = 0,02$; Лоуна [3] при $Pr = 0,72$, Гоуэна и Смита [4] при $Pr = 14,3$.

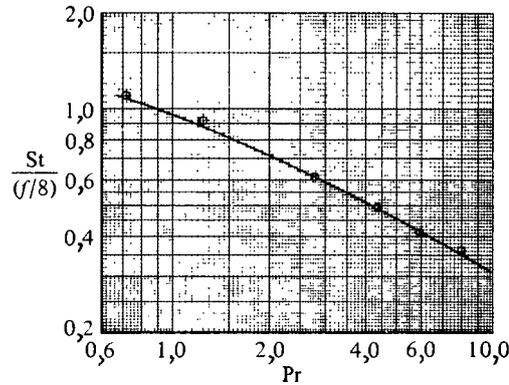


Рис. 7.3. Влияние числа Прандтля на коэффициент аналогии Рейнольдса для течения в круглой трубе с постоянной температурой стенки при $R_d = 1,5 \times 10^5$.
 ○ экспериментальные данные работы [6]; · результаты расчета.

бы выполнялось равенство

$$\frac{St}{f/8} = 1. \tag{7.22}$$

На рис. 7.3 представлены значения отношения $St/(f/8)$ для полностью развитого турбулентного течения в круглой трубе с постоянной температурой стенки при числе Рейнольдса $R_d = 1,5 \times 10^5$. При числах Прандтля около единицы это отношение, представляющее собой одну из форм коэффициента аналогии Рейнольдса, введенного в гл. 6, примерно равно 1, но при больших или меньших числах Прандтля коэффициент аналогии Рейнольдса существенно отличается от единицы.

На рис. 7.4 расчетные результаты, полученные с использованием двухслойной модели, сравниваются с результатами расчета по соотношению, вытекающему из аналогии Кармана — Боултера — Мартинелли [1],

$$Nu = \frac{R_d Pr \sqrt{f/8}}{0,833 [5 Pr + 5 \ln(5 Pr + 1) + 2,5 \ln(R_d \sqrt{f/8} / 60)]} \tag{7.23}$$

для круглой трубы с постоянной плотностью теплового потока; это соотношение аналогично по форме выражению (6.69) для числа Стантона в турбулентном пограничном слое. Можно видеть, что результаты расчета по соотношению (7.23) удовлетворительно согласуются с данными, полученными для двухслойной модели тур-

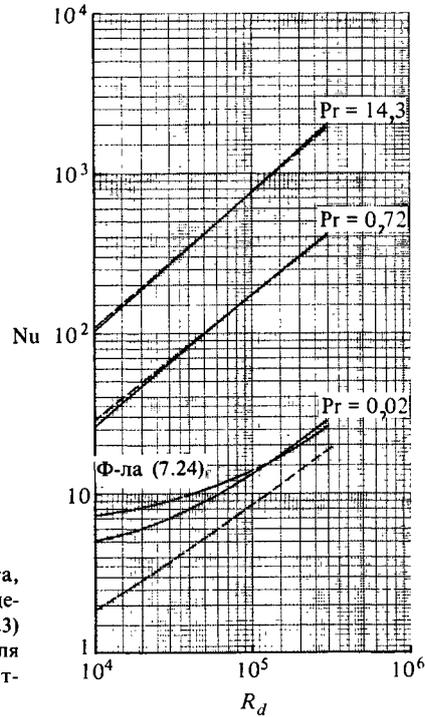


Рис. 7.4. Сравнение результатов расчета, полученных с помощью двухслойной модели (сплошные линии), формулы (7.23) (штриховые линии) и формулы (7.24) для течения в круглой трубе с постоянной плотностью теплового потока.

булентной вязкости, при $Pr = 0,72$ и $14,3$, но при $Pr = 0,02$ такого соответствия не достигается. Это и не удивительно, поскольку при выводе соотношения (7.23) предполагается, что величина Pr_t постоянна поперек всего слоя, включая примыкающий к поверхности подслой, а это предположение, оправданное при числах Прандтля, близких к единице или больших единицы, несправедливо при меньших значениях этого числа.

На рис. 7.4 представлены также результаты расчета по другой эмпирической формуле

$$Nu = 6,3 + 0,0167R_d^{0,85}Pr^{0,93}, \quad (7.24)$$

предложенной Слейчером и Роузом [7] для турбулентного течения с малым числом Прандтля в круглой трубе при постоянной плотности теплового потока. Как нетрудно видеть, при $Pr = 0,02$ результаты расчета по формуле (7.24) лучше согласуются с расчетной зависимостью, полученной для двухслойной модели турбулентной вязкости, чем данные расчета по формуле (7.23). При малых числах

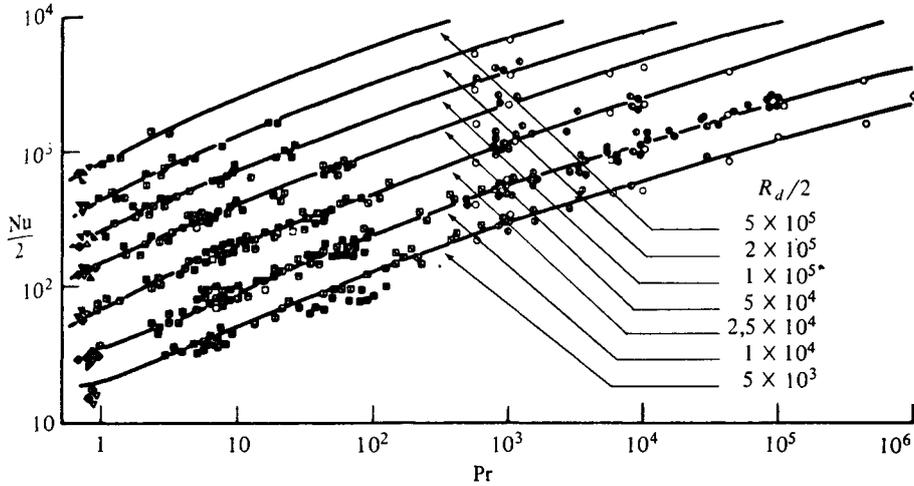


Рис. 7.5. Сравнение результатов измерения тепло- и массообмена при течении в трубе с результатами расчета по формуле (7.26).

Рейнольдса результаты расходятся сильнее, чем при больших числах Рейнольдса.

Аналогичную методику можно применить для расчета числа Нуссельта в плоском канале (задача 7.4). Отметим, что при использовании формулы (7.9) для плоского канала необходимо принять $r_0 = h$.

Согласно результатам подробного исследования полностью развитого турбулентного течения при постоянной температуре стенки, проведенного Кадером и Ягломом [8], эмпирическая формула

$$Nu = \frac{R_d \sqrt{f}}{8,6 \ln(R_d \sqrt{f}/16) - 4,0} \quad (7.25)$$

достаточно точно согласуется с имеющимися экспериментальными данными для воздуха ($Pr = 0,7$). Для жидкостей с $Pr \geq 0,5$ в работе [8] рекомендуется соотношение

$$Nu = \frac{R_d Pr \sqrt{f/2}}{4,24 \ln(R_d \sqrt{f}/16) + 25,0 Pr^{2/3} + 4,24 \ln Pr - 20,2} \quad (7.26)$$

Коэффициент трения, входящий в соотношения (7.25) и (7.26), рассчитывается согласно закону сопротивления Прандтля (7.16). Кадер и Яглом сравнили результаты расчета по формуле (7.26) с много-

численными результатами измерения теплообмена в гладких трубах. Данные охватывают диапазон чисел Прандтля $1-10^6$ и диапазон чисел Рейнольдса $R_d = 10^4-10^6$. Результаты расчета по формуле (7.26) в целом согласуются с экспериментальными данными, хотя и наблюдается некоторый разброс при умеренных числах Рейнольдса, $R_d < 2 \times 10^4$ (рис. 7.5).

*Профиль скорости и коэффициент трения
в шероховатых трубах*

Расчет характеристик переноса количества движения и тепла для полностью развитого турбулентного течения в шероховатой трубе можно провести с помощью следующей методики, аналогичной применявшейся для гладкой трубы. Вновь необходимо начать с определения профиля скорости и коэффициента трения. Формулы для расчета коэффициента трения в подобных течениях находят таким же образом, как и в случае обтекания гладкой стенки. Вновь коэффициент трения изменяется по-разному при трех различных режимах проявления шероховатости, которые рассматривались в разд. 6.2. В режиме обтекания гидравлически гладкой поверхности f изменяется так же, как и в случае гладкой стенки. В переходном режиме f зависит как от относительной высоты шероховатости k/d , так и от числа Рейнольдса R_d . В режиме полного проявления шероховатости f зависит только от относительной высоты шероховатости и не зависит от числа Рейнольдса. Здесь будет показано, как определяется коэффициент трения в режиме полного проявления шероховатости и представлены итоговые результаты расчета для других режимов.

Закон стенки при обтекании поверхности с равномерно распределенной шероховатостью выражается соотношением (6.32). Для режима полного проявления шероховатости песочного типа это соотношение можно записать в виде

$$u = u_\tau \left(\frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k_s} + 8,5 \right) = u_\tau \left(\frac{2,303}{\kappa} \lg \frac{y}{k_s} + 8,5 \right). \quad (7.27)$$

Вычисляя соотношение (7.27) плюс оставшийся без изменения вклад «следа» $\Pi(x)w(y/r_0)u_\tau$ на оси трубы, $y = r_0$, и применяя условие (7.18), получаем

$$f = \frac{1}{[2 \lg (r_0/k_s) + 1,74]^2}. \quad (7.28)$$

Аналогичное по форме соотношение было впервые получено Карманом.

Профиль скорости в круглой шероховатой трубе можно рассчитать, как и для гладкой трубы, интегрируя уравнение (7.8), причем входящий в него коэффициент турбулентной вязкости определяется с помощью двухслойной модели. Для внутренней части слоя этот коэффициент вычисляется по формуле (7.10), а входящая в нее длина пути перемешивания l определяется соотношением (6.102). Во внешней части слоя коэффициент турбулентной вязкости вычисляется по формуле (7.12), а величина α находится с помощью зависимости, представленной на рис. 7.1. При заданных значениях числа Рейнольдса R_d и высоты шероховатости k можно найти коэффициент трения f , число Рейнольдса шероховатости k^+ и вычислить Δu по формуле (6.113). Затем можно, следуя той же методике, которая применялась для гладкой трубы, рассчитать профиль скорости.

Расчет теплообмена в шероховатых трубах

Зависимость для числа Нуссельта в условиях полностью развитого турбулентного течения в шероховатой трубе можно найти с помощью той же методики, которая применялась для гладкой трубы. Как только найдены f и u , можно снова проинтегрировать уравнение (7.19). На рис. 7.6 и 7.7 представлены расчетные резуль-

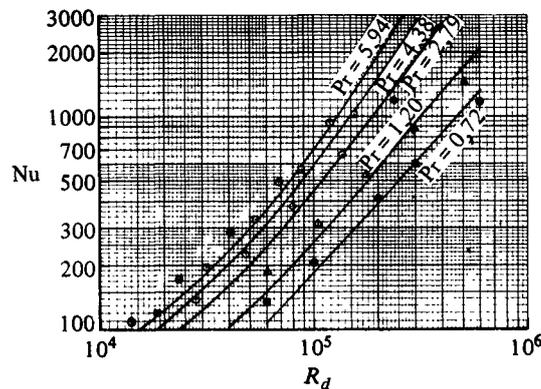


Рис. 7.6. Влияние числа Прандтля на число Нуссельта для течения в круглой шероховатой трубе ($r_0/k = 208$) при постоянной плотности теплового потока. Значками показаны экспериментальные данные; * результаты расчета.

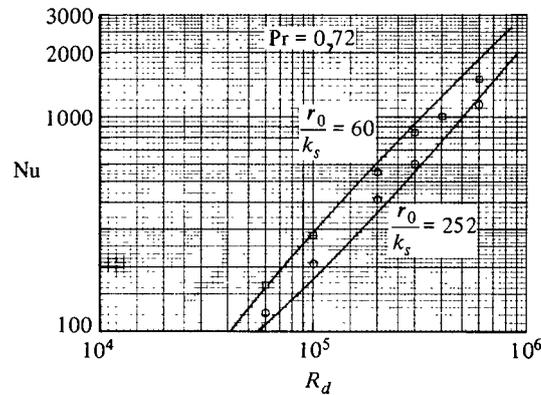


Рис. 7.7. Влияние высоты шероховатости на число Нуссельта для течения в круглой шероховатой трубе с постоянной плотностью теплового потока при $Pr = 0,72$.

Значками показаны экспериментальные данные; — результаты расчета.

таты, полученные этим способом. На рис. 7.6 показано влияние молекулярного числа Прандтля на число Нуссельта при различных числах Рейнольдса течения в шероховатой трубе с $r_0/k = 208$ для случая постоянной плотности теплового потока в стенку. Все представленные экспериментальные данные получены в работе Диппри и Саберски [6], за исключением результатов для $Pr = 0,72$, полученных Нуннером [9]. Можно видеть, что при заданном числе Рейнольдса с увеличением числа Прандтля увеличивается и местное число Нуссельта и что расчетные зависимости достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными.

На рис. 7.7 показано влияние высоты шероховатости на число Нуссельта при различных числах Рейнольдса течения в круглой шероховатой трубе с $r_0/k_s = 60$ и 252 для случая постоянной плотности теплового потока при $Pr = 0,72$. Экспериментальные данные Нуннера [9] удовлетворительно согласуются с результатами расчета и показывают, что число Нуссельта существенно возрастает с увеличением высоты шероховатости.

На рис. 7.8 показано влияние высоты шероховатости на число Нуссельта при различных числах Рейнольдса и трех значениях числа Прандтля. Здесь же приведены результаты для гладкой трубы. Можно видеть, что при всех трех числах Прандтля шероховатость оказывает сравнительно слабое влияние на число Нуссельта при низких числах Рейнольдса и существенно более сильное влияние при высоких числах Рейнольдса.

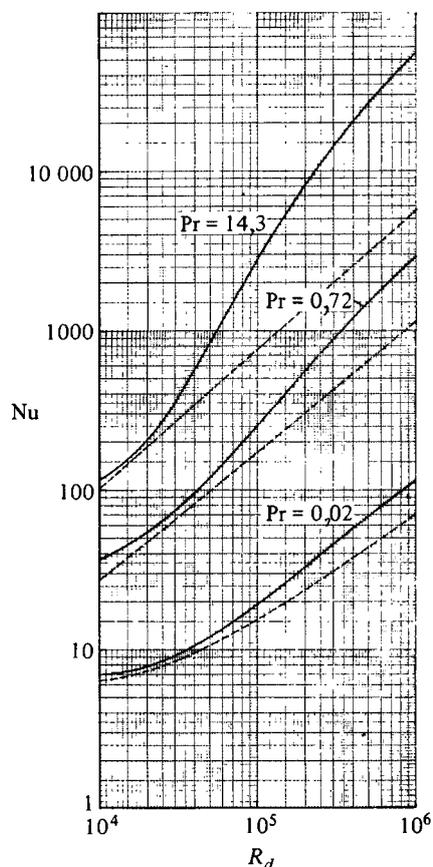


Рис. 7.8. Результаты расчета влияния высоты шероховатости на число Нуссельта для течения в круглой шероховатой трубе ($r_0/k_s = 100$) при постоянной плотности теплового потока и различных числах Рейнольдса и Прандтля.
 ... для шероховатой трубы; ---- для гладкой трубы.

7.2. Длина теплового начального участка в условиях полностью развитого поля скоростей

Теплообмен в условиях турбулентного течения в канале постоянного сечения при полностью развитом профиле скорости можно рассчитать, следуя методике, аналогичной той, которая описана в разд. 5.2 для ламинарного режима течения. Вновь уравнение (7.1) записывается в безразмерном виде. В случае заданной температуры стенки сначала находят решение уравнений (5.38) и (5.39) в преобразованных переменных, а затем решение уравнений (5.41) и (5.42) в исходных переменных, как только толщина теплового пограничного слоя станет равной полуширине канала или радиусу трубы.

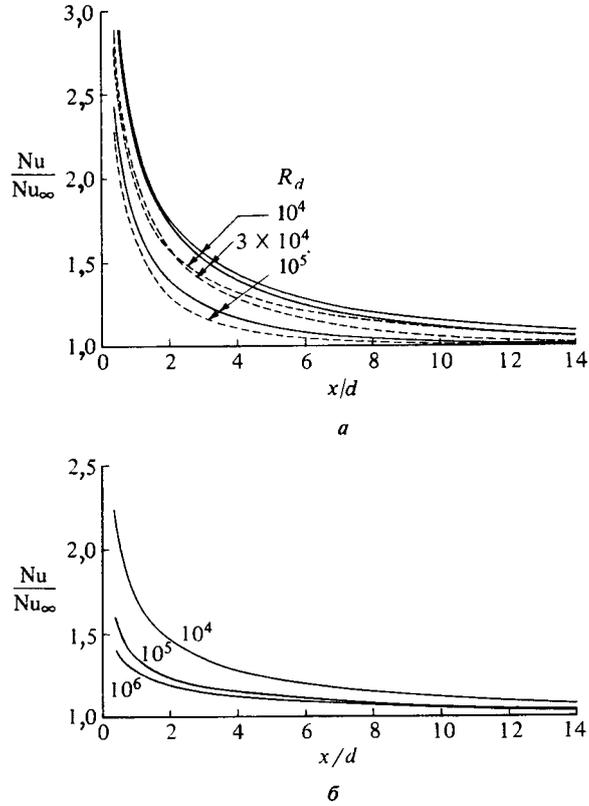


Рис. 7.9. Результаты расчета влияния числа Рейнольдса на изменение Nu/Nu_{∞} на тепловом начальном участке течения в круглой гладкой трубе.
 а — $Pr = 0,02$; ———— постоянная плотность теплового потока в стенку; ---- постоянная температура поверхности; б — $Pr = 0,72$: ———— постоянная температура поверхности.

Коэффициенты a_2 и a_3 в соотношении (5.40а) остаются неизменными; коэффициент a_1 теперь выражается формулой

$$a_1 = (\dot{r})^K \left(1 + \frac{Pr}{Pr_t} \epsilon_m^+ \right). \quad (7.29)$$

Аналогичная методика применяется также и в случае заданной плотности теплового потока.

На рис. 7.9—7.11 представлены решения уравнения (7.1) для турбулентного течения в трубе как при постоянной температуре по-

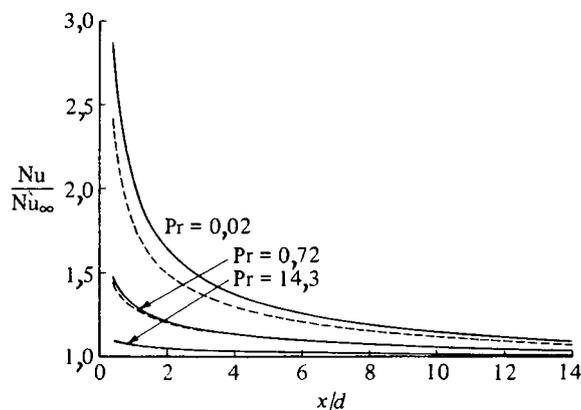


Рис. 7.10. Результаты расчетов влияния числа Прандтля на изменение Nu/Nu_{∞} на тепловом начальном участке течения в круглой гладкой трубе при $R_d = 3 \times 10^5$.
 - - - постоянная плотность теплового потока в стенку; ---- постоянная температура поверхности.

верхности, так и при постоянной плотности теплового потока в стенку. Расчеты проводились с помощью модифицированного варианта программы на языке Фортран, описанной в разд. 13.5. Профиль скорости для случая гладкой стенки определялся путем интегрирования соотношения (7.13) с использованием двухслойной модели турбулентной вязкости, описанной в разд. 7.1. Коэффициент

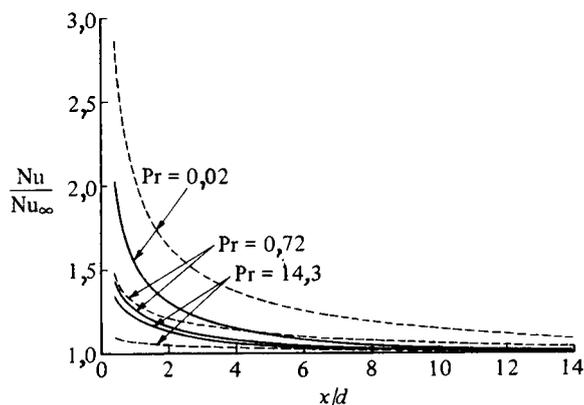


Рис. 7.11. Результаты расчета влияния высоты шероховатости поверхности на изменение Nu/Nu_{∞} на тепловом начальном участке течения в круглой гладкой трубе при постоянной плотности теплового потока в стенку; $R_d = 3 \times 10^5$.
 — шероховатая труба; ---- гладкая труба.

трения вычислялся по формуле (7.17) и, как и при расчете теплообмена в условиях полностью развитого течения, использовалось переменное турбулентное число Прандтля, определенное соотношением (6.26).

На рис. 7.9 показано влияние числа Рейнольдса на распределение Nu/Nu_{∞} вдоль теплового начального участка течения в круглой гладкой трубе при различных параметрах течения и различных граничных условиях. Результаты, приведенные на рис. 7.9, *а* показывают, что при $Pr = 0,02$ длина теплового начального участка уменьшается с ростом числа Рейнольдса, как в случае постоянной температуры стенки трубы, так и в случае постоянной плотности теплового потока в стенку. Об этом же свидетельствуют и данные для $Pr = 0,72$ при граничном условии постоянной температуры стенки, приведенные на рис. 7.9, *б*, хотя в этом случае длина теплового начального участка уменьшается не столь сильно. На рис. 7.10 показано влияние числа Прандтля на длину теплового начального участка для круглой гладкой трубы при числе Рейнольдса $R_d = 3 \times 10^5$. Можно видеть, что с ростом числа Прандтля длина теплового начального участка уменьшается. Это справедливо и для случая постоянной плотности теплового потока, и для случая постоянной температуры стенки.

На рис. 7.11 показано влияние высоты шероховатости на длину теплового начального участка для течения в круглой трубе с постоянной плотностью теплового потока в стенку при трех значениях числа Прандтля. Эти расчетные результаты, полученные при $R_d = 3 \times 10^5$ и $k^+ = 93$, свидетельствуют, что влияние высоты шероховатости довольно существенно и что для шероховатой трубы длина теплового начального участка меньше, чем для гладкой, вследствие общей интенсификации турбулентного перемешивания.

7.3. Гидродинамический и тепловой начальные участки

Характеристики переноса количества движения и тепла при переходном и турбулентном режимах течения на начальном участке канала постоянного сечения можно рассчитать, обобщив методику, описанную в разд. 5.3. Как и в задачах внешнего обтекания тел, это можно сделать, применяя понятия турбулентной вязкости и турбулентного числа Прандтля, что позволяет записать уравнения движения и энергии в форме, близкой к форме уравнений (5.46) и (5.47) или (5.53) и (5.54) для ламинарного режима течения, с тем лишь исключением, что величины b и e (соотношение (5.50а)) те-

перь определяются следующим образом:

$$b = (1-t)^{2K}(1+\epsilon_m^+), \quad e = (1-t)^{2K} \left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \epsilon_m^+\right) \frac{1}{\text{Pr}}. \quad (7.30)$$

При турбулентном течении в канале, как и при ламинарном, можно выделить три четко различающиеся области. В окрестности входного сечения вблизи стенки развивается сдвиговый слой и скорость в ядре потока непрерывно возрастает вследствие увеличения толщины вытеснения. С физической точки зрения течение в этой области, называемой *областью взаимодействия с вытеснением* [10], есть не что иное, как течение в пограничном слое со слабым отрицательным градиентом давления, причем известно, что влияние градиента давления на характеристики турбулентного пограничного слоя значительно слабее, чем на характеристики ламинарного слоя. Следовательно, в этой области можно с полным основанием применить модель турбулентной вязкости, описанную соотношениями (6.102)—(6.109), заменяя u_e скоростью на оси u_c .

В направлении движения потока сдвиговые слои утолщаются и наконец сливаются на оси. Взаимодействие между вихрями двух сдвиговых слоев в плоском канале усиливается, пока не будет достигнуто установившееся состояние взаимопроникновения вихрей и мелкомасштабного смешения, когда течение становится полностью развитым.

В области полностью развитого течения можно применить эмпирическую формулу Никурадзе для расчета длины пути перемешивания (7.9) совместно с коэффициентом демпфирования Ван Дриста и рассчитать коэффициент турбулентной вязкости в любой точке слоя с помощью выражения (7.10).

Для зоны (в трубах и каналах), расположенной между областью взаимодействия с вытеснением и областью полностью развитого течения можно с приемлемой точностью рассчитать коэффициент турбулентной вязкости по эмпирической формуле, скомбинированной из соотношений (6.102), (6.109) и (7.10).

$$\epsilon_m = \epsilon_m^I + (\epsilon_m^F - \epsilon_m^I) \left[1 - \exp\left(-\frac{x-x_0}{\lambda r_0}\right)\right], \quad (7.31)$$

где ϵ_m^I — расчетное значение, найденное по формулам (6.102) и (6.109), а ϵ_m^F — расчетное значение, найденное по формуле (7.10); x_0 — координата сечения, в котором сдвиговые слои почти сливаются ($\delta \approx 0,99 r_0$), параметр λ является эмпирической постоянной, равной примерно 20 [11]. При $x < x_0$ величина ϵ_m принимается равной ϵ_m^I ; как только x достигает значения x_0 , расчет ведется по фор-

муле (7.31), причем ε_m^l принимается равным значению при $x = x_0$. Использование этой простой, но довольно произвольной интерполяционной функции позволяет получить достаточно точные результаты (более подробную информацию можно найти в работе [11]).

Примеры расчета

Ниже будут представлены результаты расчета для двух случаев турбулентного течения на входном участке гладкой круглой трубы. На рис. 7.12 расчетные результаты сравниваются с экспериментальными данными для изотермической стенки, полученными Бар-

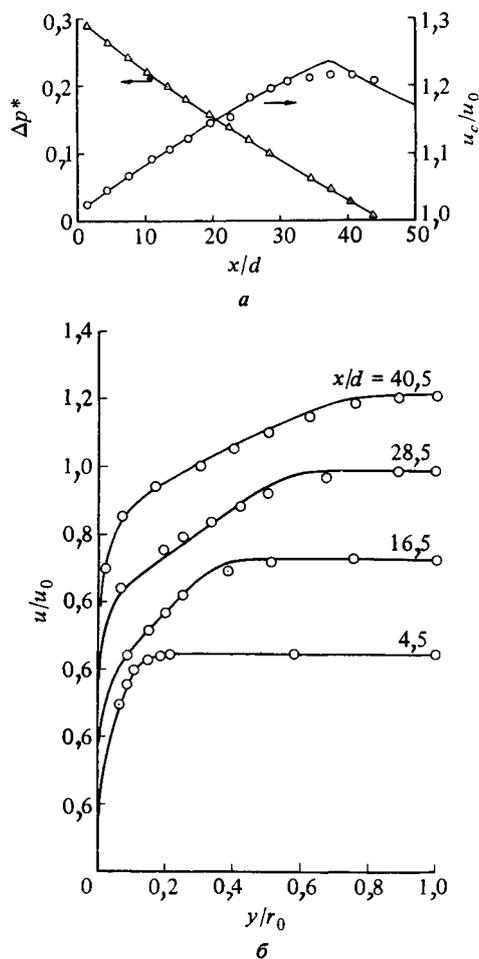


Рис. 7.12. Сравнение результатов расчета для течения в трубе (сплошные линии) с экспериментальными данными (значки) Барбина и Джоунса [12].

a — скорость на оси и падение давления; *б* — профили скорости.

бином и Джоунсом [12]; представленные результаты, типичные для развивающегося течения в трубе, постепенно приближаются к данным классического исследования Лауфера [13]. Следует подчеркнуть, что условия полностью развитого течения достигаются асимптотически. Барбин и Джоунс сделали вывод, что при числе Рейнольдса $R_d = 3,88 \times 10^5$ эти условия не достигаются даже в сечении $x/d = 40$. Однако, согласно результатам измерения падения давления (рис. 7.12, *a*), которые вряд ли можно считать достаточно чувствительным критерием, условия течения в этом сечении близки к асимптотическим. Приведенное на рис. 7.12, *a* расчетное распределение безразмерной скорости на оси, как и расчетная зависимость падения давления, вполне удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Однако в области, где пограничные слои смыкаются, по результатам расчета скорость изменяется сильнее, чем в экспериментах. Это небольшое расхождение между расчетными и экспериментальными данными можно объяснить недостаточной точностью корреляционной зависимости для коэффициента турбулентной вязкости.

Если положение начала перехода пограничного слоя известно, характеристики потока в зоне перехода и в области полностью развитого течения можно рассчитать достаточно точно, используя эмпирическое соотношение для коэффициента перемежаемости (6.105) с учетом формулы (6.106), которое для течения в трубе записывается следующим образом:

$$\gamma_{tr} = 1 - \exp \left[- \frac{1}{1200} R_{\gamma_{tr}}^{0,66} \left(\frac{x}{x_{tr}} - 1 \right)^2 \right]. \quad (7.32)$$

На рис. 7.13 представлены результаты для круглой трубы, режим течения в которой сначала ламинарный, затем переходный, и, наконец, полностью развитый турбулентный. Экспериментальные данные при постоянной плотности теплового потока в стенку и при постоянной температуре стенки были получены Холлом и Ханом [14]. На рис. 7.13 экспериментальные данные сравниваются с результатами расчета при значениях числа Рейнольдса, рассчитанного по диаметру трубы, 31 000 и 33 000 для двух тепловых граничных условий. Предполагалось, что переход начинается в сечении $x/r_0 = 8$, где, согласно результатам измерений, число Стантона начинает возрастать. Можно видеть, что расчетные зависимости достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными и что вид теплового граничного условия оказывает наибольшее влияние в зоне перехода (где методика расчета, разумеется, довольно груба и

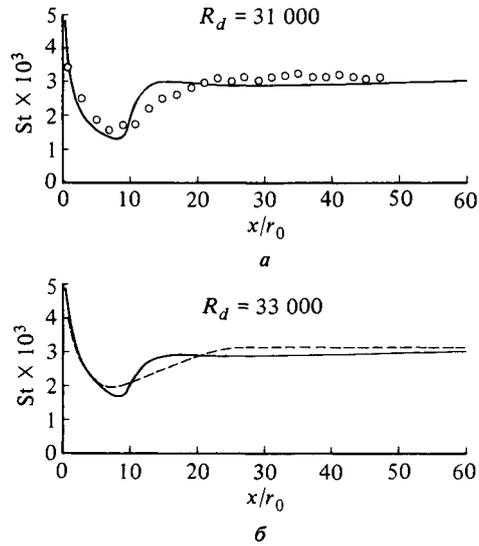


Рис. 7.13. Результаты расчета местного числа Стантона для развивающегося течения в трубе.

a — постоянная плотность теплового потока; *б* — постоянная температура стенки; ——— расчетная зависимость Себиси и Чжена [11]; ----, \circ экспериментальные данные Холла и Хана [14].

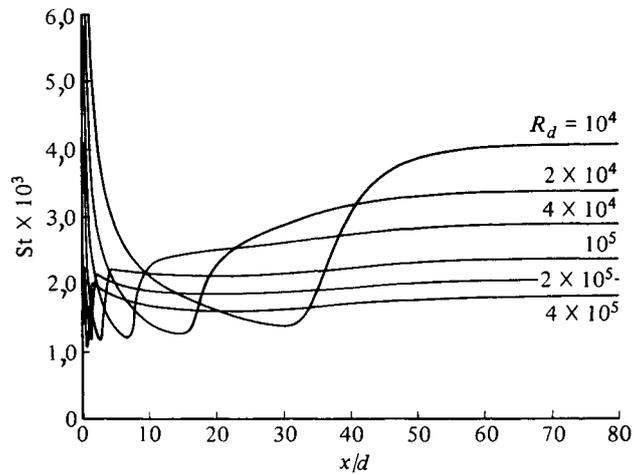


Рис. 7.14. Распределения местного числа Стантона для развивающегося течения в трубе при различных числах Рейнольдса ($Pr = 0,72$, $R_{0,тр} = 320$).

вряд ли можно ожидать, что она позволяет получить достаточно точные результаты) по сравнению с областями ламинарного и турбулентного режимов течения. Согласно экспериментальным данным Холла и Хана, при возрастании числа Рейнольдса длина теплового начального участка уменьшается (поскольку зона перехода смещается вперед по потоку) и результаты расчета описанным методом (рис. 7.14) подтверждают этот вывод.

Задачи

- 7.1. Вывести уравнение (7.7) из уравнения (7.6).
- 7.2. Используя закон дефекта скорости для трубы

$$\frac{u_{\max} - u}{u_{\tau}} = \phi\left(\frac{y}{r_0}\right)$$

и эмпирическое соотношение

$$u_m = u_{\max} - 4,07u_{\tau} ,$$

показать, что коэффициент трения f можно выразить формулой

$$u_{\max} = u_m (1 + 1,44\sqrt{f}) . \quad (P7.1)$$

- 7.3. Вычислить соотношение (7.15) на оси трубы и с помощью формулы (P7.1) показать, что закон сопротивления Прандтля для гладких труб можно записать в виде соотношения (7.16).
- 7.4. Показать, что закон сопротивления Прандтля для плоских каналов, соответствующий закону для круглых труб (задача 7.3) можно записать (при $R = u_m h/\nu$) следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,87 \ln(R\sqrt{f}) - 0,41 .$$

- 7.5. Предположим, что коэффициент теплоотдачи \hat{h} при полностью развитом режиме вынужденной конвекции в трубе зависит от следующих параметров:

$$\hat{h} = f(u_0, \rho, \mu, c_p, k, d) ,$$

где k — коэффициент теплопроводности жидкости. Применяя метод исключения из матрицы, показать, что

$$\text{Nu} = \phi(R_d, \text{Pr}) ,$$

где

$$\text{Nu} = \frac{\hat{h}d}{k} = \frac{\dot{q}_w}{\Delta T} \frac{d}{k} .$$

- 7.6. Дважды проинтегрировать уравнение (7.19) по r при граничных условиях (7.21) для случая турбулентного течения при постоянной плотности теплового

- потока в стенку. Рассчитать длину пути перемешивания по формулам (7.9) и (7.10) и турбулентное число Прандтля по формуле (6.26) при $R_d = 10^4$ и 10^5 и $Pr = 0,02, 0,72$ и $14,3$. Вычислить коэффициент трения f по формуле (7.17). Сравнить полученные результаты с данными, представленными на рис. 7.2.
- 7.7. Повторить решение задачи 7.6 для случая постоянной температуры стенки.
- 7.8. Сравнить значения числа Нуссельта, рассчитанные по формулам (7.23), (7.24) и (7.26) для течений в трубе со следующими параметрами:
 а) $Pr = 0,7, R_d = 10^4$ (сравнить с результатами расчета по формуле (7.25));
 б) $Pr = 0,2, R_d = 10^4$;
 в) $Pr = 100, R_d = 10^4$;
 г) $Pr = 0,7, R_d = 10^6$.
- 7.9. Жидкая ртуть при температуре 323 К втекает в трубу диаметром 0,02 м и, протекая по ней с расходом 2 кг/с, нагревается до температуры 368 К. Предполагая, что вдоль трубы поддерживается постоянная плотность теплового потока, а температура стенки на 15 К выше среднemasсовой температуры ртути, рассчитать длину трубы.
- 7.10. Моторное масло, имеющее температуру 303 К, втекает со скоростью 1 м/с в трубу диаметром 0,05 м и длиной 10 м. Температура стенки трубы на 10 К выше среднemasсовой температуры масла и поддерживается равной 323 К. Рассчитать суммарный тепловой поток к маслу и температуру масла в выходном сечении трубы.
- 7.11. Вода, имеющая среднюю температуру 293 К, с расходом 1 кг/с течет в трубе диаметром 0,05 м и длиной 15 м. Измерено падение давления, составляющее 510 Па. Поддерживается постоянная плотность теплового потока в стенку, а средняя температура стенки равна 323 К и на 10 К выше среднemasсовой температуры воды. Рассчитать температуру воды в выходном сечении трубы.
- 7.12. Воздух при атмосферном давлении и температуре 373 К нагревается, протекая со скоростью 20 м/с в трубе диаметром 0,01 м и длиной 15 м. Поддерживается постоянная плотность теплового потока в стенку, а температура стенки на 7 К выше среднemasсовой температуры воздуха. Рассчитать тепловой поток.
- 7.13. Повторить решение задачи 7.6 для турбулентного течения в шероховатой трубе с $r_0/k_s = 100$ при $R_d = 10^5, Pr = 0,02; 0,72$ и $14,3$. Рассчитать коэффициент трения по формуле (7.28) и сравнить полученные результаты с данными, представленными на рис. 7.8.
Указание. Рассчитать профиль скорости с помощью двухслойной модели турбулентной вязкости, вычисляя коэффициент турбулентной вязкости во внутренней части слоя по выражению (7.10) с использованием соотношения (6.102) для длины пути перемешивания l , а во внешней части слоя по выражению (7.12), причем значение параметра α определяется с помощью рис. 7.1 или с помощью условия (7.18). Поскольку для расчета характеристик течения во внутренней и внешней областях слоя необходимо знать профиль скорости, рассчитать начальный профиль скорости по выражению (7.13), определяя модифицированную длину пути перемешивания с помощью соотношений (7.9) и (7.14). Затем рассчитать распределение коэффициента турбулентной вязкости с помощью двухслойной модели и найти профиль скорости из решения уравнения (7.8). Повторить этот процесс, пока не будет достигнута сходимость расчетных профилей скорости.
- 7.14. Вычислить коэффициент трения f по формуле (7.16) или (7.28) и определяя значения числа Нуссельта по рис. 7.8, рассчитать коэффициент аналогии

- Рейнольдса $St/(f/8)$ для гладкой и шероховатой ($r_0/k_s = 100$) поверхностей труб при $R_d = 10^5$ и $Pr = 0,02; 0,72; 14,3$.
- 7.15. Вода при температуре 313 К с расходом 3 кг/с втекает в трубу диаметром 5 см, стенка которой имеет относительную высоту шероховатости $k_s/d = 0,005$. Предполагая, что температура стенки равна 333 К и на 10 К выше среднемассовой температуры воды, а длина трубы составляет 20 м, рассчитать суммарный тепловой поток. Использовать аналогию Рейнольдса.
 - 7.16. Воздух при атмосферном давлении и температуре 283 К нагревается, протекая с расходом 0,5 кг/с в трубе диаметром 2 см, стенка которой имеет относительную высоту шероховатости $k_s/d = 0,002$. Рассчитать тепловой поток на единицу длины трубы, если плотность теплового потока в стенку постоянна, а температура стенки на 5 К выше среднемассовой температуры воздуха.
 - 7.17. Воздух, имеющий атмосферное давление и температуру 283 К, течет со скоростью 10 м/с в трубе диаметром 0,05 м и длиной 1 м. Нагрев начинается на расстоянии 5 см от входного сечения. Поддерживается постоянная плотность теплового потока, так что температура стенки на 5 К выше средней температуры воздуха. Рассчитать местную плотность теплового потока на расстояниях 13; 25 и 45 см от входного сечения трубы. Предположить, что поле скоростей полностью развито.
 - 7.18. Воздух при атмосферном давлении с расходом 2 кг/с течет в трубе диаметром 0,1 м и длиной 1,5 м. На участке длиной 1 м, начинающемся на расстоянии 0,5 от входного сечения, поддерживается постоянная температура стенки, равная 413 К. Средняя температура воздуха в трубе составляет 473 К. Рассчитать:
 - а) местную плотность теплового потока на расстояниях 0,3; 0,4 и 0,6 м;
 - б) снижение температуры воздуха при прохождении им канала.
 - 7.19. С помощью метода Левека (задача 4.20) можно приближенно определить длину теплового начального участка для круглой трубы с постоянной температурой стенки при $R_d = 10^4$, $Pr = 100$. Предположим, что решение Левека справедливо до достижения предельных условий, в которых число Нуссельта можно рассчитать с помощью соответствующего анализа для полностью развитого течения. Выразить полученные результаты в виде числа диаметров трубы от начала нагреваемого участка.
 - 7.20. С помощью представленной в разд. 13.3 программы численного расчета, основанной на решении уравнения (7.1) для трубы с заданной постоянной температурой стенки, получить решения при $Pr = 14,3$, $R_d = 10^5$. Построить графически:
 - а) распределение местного числа Нуссельта;
 - б) профили температуры при $x/d = 2; 4; 6$ и 8.
 - 7.21. Повторить решение задачи 7.20 при $Pr = 0,02$.
 - 7.22. С помощью программы численного расчета, описанной в разд. 13.3, найти решение для турбулентного течения в шероховатой трубе при постоянной температуре стенки. Принять $r_0/k_s = 100$, $R_d = 10^5$, $Pr = 0,02; 0,72$ и 14,3. Сравнить профиль температуры и число Нуссельта, соответствующие условиям полностью развитого течения, с профилем температуры и числом Нуссельта, рассчитанными при решении задачи 7.13. Вновь применить двухслойную модель турбулентной вязкости.
 - 7.23. В работе [15] было показано, что в случае несжимаемого турбулентного течения в круглой трубе при постоянной плотности теплового потока продольное распределение числа Нуссельта выражается следующим корреляционным со-

отношением:

$$\frac{\text{Nu}}{(\text{Nu})_{\infty}} = 1 + 0,8(1 + 70\,000 R_d^{-1})^{0,5} \left(\frac{x}{d}\right)^{-1}, \quad (\text{P7.2})$$

имеющим погрешность $\pm 5\%$ при $x/d \geq 2$ в диапазоне чисел Рейнольдса $3 \times 10^3 - 5 \times 10^4$. Величина Nu определяется формулой (5.23а), а $(\text{Nu})_{\infty}$ — число Нуссельта, соответствующее условиям полностью развитого течения, которое выражается эмпирическим соотношением Диттуса и Болтера

$$(\text{Nu})_{\infty} = 0,021 R_d^{0,8} \text{Pr}^{0,4}. \quad (\text{P7.3})$$

Модифицировать программу численного расчета, описанную в разд. 13.3, провести расчеты и сравнить полученные результаты с результатами расчетов по формулам (P7.2) и (P7.3). Принять $\text{Pr} = 0,72$.

ЛИТЕРАТУРА

- Schlichting H., *Boundary-Layer Theory*, McGraw, N.Y., 1981. [Имеется перевод с пятого немецкого издания, исправленного по шестому (американскому) изданию: Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974.]
- McAdams W.H., *Heat Transmission*, McGraw, N.Y., 1954. [Имеется перевод: Мак-Адамс В.Х. Теплопередача. — М.: Metallurgizdat, 1961.]
- Lawn C.J., Turbulent heat transfer at low Reynolds number, *J. Heat Transfer*, **91**, 532 (1969). [Имеется перевод: Лон. Турбулентная теплопередача при малых числах Рейнольдса. — Труды Амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1969, № 4, с. 96.]
- Gowan R.A., Smith J.W., The effect of the Prandtl number on temperature profiles for heat transfer in turbulent pipe flow, *Chem. Eng. Sci.*, **22**, 1701 (1967).
- Habib I.S., Na T.Y., Prediction of heat transfer in turbulent pipe flow with constant wall temperature, *J. Heat Transfer*, **96**, 253 (1974). [Имеется перевод: Хабиб, На. Расчет характеристик теплообмена при турбулентном течении в трубе с постоянной температурой стенки. — Труды Амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1974, № 2, с. 156.]
- Dipprey D.F., Sabersky R.M., Heat and momentum transfer in smooth and rough tubes at various Prandtl numbers, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **6**, 329 (1963).
- Sleicher C.A., Rouse M.W., A convenient correlation for heat transfer to constant and variable property fluids in turbulent pipe flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **18**, 677—683 (1975).
- Kader B.A., Yaglom A.M., Heat and mass transfer laws for fully turbulent wall flows, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **15**, 2329—2351 (1972).
- Nunner W., Heat transfer and pressure drop in rough tubes, *VDI-Forschungschafft* 455, Ser. B, **22**, 5 (1956): Также Atomic Energy Research Establishment Doc. AERE Lib/Trans. 786, Harwell, England, 1958.
- Johnston J.P., Turbulence, in *Topics in Applied Physics*, P. Bradshaw (ed.), Vol. 12, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- Cebeci T., Chang K.C., A general method for calculating momentum and heat transfer in laminar and turbulent duct flows, *Num. Heat Transfer*, **1**, 39 (1978).
- Barbin A.R., Jones J.B., Turbulent flow in the inlet region of a smooth pipe, *J. Basic Eng.*, **85**, 29 (1963). [Имеется перевод: Барбин, Джоунс. Турбулентное течение на

- начальном участке гладкой трубы. — Труды Амер. о-ва инж.-мех., сер. D, Техническая механика, 1963, № 1, с. 34.]
13. Laufer J., The structure of turbulence in fully developed pipe flow, NACA Rept No. 1174, 1954.
 14. Hall W.B., Khan S.A., Experimental investigation into the effect of the thermal boundary condition on heat transfer in the entrance region of a pipe, *J. Mech. Eng. Sci.*, **6**, 250 (1964).
 15. Reynolds H.C., Swearingen T.B., McEligot D.M., Thermal entry for low Reynolds number turbulent flow, *J. Basic Eng.*, **91**, 87 (1969). [Имеется перевод: Рейнольдс, Свиринген, Макэлиот. Нагрев входной области турбулентного потока с малым числом Рейнольдса. — Труды Амер. о-ва инж.-мех., сер. D, Теоретические основы инженерных расчетов, 1969, № 1, с. 99.]

В этой главе рассматривается перенос количества движения и тепла в несопряженных ламинарных и турбулентных свободных сдвиговых течениях вдали от твердых стенок. Как и в случае пристенных течений, уравнения тонких сдвиговых слоев позволяют получить автомодельные решения для некоторых ламинарных свободных сдвиговых течений, а соответствующие автомодельные переменные могут быть найдены несколькими способами. В разд. 4.1 был рассмотрен метод группового анализа дифференциальных уравнений. В разд. 8.1 и 8.2 с помощью другого подхода найдены автомодельные переменные для случаев плоских ламинарных струй и слоя смешения между однородными потоками, имеющими разную температуру. Затем в разд. 8.3 и 8.4 тот же подход используется для исследования автомодельных турбулентных свободных сдвиговых течений. Следует отметить, что автомодельные решения становятся правомерными лишь на больших расстояниях от начала течения, так как начальные условия, например на срезе сопла, им не удовлетворяют. Медленное приближение к автомодельному решению демонстрируется путем сравнения неавтомодельных и автомодельных решений для свободных сдвиговых слоев. Отметим также, что, хотя почти во всех практически важных случаях свободные сдвиговые течения являются турбулентными, решения для них мало отличаются от решений для ламинарных течений. Это будет показано в разд. 8.2 и 8.4. В сущности в этой главе свободные сдвиговые течения исследуются при произвольных сдвиговых напряжениях τ , которые могут быть чисто ламинарными или включать рейнольдсовы (турбулентные) сдвиговые напряжения; то же относится и к плотности теплового потока \dot{q}_y . В этом одна из главных особенностей данной книги, построенной на предположении, что, несмотря на существенные различия в физических свойствах ламинарных и турбулентных течений, их можно исследовать и рассчитывать практически одним и тем же способом, если известны выражения для рейнольдсовых напряжений и турбулентных тепловых потоков. В этой главе вводится также связь между полями скоростей и температур (или плотностей) и обсуждается, в чем состоит различие и сходство медленных и высокоскоростных течений. Это делается на примере простейшего сдвигового течения — свободного

слоя смешения на границе между двумя параллельными потоками. Хотя это и весьма частный случай, он более удобен для обсуждения, чем сопряженные пограничные слои и течения в каналах, которые рассматриваются в последующих главах. Последний раздел главы (8.5) представляет собой введение в теорию сопряженных течений. Он будет полезен читателям, не располагающим временем для проработки гл. 9—12, в которых дано более детальное изложение теории сопряженных течений.

8.1. Плоские ламинарные струи

В этом разделе рассматриваются плоские ламинарные струи, которые достаточно хорошо моделируют часто встречающиеся на практике течения, такие как струи, истекающие из щелевых сопел, т. е. сопел с плоским прямоугольным срезом большого удлинения. Поскольку круглые (осесимметричные) струи также имеют большое практическое значение, то мы коснемся и их.

На рис. 8.1 показана нагретая плоская струя, истекающая из щелевого сопла и смешивающаяся с окружающей жидкостью, которая находится в состоянии покоя и имеет постоянную по всему объему температуру, отличную от температуры струи. Пусть ось x направлена вдоль оси струи, а начало координат находится на срезе сопла. Поскольку в самой струе линии тока почти параллельны, а в увлекаемой ею жидкости они почти перпендикулярны оси струи, то изменением давления поперек струи можно пренебречь. Уравнения, описывающие рассматриваемое течение, являются частным случаем уравнений (3.5), (3.12) и (3.14) и могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (8.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad (8.2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial \dot{q}}{\partial y}. \quad (8.3)$$

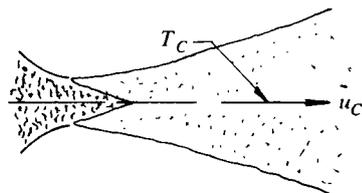


Рис. 8.1. Плоская нагретая струя, истекающая в затопленное пространство.

В общем случае здесь

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}, \quad (8.4)$$

$$\dot{q} \equiv \dot{q}_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} + \rho c_p \overline{T'v'}. \quad (8.5)$$

Эти уравнения будем решать при следующих условиях, налагаемых симметрией течения, и граничных условиях:

$$y = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad (8.6a)$$

$$y = \infty, \quad u = 0, \quad T = T_e. \quad (8.6b)$$

Поскольку давление поперек струи постоянно, а течение в ней установившееся, то полное количество движения вдоль оси x также постоянно, т. е.

$$J = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy \equiv 2\rho \int_0^{\infty} u^2 dy = \text{const}. \quad (8.7)$$

Тепловой поток (скорость переноса энтальпии в осредненном течении) в направлении оси x не зависит от x и равен его значению на срезе сопла, т. е.

$$K = 2\rho c_p \int_0^{\infty} u(T - T_e) dy = \text{const}, \quad (8.8)$$

где K равно произведению начального массового расхода на среднюю энтальпию, приходящуюся на единицу массы.

Автомодельные течения

Чтобы найти автомодельное решение для рассматриваемой системы, введем безразмерные скорость и температуру, определяемые следующими выражениями:

$$f'(\eta) = \frac{u(x, y)}{u_c(x)}, \quad (8.9)$$

$$g(\eta) = \frac{T(x, y) - T_e}{T_c(x) - T_e}. \quad (8.10)$$

Здесь через $u_c(x)$ и $T_c(x)$ обозначены соответственно скорость и температура вдоль оси струи $y = 0$, а η — автомодельная переменная,

определяемая выражением

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}, \quad (8.11)$$

где δ — толщина сдвигового слоя, выражение для которой будет получено позднее. Предположим, как и ранее при рассмотрении всех «автомодельных» течений, что функция тока $\psi(x, y)$ связана с безразмерной функцией тока $f(\eta)$ (которая не зависит от x) соотношением

$$\psi(x, y) = u_c(x)\delta(x)f(\eta). \quad (8.12)$$

Отметим, что поскольку функция $\psi(x, y)$ имеет размерность длины в квадрате, деленной на время, а $f(\eta)$ — безразмерная функция, то произведение $u_c(x)\delta(x)$ имеет ту же размерность, что и ψ . Наша задача состоит в том, чтобы найти вид функции $\delta(x)$.

С помощью уравнений (8.9)—(8.11) запишем уравнения (8.7) и (8.8) в виде

$$J = 2\rho M \int_0^\infty (f')^2 d\eta, \quad (8.13)$$

$$K = 2\rho c_p N \int_0^\infty f'g d\eta, \quad (8.14)$$

где

$$M = u_c^2\delta, \quad N = u_c\delta(T_c - T_e). \quad (8.15)$$

Отметим, что вследствие постоянства полного количества движения J и теплового потока K величины M и N также постоянны, так как интегралы в выражениях (8.13) и (8.14) — просто числа. Используя уравнения (8.9)—(8.12) и (8.15) и применяя правило дифференцирования сложных функций, запишем уравнения (8.2) и (8.3) в виде

$$\frac{u_c^2}{2} \frac{d\delta}{dx} [(f')^2 + ff''] = -\frac{\tau'}{\rho}, \quad (8.16)$$

$$\delta u_c \frac{dT_c}{dx} (fg)' = -\frac{1}{\rho c_p} (\dot{q})', \quad (8.17)$$

$$\eta = 0, \quad f = f'' = 0, \quad g' = 0, \quad (8.18a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad f' = 0, \quad g = 0. \quad (8.18b)$$

Уравнения (8.16) и (8.17), в которых τ и \dot{q} определяются уравнениями (8.4) и (8.5), справедливы как для ламинарных, так и для турбу-

лентных струй. Для ламинарных течений, используя выражения для τ и \dot{q} , можно записать

$$\frac{u_c \delta}{2\nu} \frac{d\delta}{dx} [(f')^2 + ff''] = -f''', \quad (8.19)$$

$$\frac{1}{\nu} \frac{\delta^2 u_c}{T_c - T_e} \frac{dT_c}{dx} (fg)' = \frac{g''}{\text{Pr}}. \quad (8.20)$$

Обратимся сначала к уравнению (8.19). Видно, что для двумерной ламинарной струи уравнение движения имеет автомодельное решение, если коэффициент в его левой части не зависит от x , т. е. если

$$\frac{u_c \delta}{2\nu} \frac{d\delta}{dx} = \text{const} = c_1, \quad (8.21)$$

где полагаем $c_1 > 0$. Считая, кроме того, что $c_1 = 1$ (т. е. фактически определяя δ), приведем уравнение (8.19) к виду

$$f''' + (f')^2 + ff'' = 0. \quad (8.22)$$

Аналогичным образом можно показать, что уравнение энергии для нагретой плоской ламинарной струи также имеет автомодельное решение, при условии что (см. задачу 8.3)

$$\frac{\delta^2 u_c}{\nu(T_c - T_e)} \frac{dT_c}{dx} = \text{const} = -1. \quad (8.23)$$

Уравнение (8.20) можно представить в виде

$$g'' + \text{Pr}(fg)' = 0. \quad (8.24)$$

Чтобы найти зависимость δ от x , а затем из выражения (8.11) автомодельную переменную η , а также получить зависимости u_c и T_c от x , соответствующие автомодельному решению, воспользуемся уравнениями (8.21) и (8.23) и соотношением, определяемым выражением (8.15). Из (8.21) и (8.15) найдем

$$\frac{u_c \delta}{2\nu} \frac{d\delta}{dx} = c_1 = 1 = \frac{\sqrt{\delta M}}{2\nu} \frac{d\delta}{dx} \sim \delta^{1/2} \frac{d\delta}{dx}.$$

Взяв интеграл от правой части и воспользовавшись соотношением между u_c и δ , определяемым выражением для M , получим

$$\delta = \left(\frac{9\nu^2 x^2}{M} \right)^{1/3} \sim x^{2/3} \quad \text{и} \quad u_c = \left(\frac{M^2}{3\nu x} \right)^{1/3} \sim x^{-1/3}. \quad (8.25a)$$

Аналогичным образом, проинтегрировав уравнение (8.23) с учетом соотношений (8.25а), получим

$$(T_c - T_e) \approx x^{-1/3}. \quad (8.25b)$$

Чтобы найти решение уравнения (8.22) при граничных условиях (8.18), проинтегрируем его и получим

$$f'' + ff' = \text{const}. \quad (8.26)$$

При условиях (8.18а) постоянная интегрирования равна нулю. Тогда, проинтегрировав уравнение (8.26) еще раз и найдя постоянную интегрирования из граничных условий (8.18b), получим следующее автомодельное решение для плоской ламинарной струи

$$f = \sqrt{2} \operatorname{th} \frac{\eta}{\sqrt{2}}, \quad (8.27)$$

из которого следует, что

$$f' = \operatorname{sch}^2 \frac{\eta}{\sqrt{2}}. \quad (8.28)$$

Подставив (8.28) в (8.13) и выполнив интегрирование, получим

$$M = \frac{3}{4\sqrt{2}} \left(\frac{J}{\rho} \right).$$

Следовательно, полуширина δ (соответствующая, как это теперь видно, точке, где $u/u_c = \operatorname{sch}^2(1/\sqrt{2}) = 0,63$, положение которой определено выбором значения $c_1 = 1$ в уравнении (8.25)) и скорость u_c на оси плоской автомодельной струи определяются выражениями

$$\delta = \left(\frac{12\sqrt{2} \nu^2 x^2}{J/\rho} \right)^{1/3}, \quad (8.29a)$$

$$u_c = \left[\frac{3}{32} \left(\frac{J}{\rho} \right)^2 \frac{1}{\nu x} \right]^{1/3}. \quad (8.29b)$$

Массовый расход $\dot{m} = 2\rho \int_0^{\infty} u dy$ равен

$$\dot{m} = 3,302\rho \left(\frac{J}{\rho} \right)^{1/3} (\nu x)^{1/3}. \quad (8.29c)$$

Аналогичным образом решение уравнения энергии (8.24) можно записать в виде

$$g = \operatorname{sch}^{2\operatorname{Pr}} \frac{\eta}{\sqrt{2}}. \quad (8.30)$$

Подставляя профили скорости и температуры, определяемые выражениями (8.28) и (8.30), в уравнение (8.14), получаем

$$K = 2\sqrt{2} \rho c_p N \int_0^\infty \frac{d\eta/\sqrt{2}}{\operatorname{ch}^{2\operatorname{Pr}+2}(\eta/\sqrt{2})}. \quad (8.31)$$

Интеграл в этом выражении берется при целых значениях показателя степени $2\operatorname{Pr} + 2$. Например, при $\operatorname{Pr} = 1$ получаем

$$N = \frac{3}{4\sqrt{2}} \frac{K}{\rho c_p} \quad (8.32a)$$

и, следовательно, разность температур на оси плоской ламинарной струи и окружающей среды равна

$$T_c - T_e = \frac{3^{2/3}}{4\sqrt{2}} \frac{K}{\rho c_p} (\nu x M)^{-1/3}. \quad (8.32b)$$

На рис. 8.2 показан автомодельный профиль скорости плоской струи, построенный по уравнению (8.28), а также автомодельный

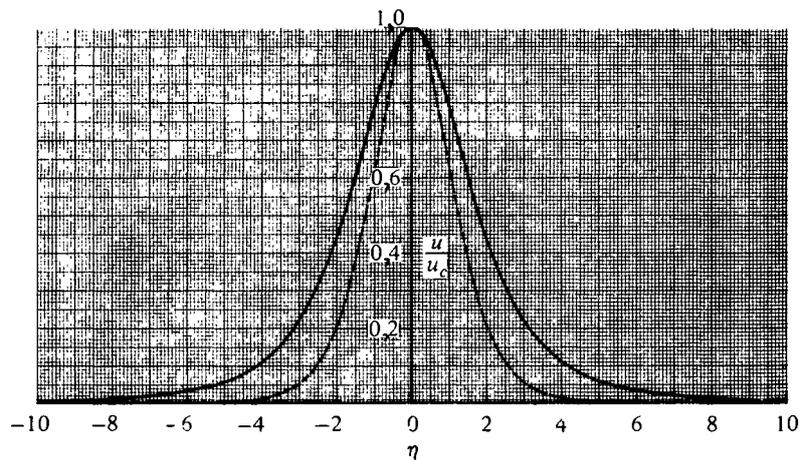


Рис. 8.2. Профили скорости для ламинарных струй.

---- плоские струи; — осесимметричные струи.

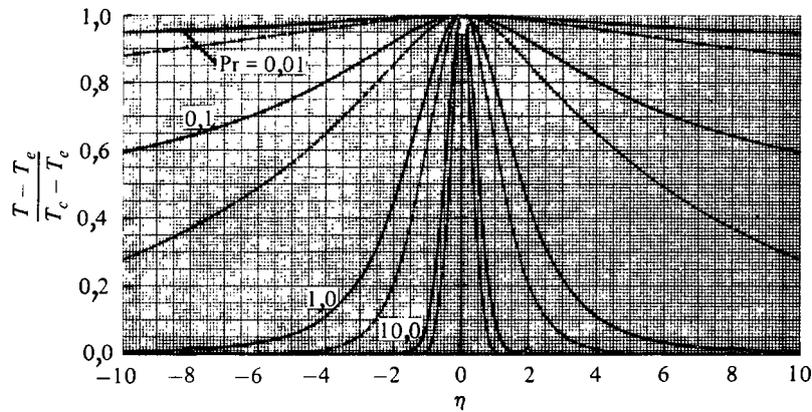


Рис. 8.3. Влияние числа Прандтля на профили температуры ламинарных струй.
 --- плоские струи; --- осесимметричные струи.

профиль скорости осесимметричной струи (задача 8.1). На рис. 8.3 представлены соответствующие профили температур плоской и осесимметричной струй при разных значениях числа Прандтля. Отметим, что результаты, полученные для плоских и осесимметричных струй, нельзя непосредственно сравнивать, так как величина η зависит от выбранного значения δ . Нельзя сравнивать и скорости роста величин, так как для осесимметричных струй $\delta \approx x$, а для плоских $\delta \approx x^{2/3}$. В случае круглой струи, истекающей из отверстия диаметром d_0 с постоянной скоростью u_0 , $d\delta/dx = 3,27(u_0 d_0/\nu)^{-1}$. Если профили для двумерного и осесимметричного течений перестроить так, чтобы они совпадали, например при $u/u_c = 0,5$, то окажется, что с ростом η скорость в осесимметричной струе стремится к нулю медленнее, чем в плоской струе. Действительно, из уравнения (8.28) следует, что в случае плоской струи $f' \equiv u/u_c$ с ростом η стремится к нулю как $\exp(-\eta/\sqrt{2})$, а из решения для осесимметричной струи (задача 8.1) видно что $u/u_c \sim \eta^{-4}$ при больших η . При $Pr = 1$ профили скорости и температуры на рис. 8.3 совпадают. Как обычно, при $Pr < 1$ профили температуры расходятся шире, а при $Pr > 1$ становятся уже. При малых числах Прандтля профили температуры в круглой струе гораздо шире, чем в плоской, иначе говоря, тенденция, присущая профилям скорости, в случае профилей температуры выражена гораздо сильнее.

Неавтономные течения

Как и в случае преобразования Фолкнера — Скэн для пристенных течений, преобразование, выраженное уравнениями (8.11) и (8.12), с учетом выражений (8.29а) и (8.29б) приведенное к виду

$$\eta \equiv \frac{y}{\delta} = \frac{y}{x^{2/3}} \left(\frac{J/\rho}{12\sqrt{2}\nu^2} \right)^{1/3}, \quad \psi = \left(\frac{9\sqrt{2}}{8} \frac{J}{\rho} \nu x \right)^{1/3} f(\eta), \quad (8.33)$$

можно использовать для плоских неавтономных течений, предположив, что безразмерная функция тока зависит от x . Так как

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \left[\frac{3}{32} \frac{(J/\rho)^2}{\nu} \right]^{1/3} \frac{f'}{x^{1/3}},$$

а $(J/\rho)^2/\nu$ имеет размерность куба скорости, умноженного на длину, то для удобства примем, что этот член равен $u_0^3 L$ (где u_0 — скорость истечения струи из отверстия, а L — характерная длина) и будем пользоваться этим выражением. Это означает, что для согласования вида преобразований для плоских и осесимметричных струй постоянную $(12\sqrt{2})^{1/3}$ в уравнении (8.33) надо заменить на 3, а постоянную $(9\sqrt{2}/8)^{1/3}$ — на единицу, т. е. по сути дела просто изменить масштабы переменных. В результате выражения (8.33) примут вид

$$\eta = \sqrt{\frac{u_0}{\nu L}} \frac{y}{3\xi^{2/3}}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \psi = \sqrt{u_0 \nu L} \xi^{1/3} f(\xi, \eta). \quad (8.34)$$

Подставив эти выражения для переменных в уравнения (8.2) и (8.3) и считая, что g зависит от ξ , можно записать преобразованные уравнения движения и энергии для плоских неавтономных течений в виде

$$f''' + (f')^2 + ff'' = 3\xi \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right), \quad (8.35)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} g'' + (fg)' = 3\xi \left(f' \frac{\partial g}{\partial \xi} - g' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right). \quad (8.36)$$

В случае автономных течений эти уравнения сводятся к уравнениям (8.22) и (8.24).

В то время как для автономных ламинарных струйных течений решения уравнений движения и энергии нетрудно найти аналитически, решения для неавтономных течений можно получить лишь с помощью численных методов.

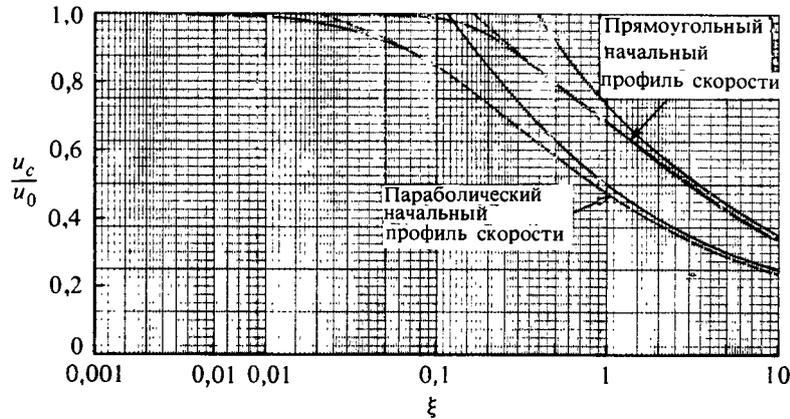


Рис. 8.4. Зависимость безразмерной скорости на оси струи u_c/u_0 от безразмерного расстояния от среза сопла $\xi (= x/h)$.

—— автомодельное решение при эффективном начале струи на срезе сопла; ---- автомодельное решение при эффективном начале струи в точке $\xi_v = -0,222$ для начального прямоугольного профиля; h — полуширина канала.

На рис. 8.4 показана зависимость безразмерной скорости течения на оси струи u_c/u_0 от безразмерного расстояния ξ для автомодельного течения на большом удалении от среза щелевого сопла; там же приведены кривые зависимости u_c/u_0 от ξ для неавтомодельного течения с реальными условиями на срезе сопла при $x = 0$. Эти результаты получены в работе [1] путем решения уравнения (8.35) при граничных условиях (8.18) с использованием программы, составленной на языке Фортран, для ламинарного режима течения, аналогичной описанной в разд. 14.3. Начальные профили скорости на выходе из сопла задавались двумя разными выражениями. Первое соответствовало параболическому профилю скорости, определяемому уравнением (P5.4), использованным при решении задачи 5.3, а второе — прямоугольному профилю скорости, который аппроксимируется выражением, аналогичным (4.129):

$$\frac{u}{u_c} = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{th} \beta \left(\frac{y}{h} - \zeta_c \right) \right]. \tag{8.37}$$

Здесь β и ζ_c — постоянные, значения которых задаются. На рис. 8.5 сравниваются точный и приближенный профили. Видно, что, приняв $\zeta_c = 1$ и, например, $\beta = 20$, можно аппроксимировать уравнением (8.37) прямоугольный профиль скорости с учетом тонкого пограничного слоя, развивающегося на стенке сопла.

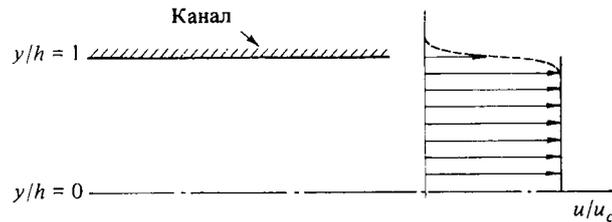


Рис. 8.5. Профили скорости на выходе из канала.

— прямоугольный профиль; --- сглаженный профиль, соответствующий уравнению (8.37) при $\zeta_c = 1$ и $\beta = 20$.

На рис. 8.4 представлены также автомодельные решения, полученные расчетом по уравнению (8.29b) для случаев, когда эффективное начало струи находится на срезе сопла и когда оно получено построением автомодельного решения для $(u_c/u_0)^{-3}$ в зависимости от ξ с последующей его экстраполяцией до точки, в которой ордината обращается в нуль. Лей и Симмонс нашли, что эффективное начало струи в случае параболического начального профиля скорости расположено при $\xi \equiv \xi_v = -0,088$, а в случае прямоугольного — при $\xi_v = -0,222$. Автомодельное решение для струй, эффективное начало которых определено указанным способом, показывает, что в действительности течение становится автомодельным раньше, чем дает расчет в предположении, что начало струи совпадает со срезом сопла. Согласно результатам, полученным при смещенном начале струи, течение становится автомодельным при $\xi = 0,07$, если начальный профиль скорости — параболический, и при $\xi = 0,3$, если этот профиль — прямоугольный.

8.2. Ламинарный слой смешения между двумя однородными потоками, имеющими разные температуры

Автомодельные решения уравнений движения и энергии для ламинарного слоя смешения между двумя однородными потоками, имеющими скорости u_1 и u_2 и (постоянные) температуры T_1 и T_2 (рис. 8.6), можно получить теми же методами, которые применялись при изучении плоских ламинарных струй, однако автомодельные переменные при этом будут другими. Слой смешения, рассматриваемый в этом разделе, описывается, как и прежде, основными уравнениями (8.1)—(8.5), однако граничные условия (8.6) должны

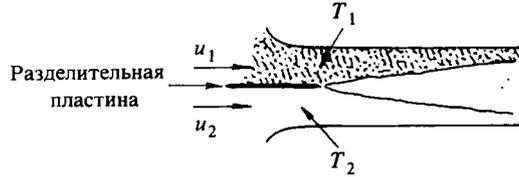


Рис. 8.6. Тепловой слой смешения.

быть заменены условиями

$$y = \infty, \quad u = u_1, \quad T = T_1; \quad y = -\infty, \quad u = u_2, \quad T = T_2. \quad (8.38)$$

Возможны случаи, когда скорость одного из однородных потоков равна нулю. Если воспользоваться определением функции тока ψ и связать ее с безразмерной функцией тока f соотношением

$$\psi(x, y) = u_1 \delta(x) f(\eta), \quad (8.39)$$

где, как обычно, множитель $u_1 \delta(x)$ имеет размерность скорости, умноженной на характерный размер (ширину) слоя, то получим

$$u = u_1 f', \quad v = u_1 \frac{d\delta}{dx} (f'\eta - f), \quad (8.40)$$

где $\eta = y/\delta(x)$. В рассматриваемом случае линия $y = 0$, на которой $v = 0$, вообще говоря, не параллельна разделительной пластине, препятствующей смешению потоков при $x < 0$. Положение профиля скорости в поперечном направлении определяется граничными условиями, налагаемыми внешним потоком. Если верхняя граница потока, движущегося с большей скоростью, представляет собой твердую поверхность, параллельную разделительной пластине, то при больших положительных значениях y (когда $f' = 1$) $v = 0$ и, следовательно, $f = \eta$ при больших η . Определив безразмерную температуру как

$$g(\eta) = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} \quad (8.41)$$

и пользуясь определениями η и безразмерной функции тока, заданной выражением (8.39), а также применяя правило дифференцирования сложных функций, можем записать уравнения движения и

энергии в виде

$$u_1^2 \frac{d\delta}{dx} ff'' = -\frac{1}{\rho} \tau', \quad (8.42)$$

$$(T_1 - T_2) \delta u_1 \frac{d\delta}{dx} fg' = \frac{1}{\rho c_p} \dot{q}', \quad (8.43)$$

а граничные условия в виде

$$\eta = \eta_e, \quad f' = 1, \quad g = 1; \quad \eta = -\eta_e, \quad f' = \frac{u_2}{u_1} \equiv \lambda, \quad g = 0, \quad (8.44a).$$

$$\eta = 0, \quad f = 0 \text{ или } f' = \frac{1}{2}(1 + \lambda). \quad (8.44b)$$

Уравнения (8.42) и (8.43), в которых τ и \dot{q} определяются уравнениями (8.4) и (8.5), можно применять для расчета как ламинарных, так и турбулентных течений. В случае ламинарных течений они имеют вид

$$f''' + \frac{u_1 \delta}{\nu} \frac{d\delta}{dx} ff'' = 0, \quad (8.45)$$

$$g'' + \frac{u_1 \delta}{\nu} \frac{d\delta}{dx} \text{Pr} fg' = 0. \quad (8.46)$$

Анализируя выписанные выше уравнения, видим, что они имеют автомодельные решения при

$$\frac{u_1 \delta}{\nu} \frac{d\delta}{dx} = \text{const.}$$

Приняв константу равной $1/2$, чтобы определить δ (см. комментарии к уравнению (8.21)), получим

$$\delta = \left(\frac{\nu x}{u_1} \right)^{1/2}, \quad (8.47)$$

а уравнения (8.45) и (8.46) тогда примут вид

$$f''' + \frac{1}{2} ff'' = 0. \quad (8.48)$$

$$g'' + \frac{1}{2} \text{Pr} fg' = 0. \quad (8.49)$$

Решения в замкнутом виде системы уравнений (8.44), (8.48) и (8.49) неизвестны. Поэтому решения, показанные на рис. 8.7 и 8.8, были получены численным методом, который описан в разд. 14.4 для случая, когда на оси струи $f = 0$.

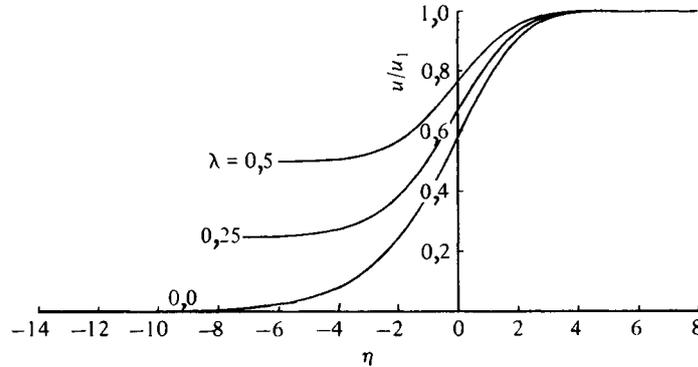


Рис. 8.7. Профили скорости для случая смешения двух однородных ламинарных потоков с разными скоростями, $\lambda = u_2/u_1$.

На рис. 8.7 представлены профили скорости при $\lambda \equiv u_2/u_1 = 0; 0,25$ и $0,5$. Видим, что скорость роста u/u_1 убывает с увеличением λ , причем этот эффект заметнее при малых скоростях. На рис. 8.8 показаны профили температуры при разных значениях числа Прандтля и $\lambda = 0$. Хорошо видно, что величина числа Прандтля оказывает большое влияние на решение. Интересно, что температура на оси слоя смешения (при $\eta = 0$) и его ширина сильно зависят от значения числа Прандтля. Это объясняется тем, что постоянство энтальпии означает, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} u(T - T_2) dy$ должен

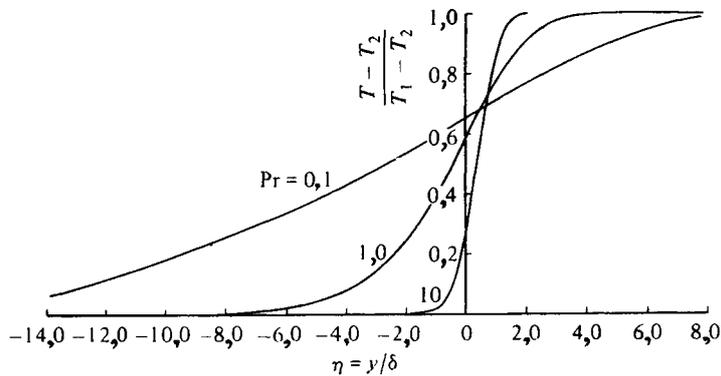


Рис. 8.8. Профили температуры для слоя смешения при разных значениях числа Прандтля, $\lambda = 0$.

При $Pr = 1$ профиль скорости u/u_e совпадает с профилем температуры.

иметь постоянное значение, равное его значению при $x = 0$, а именно $\int_0^{\infty} u_1(T_1 - T_2)dy$. Поэтому, если температура падает на большем расстоянии в положительном направлении оси η , где u имеет большие значения, то должно иметь место соответствующее увеличение температуры в диапазоне средних значений u , поскольку диапазон малых u дает незначительный вклад в значение указанного интеграла.

8.3. Плоские турбулентные струи

Инженерам часто приходится иметь дело с нагретыми турбулентными струями. В разд. 8.1, посвященном ламинарным струям, был рассмотрен простейший случай плоской нагретой турбулентной струи, истекающей в покоящийся воздух с постоянной по объему температурой. Там же была исследована возможность существования автомодельного решения.

Уравнения (8.16) и (8.17) применимы как к ламинарным, так и турбулентным струям. В случае турбулентных струй вклад ламинарных сдвиговых напряжений и теплового потока в величины τ и \dot{q} , определяемые соответственно уравнениями (8.4) и (8.5), мал (так же как за пределами ламинарного подслоя в рассмотренных выше пристенных течениях), и им можно пренебречь. Предполагая, что сдвиговые напряжения и плотность теплового потока в турбулентном течении можно представить через автомодельные переменные как

$$\frac{\tau}{\rho} = -\overline{u'v'} = u_c^2 G(\eta), \quad (8.50)$$

$$-\frac{\dot{q}}{\rho c_p} = -\overline{v'T'} = u_c (T_c - T_e) H(\eta), \quad (8.51)$$

где $\eta = y/\delta$, можно записать уравнения (8.16) и (8.17) в следующем виде:

$$\frac{1}{2} \frac{d\delta}{dx} [(f')^2 + ff''] + G' = 0, \quad (8.52)$$

$$\frac{\delta}{T_c - T_e} \frac{d}{dx} (T_c - T_e)(fg)' - H' = 0. \quad (8.53)$$

Условие автомодельности требует, чтобы коэффициенты $d\delta/dx$ и

$$\frac{\delta}{T_c - T_e} \frac{d}{dx} (T_c - T_e)$$

были постоянными, так как при этом

$$\delta \sim x, \quad T_c - T_e \sim x^s, \quad (8.54a)$$

где s — постоянная. Из определения M (8.15) следует, что

$$u_c \sim x^{-1/2}. \quad (8.54b)$$

Мы получили степенные законы для скорости роста, скорости течения на оси слоя смешения и скорости падения температуры, не вводя какой-либо модели турбулентности, однако, чтобы проинтегрировать уравнения (8.52) и (8.53) при граничных условиях (8.6), необходимо иметь соотношения между f' и G' и между g и H' . Если воспользоваться понятиями турбулентной вязкости и турбулентного числа Прандтля и принять

$$\frac{\tau}{\rho} = \varepsilon_m \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon_m \frac{u_c}{\delta} f'' = u_c^2 G(\eta), \quad (8.55)$$

$$-\frac{\dot{q}}{\rho c_p} = \varepsilon_h \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\varepsilon_m}{Pr_t} (T_c - T_e) \frac{g'}{\delta} = u_e (T_c - T_e) H(\eta), \quad (8.56)$$

а также предположить, что ε_m и Pr_t слабо зависят от η , то уравнения (8.52) и (8.53) можно привести к виду

$$\frac{u_c \delta}{2\varepsilon_m} \frac{d\delta}{dx} [(f')^2 + ff''] + f''' = 0, \quad (8.57)$$

$$\frac{Pr_t}{\varepsilon_m} \frac{u_c \delta^2}{T_c - T_e} \frac{d}{dx} (T_c - T_e) (fg)' - g'' = 0. \quad (8.58)$$

Если определить δ как расстояние от оси струи, на котором $u/u_c = 0,5$, то из экспериментальных данных [2] следует

$$\varepsilon_m = 0,037 u_c \delta. \quad (8.59)$$

Представив первое из соотношений (8.54a) в виде

$$\delta = Ax, \quad (8.60a)$$

с помощью выражения (8.59) получим для коэффициента в уравнении (8.57)

$$\frac{u_c \delta}{2\varepsilon_m} \frac{d\delta}{dx} = \text{const} = \frac{A}{2(0,037)} = c_1. \quad (8.60b)$$

При этом уравнение (8.57) имеет автомодельное решение, и его можно переписать в виде

$$f''' + c_1 [(f')^2 + ff''] = 0. \quad (8.61)$$

Проинтегрировав это уравнение трижды, сначала при граничных условиях $f' = f'' = 0$ при $\eta = \eta_e$, а затем при условии $f' = 1$, $f = 0$ при $\eta = 0$, получим решение

$$f = \sqrt{\frac{2}{c_1}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{c_1}{2}} \eta. \quad (8.62)$$

Приняв $f' \equiv u/u_c = 0,5$ при $y = \delta$, т. е. при $\eta = 1$, получим $c_1 = 1,5523$. Тогда из выражения (8.60b) следует, что $A = 0,115$, и автомодельное решение для профиля безразмерной скорости в плоской турбулентной струе приобретает вид

$$f' = \frac{u}{u_c} = \operatorname{sch}^2 0,881\eta, \quad (8.63)$$

а безразмерная функция тока f — вид

$$f = 1,135 \operatorname{th} 0,881\eta, \quad (8.64)$$

Соответственно для ширины струи из выражения (8.60a) получаем

$$\delta = 0,115x. \quad (8.65)$$

Теперь, как и в случае ламинарных течений, подставим уравнение (8.63) в уравнение (8.13) и после интегрирования получим

$$u_c = 2,40 \sqrt{\frac{J/\rho}{x}}. \quad (8.66)$$

Это позволяет представить массовый расход m в виде

$$\dot{m} = 0,625 \sqrt{\rho J x}. \quad (8.67)$$

Чтобы получить автомодельное решение уравнения энергии (8.58), введем обозначение

$$\frac{\operatorname{Pr}_t}{\epsilon_m} \frac{u_c \delta^2}{T_c - T_e} \frac{d}{dx} (T_c - T_e) = \operatorname{const} = -C \operatorname{Pr}_t, \quad (8.68)$$

и перепишем уравнение (8.58) в виде

$$g'' + C \operatorname{Pr}_t (fg)' = 0. \quad (8.69)$$

Полагая $C = c_1 = 1,5523$, проинтегрируем (8.69) и получим

$$g' + c_1 \operatorname{Pr}_t fg = c_2. \quad (8.70)$$

Замечая, что в соответствии с граничными условиями для g на оси струи $c_2 = 0$, и используя выражение (8.64) для f , проинтегрируем уравнение (8.70) еще раз и найдем

$$g = \frac{T - T_e}{T_c - T_e} = \frac{c_3}{[\operatorname{ch} 0,881\eta]^{2\operatorname{Pr}_t}} = c_3 [\operatorname{sch} 0,881\eta]^{2\operatorname{Pr}_t}, \quad (8.71)$$

где $c_3 = 1$, поскольку $g(0) = 1$.

При $\operatorname{Pr}_t = 1$ профили скорости и температуры, определяемые соответственно уравнениями (8.63) и (8.71), очевидно, совпадают. Кроме того, поскольку считается, что турбулентная вязкость не зависит от y , они совпадают по форме и с профилями для ламинарных струй, определяемыми уравнениями (8.28) и (8.30). Однако так как турбулентная вязкость ϵ_m зависит от x , то расширение турбулентной струи в зависимости от расстояния от ее начала происходит по другому закону, а именно пропорционально x , в то время как ламинарные струи расширяются пропорционально $x^{2/3}$.

8.4. Турбулентный слой смешения между двумя однородными потоками, имеющими разные температуры

На практике часто встречаются турбулентные слои смешения между двумя потоками с разными, но постоянными для каждого потока скоростями и температурами. В обоих случаях знать массоперенос (т. е. закономерности смешения жидкостей) не менее важно, чем уметь определять тепловые потоки, поскольку оба процесса протекают одновременно, например при сгорании газообразного горючего в газообразном окислителе.

Вспомним, что уравнение (8.42) и (8.43) справедливы как для ламинарных, так и для турбулентных слоев смешения между двумя однородными потоками жидкости с температурой T_1 и T_2 соответственно. В случае турбулентных течений вклад ламинарного переноса тепла и массы мал, и им можно пренебречь. Если, как и ранее, воспользоваться понятиями турбулентной вязкости, турбулентной температуропроводности и турбулентного числа Прандтля и принять

$$-\overline{u'v'} = \epsilon_m \frac{\partial u}{\partial y} = \epsilon_m \frac{u_1}{\delta} f'', \quad (8.72a)$$

$$-\overline{T'v'} = \epsilon_h \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\epsilon_m}{\operatorname{Pr}_t} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\epsilon_m}{\operatorname{Pr}_t} \frac{T_0}{\delta} g'', \quad (8.72b)$$

где $T_0 = T_1 - T_2$, то уравнения (8.45) и (8.46) можно представить в виде

$$f''' + \frac{u_1 \delta}{\epsilon_m} \frac{d\delta}{dx} ff'' = 0, \quad (8.73)$$

$$g'' + \text{Pr}_t \frac{u_1 \delta}{\epsilon_m} \frac{d\delta}{dx} fg' = 0. \quad (8.74)$$

Чтобы поле скоростей было автомодельным, надо, чтобы

$$\frac{u_1 \delta}{\epsilon_m} \frac{d\delta}{dx} = \text{const}. \quad (8.75)$$

Если турбулентное число Прандтля Pr_t также постоянно, то при этом условии автомодельны одновременно и поле скоростей, и поле температур. Приняв постоянную в уравнении (8.75) равной, как и в случае ламинарных течений, $1/2$, т. е. конкретизировав величину δ в зависимости от ширины профиля скорости, приведем уравнения (8.73) и (8.74) к виду

$$f''' + \frac{1}{2} ff'' = 0, \quad (8.76)$$

$$g'' + \frac{1}{2} \text{Pr}_t fg' = 0. \quad (8.77)$$

Как и в случае струи, эти уравнения, удовлетворяющие граничным условиям (8.44), идентичны уравнениям (8.48) и (8.49) для ламинарных течений, если заменить в них Pr_t на Pr . Действительно, если принять Pr_t равным, например, 0,9, то профиль скорости ламинарного течения при $\text{Pr} = 0,9$ будет таким же, как турбулентного течения; как всегда, при $\text{Pr}_t = 1,0$ профили скорости и температуры совпадают.

Различие решений уравнений (8.45) и (8.76) объясняется различием в определении δ . Для ламинарных течений величина δ определяется выражением (8.47), а для турбулентных — решением уравнения (8.75), в которое надо подставить выражение для ϵ_m . Известно несколько таких выражений. Здесь воспользуемся тем из них, которое предложил Прандтль. Считая, что $\epsilon_m \sim \delta$, будем исходить из того, что величина ϵ_m определяется масштабами скоростей и длины слоя смешения

$$\epsilon_m = \kappa_1 \delta (u_{\max} - u_{\min}) = \kappa_1 \delta (u_1 - u_2), \quad (8.78)$$

где κ_1 — эмпирический коэффициент, номинально зависящий от u , но обычно полагаемый постоянным.

Если допустить, что $-\overline{u'v'} = u_1^2 H(\eta)$, то из соображений подобия следует, что δ пропорциональна x . Напомним, что в ламинарном течении она пропорциональна $x^{1/2}$. Обозначив δ через Cx , можно переписать уравнение (8.78) в виде

$$\epsilon_m = Cx u_1 (1 - \lambda), \quad (8.79)$$

где $C = \kappa_1 c$. Чтобы придать нашим формулам вид, в котором они обычно встречаются в литературе, воспользуемся параметром δ , введенным Гёртлером в виде

$$\sigma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + \lambda}{(1 - \lambda)C}}.$$

Выразив через параметр σ постоянную C , получим

$$C = \frac{(1 + \lambda)}{4\sigma^2(1 - \lambda)}. \quad (8.80)$$

Подставив это выражение в уравнение (8.79), а затем в уравнение (8.75) и приняв постоянную в уравнении (8.75) равной $1/2$, найдем

$$\delta = \frac{x}{\sigma} \sqrt{\frac{1 + \lambda}{8}}. \quad (8.81)$$

С помощью этого выражения для δ можно получить решения уравнений (8.76) и (8.77) в виде зависимостей $f' (\equiv u/u_1)$ и $g' [\equiv (T - T_2)/(T_1 - T_2)]$ от

$$\eta = \frac{y}{x} \sigma \sqrt{\frac{8}{1 + \lambda}} \quad (8.82)$$

при заданном значении λ . Параметр Гёртлера σ , представляющий собой числовую константу, определяется экспериментально. Для турбулентной «полуструи» т. е. слоя смешения в покоящемся воздухе, когда $\lambda = 0$, эксперименты дают для σ значения, заключенные в основном между 11 и 13,5. Для слоев смешения с произвольным отношением скоростей λ в работах Абрамовича [3] и Сэбина [4] предлагается формула

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \right), \quad (8.83)$$

рекомендуемая для течений как с нулевым, так и с отличным от нуля градиентом давления. Как должно быть ясно читателю, в уравнении (8.83) через σ_0 обозначено значение σ для «полуструи» при $\lambda = 0$. Позднее было подтверждено, что выражение (8.83) хорошо аппроксимирует экспериментальные данные [5].

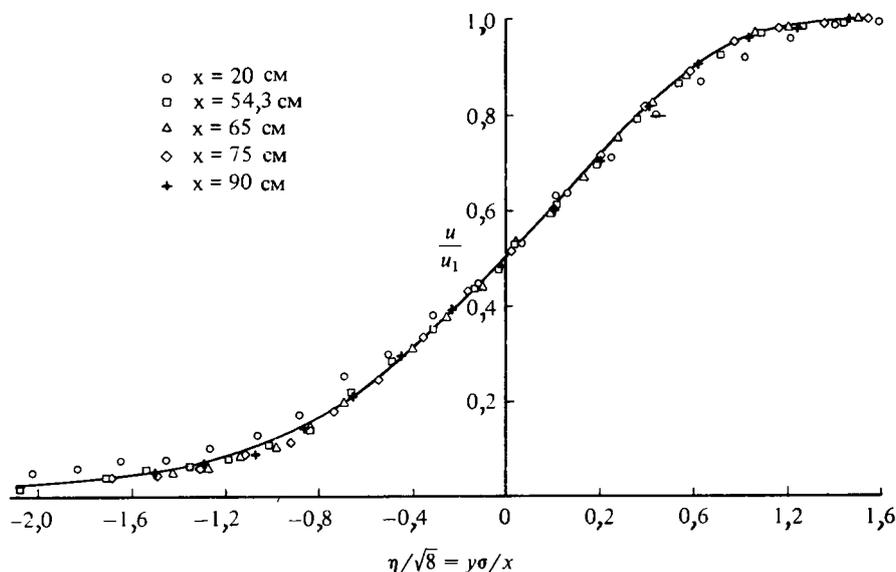


Рис. 8.9. Сравнение численных решений уравнения (8.76) для турбулентного слоя смешения (сплошная линия) с экспериментальными данными работы [6] для «полуструи» при $\sigma \sim 12$.

На рис. 8.9 численные решения уравнения (8.76) сравниваются с экспериментальными данными работы [6] для полуструи при $\sigma = 12,0$ и $y = 0$ при $u/u_1 = 0,5$.

Экспериментальных данных для тепловых слоев смешения мало, однако они позволяют предположить, что турбулентное число Прандтля равно примерно 0,5. Это не обязательно означает, что температурный профиль шире динамического, а просто указывает на различие их форм. Однако, чтобы обеспечить хорошее согласие с экспериментом периферийных участков профилей, придется, вероятно, учитывать зависимость Pr_t от y .

8.5. Сопряженные течения

Выше уже были определены сопряженные течения как течения, в которых изменения плотности или вязкости, обусловленные изменениями температуры, ведут к изменению поля скоростей, которое в свою очередь оказывает влияние на поле температур. Результаты качественного анализа не меняются, если температуру заменить концентрацией того или иного компонента, а количественные раз-

личия между результатами исследования изменений концентраций в смесях жидкостей и изменений поля температур однородной жидкости малы.

В случае медленных течений теплопроводных жидкостей изменения плотности почти полностью определяются изменениями температуры, поскольку изменения давления в медленных течениях по определению пренебрежимо малы по сравнению с абсолютным давлением, и следовательно, в соответствии с уравнением состояния газа изменение давления может привести лишь к незначительным изменениям абсолютной температуры. Изменения плотности по толщине сдвигового слоя слабо влияют на характер течения независимо от того, ламинарное оно или турбулентное. Изменение абсолютной плотности на 10% в типичных случаях приводит к изменению скорости расширения слоя смещения на 1%, хотя эта величина, конечно, зависит от вида течения. То же справедливо и для изменений вязкости. Вязкость μ газов примерно пропорциональна абсолютной температуре, в то время как вязкость μ жидкостей быстро *убывает* с ростом температуры (при практически неизменной плотности). Поэтому даже небольшие изменения температуры могут сильно повлиять на характер ламинарных течений в жидкостях.

В случае высокоскоростных ламинарных течений наблюдается дополнительный эффект — изменения давления вызывают равные по порядку величины изменения плотности. Непосредственное влияние продольного градиента давления на ускорение потока, как правило, гораздо сильнее его косвенного влияния на изменение плотности жидкости. Поэтому, как и в случае медленных течений, сопряженность через изменения плотности или вязкости порождает эффекты, которые необходимо учитывать при количественном анализе, но которые в то же время не приводят к резким изменениям характера течения. Исключением из этого правила является формирование ударных волн в сверхзвуковых течениях. Это явление не характерно для сдвиговых слоев, и поэтому описывающие его уравнения в этой книге не рассматриваются. Однако взаимодействие ударных волн с ламинарными сдвиговыми слоями обсуждается в разд. 10.3 и 10.4, а в разд. 11.5 полученные результаты распространяются на случай турбулентных течений.

При изучении высокоскоростных турбулентных течений встает вопрос, достаточно ли велики по сравнению с абсолютными значениями *пульсации* температуры и давления, сопровождающие пульсации скорости и в свою очередь влияющие на поле скоростей и через него — на перенос количества движения и энтальпии. В гл. 3

было показано, что влияние пульсаций плотности на величину членов уравнений, описывающих осредненное течение, мало, но при изучении пограничных слоев пренебрегать им, по-видимому, нельзя. В действительности оно замаскировано влиянием пульсаций средней плотности. При числах Маха менее 5 влияние пульсаций давления в пограничных слоях, по-видимому, еще меньше, но с ростом числа Маха оно быстро возрастает.

Слой смешения между двумя параллельными потоками превосходно иллюстрирует две основные особенности сопряженных течений: малое или даже пренебрежимо малое влияние изменений и пульсаций средней плотности и сильное влияние пульсаций давления при очень больших числах Маха, являющееся единственным серьезным различием между медленными и высокоскоростными сопряженными течениями. Поэтому ниже подробнее рассмотрены турбулентные слои смешения.

Медленные течения

Интерпретация экспериментальных данных, полученных при исследовании свободных турбулентных сдвиговых слоев в средах, сильно отличающихся по плотности, затруднена влиянием начальных условий и отсутствием течений, которые можно было бы считать «полностью развитыми». Конечно, в случае слоя смешения на границе двух потоков с разными плотностями и неодинаковыми дозвуковыми скоростями трудно указать даже, как будет меняться скорость расширения слоя в зависимости от отношения плотностей. Наиболее широкий диапазон отношения скоростей охватывают эксперименты Брауна и Рошко [7], в которых отношение плотности потока с меньшей скоростью ρ_2 к скорости потока с большей скоростью ρ_1 изменялось в пределах от 7 до 1/7. В первом случае скорость расширения слоя смешения составляла 0,75 той же величины для слоя смешения с постоянной плотностью, а во втором была примерно в 1,35 раза больше, чем при постоянной плотности. Другие опыты, проведенные в более узких диапазонах отношений плотностей, труднее поддаются интерпретации, однако ясно, что в большинстве практически важных случаев, таких как смешение воздуха с газообразным углеводородным горючим, отношение плотностей достаточно близко к единице, так что можно пренебречь изменением скорости расширения слоя смешения. Более того, влияние отношения плотностей на относительное изменение скорости расширения в зависимости от величины отношения u_2/u_1 также мало.

В случае когда струя жидкости истекает в пространство, заполненное жидкостью с другой плотностью, отношение плотностей всегда стремится к единице на расстояниях, соответствующих полному развитию струи (при $x/d \approx 20$), и изменением скорости ее расширения в зависимости от отношения плотностей можно пренебречь. Случай медленных течений в следах с существенной разностью плотностей не имеет большого практического значения, за исключением восходящих течений в океане, о которых, по-видимому, нет никаких данных.

Высокоскоростные течения

Скорость расширения слоя смешения очень сильно зависит от числа Маха. Большая часть имеющихся экспериментальных данных относится к случаю, когда полные температуры обоих потоков равны и, следовательно, отношения температур и плотностей однозначно связаны с числами Маха обоих потоков. В наиболее часто встречающемся случае слоя смешения между однородным потоком и покоящимся воздухом ($u_2 = 0$) отношение плотностей определяется выражением

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{1 + (\gamma - 1) M_1^2 / 2}, \quad (8.84)$$

где M_1 — число Маха однородного потока. Обычно в качестве меры скорости расширения слоя смешения используют параметр Гёртлера σ , связанный со стандартным отклонением «функции ошибки», которая достаточно хорошо аппроксимирует профили скоростей при любых числах Маха. На рис. 8.10 приведены данные из работы [8], дополненные более поздними результатами. Харви и Хантер [11] выполнили измерения при числе Маха 19 и показали, что при этом параметр расширения σ имеет значение около 50 и, следовательно, кривая зависимости σ от M за пределами диапазона чисел M , представленного на рис. 8.10, быстро стремится к горизонтальной асимптоте. Однако данные, представленные на рис. 8.10, имеют значительный разброс, обусловленный главным образом влиянием начальных условий, например образованием ударных волн в случае, когда давление на срезе сверхзвукового сопла не равно атмосферному. В тех случаях, когда давление на срезе сопла сильно отличается от атмосферного, образующиеся в струе скачки уплотнения и (или) волны разрежения (рис. 10.9) оказывают сильное влияние на скорость расширения слоя смешения.

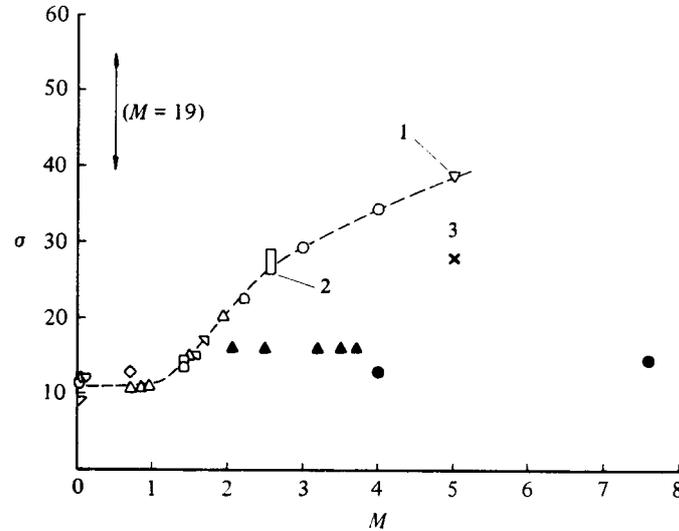


Рис. 8.10. Зависимость σ от числа Маха для случая взаимодействия потока с покоящейся жидкостью.

1 — новые данные LaRC; 2 — данные из работы [9]; 3 — данные из работы [10]; остальные обозначения приведены в работе [8].

Из уравнения (8.84) следует, что отношение плотностей на границах слоя смешения при числе Маха 5 равно примерно 7 и соответствует случаю медленных потоков, изученных Брауном и Рошко, которые обнаружили увеличение скорости расширения слоя смешения приблизительно на 35%, в то время как данные, приведенные на рис. 8.10, указывают на *уменьшение* этой величины почти втрое. Очевидно, при больших числах Маха сжимаемость оказывает сильное влияние как на турбулентность, так и на средний градиент плотности. Нетрудно показать, что при одном и том же среднем числе Маха его *пульсации* в слое смешения гораздо больше, чем в пограничном слое. Типичные пульсации скорости можно выразить через сдвиговые напряжения, представив характерную максимальную среднеквадратичную пульсацию скорости в виде

$$\sqrt{\frac{\tau_m}{\rho}},$$

где τ_m — максимальное сдвиговое напряжение в слое. Поскольку квадрат скорости звука a^2 равен $\gamma p/\rho$, то число Маха, рассчитанное по указанной характерной пульсации скорости и местной скорости звука можно выразить через число Маха внешнего потока и коэф-

коэффициент сдвиговых напряжений, рассчитанный по параметрам потока

$$M_1 \sqrt{\frac{\tau_m}{\rho_1 u_1^2}}.$$

Здесь выражение под корнем для слоя смешения при малых скоростях потоков равно по порядку величины 0,01, а для пограничного слоя при нулевом градиенте давления (когда касательное напряжение достигает максимума на стенке) оно равно $c_f/2$, т. е. имеет порядок 0,001. Таким образом, при заданном числе Маха набегающего потока его пульсации в слое смешения примерно втрое больше, чем в пограничном слое. (Этот вывод справедлив для малых чисел Маха. С ростом числа Маха коэффициент поверхностного трения в пограничном слое убывает и, как показано выше, также уменьшаются скорость расширения и интенсивность турбулентности в слое смешения. Поэтому указанное трехкратное соотношение примерно сохраняется.) Это позволяет предположить, что при числе Маха 1 влияние сжимаемости на турбулентность в слое смешения так же сильно, как в пограничном слое при числе Маха 3. Справедливость этого предположения подтверждается тем, что тенденция к убыванию скорости расширения слоя смешения начинает проявляться лишь при числах Маха больше 1, а модели турбулентности, не учитывающие в явном виде влияние сжимаемости, дают хорошие результаты при описании пограничных слоев при числах Маха по меньшей мере до 3. Предположение, что существенное влияние сжимаемости на турбулентность может проявляться в пограничных слоях при числах Маха более 3, затеняется влиянием очень больших тепловых потоков, развивающихся при гиперзвуковых скоростях, и тем обстоятельством, что толщина вязкого подслоя в гиперзвуковых пограничных слоях резко возрастает.

Убедительных объяснений такого влияния сжимаемости не существует. Однако ясно, что оно как-то связано с пульсациями давления, поскольку большие различия в плотности слабо влияют на течение при малых скоростях. Пульсации давления в турбулентном течении равны по порядку величины произведению плотности на среднеквадратичную пульсацию скорости, которая, как показано выше, в свою очередь по порядку величины равна напряжению сдвига. Действительно, отношение максимального напряжения сдвига к абсолютному давлению с точностью до множителя γ равно квадрату пульсации числа Маха, выражение для которой получено выше. Поскольку среднеквадратичная пульсация числа Маха в слое смешения составляет примерно 0,1 числа Маха внешнего пото-

ка, то отношение среднеквадратичной пульсации давления к абсолютному давлению, по-видимому, равно $1/4$ при $M = 5$. Совсем необязательно, чтобы столь большие пульсации давления вызывались бы ударными волнами, хотя последние возможно и имеются; точно так же необязательно предполагать, что главной причиной уменьшения скорости расширения с ростом числа Маха являются возрастающие потери кинетической энергии турбулентного движения вследствие излучения акустических волн («вихревых волн Маха»), хотя они и могут играть некоторую роль. Известно, что с пульсациями давления связаны возникновение и исчезновение сдвиговых напряжений в турбулентных течениях и что характер этого влияния меняется, когда пульсации давления становятся сравнимыми с абсолютным давлением. Однако такой подход к изучению роли пульсаций давления не позволяет объяснить, почему скорость расширения слоя смешения с ростом числа Маха должна *убывать*.

В струях и следах число Маха, рассчитанное по максимальной разности скоростей между сдвиговым слоем и внешним потоком, по мере смешения вниз по потоку быстро убывает, а отношение плотностей стремится к единице. Как и в случае низкоскоростных струй и следов со значительными разностями плотностей, трудно выяснить общее влияние сжимаемости на скорость расширения независимо от начальных условий. Большой интерес представляют следы за осесимметричными телами, движущимися с высокими скоростями, так как эта задача связана с проблемой обнаружения ракет на участке входа в атмосферу. В этом случае важнейшими переменными являются температура и плотность электронов в частично ионизованном газе. Данные о следах при умеренных числах Маха набегающего потока приводятся в работах [12, 13].

Задачи

8.1. Как и в случае плоской струи, в уравнении движения осесимметричной струи, истекающей в затопленное пространство, можно пренебречь членом, содержащим градиент давления. Дифференциальные уравнения, описывающие ламинарную струю нагретого газа, легко вывести из уравнений (3.15)—(3.17) и представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(ur) + \frac{\partial}{\partial r}(vr) = 0, \quad (\text{P8.1})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (\text{P8.2})$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (\text{P8.3})$$

Эти уравнения решаются при граничных условиях, вытекающих из симметрии течения относительно оси $r = 0$

$$r = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (\text{P8.4a})$$

и при следующих условиях на бесконечности:

$$r \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_e. \quad (\text{P8.4b})$$

Помимо указанных уравнений, воспользуемся условием постоянства количества движения J и теплового потока K в направлении оси x . Тогда

$$J = 2\pi\rho \int_0^\infty u^2 r dr = \text{const}, \quad (\text{P8.5})$$

$$K = 2\pi\rho c_p \int_0^\infty ur(T - T_e) dr = \text{const}. \quad (\text{P8.6})$$

В уравнении (P8.6) величина K равна произведению начального массового расхода на среднюю энтальпию газа в плоскости отверстия, через которое истекает струя.

а. Воспользовавшись методом, описанным в разд. 4.1, показать, что автомодельная переменная η и безразмерная функция тока, входящие в уравнения движения и неразрывности, имеют вид

$$\eta = \frac{r}{x}, \quad f(\eta) = \frac{\psi}{x}. \quad (\text{P8.7})$$

Обратите внимание, что здесь выражение для $f(\eta)$ некорректно с точки зрения размерности. Этот недостаток можно исправить, записав данное выражение в виде

$$\psi = \nu x f(\eta). \quad (\text{P8.8})$$

б. Из определений η и функции тока

$$ru = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad rv = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

воспользовавшись уравнением (P8.8), показать, что

$$\frac{u}{u_c} = \frac{1}{(u_c x / \nu)} \frac{f'}{\eta}. \quad (\text{P8.9})$$

Обратите внимание, что правая часть уравнения (P8.9) не зависит от x , так как

$$u_c x = \text{const}. \quad (\text{P8.10})$$

Поэтому η можно представить в виде

$$\eta = \left(\frac{u_c x}{\nu} \right)^{1/2} \frac{r}{x}. \quad (\text{P8.11})$$

в. Воспользовавшись преобразованием, определяемым уравнениями (P8.8) и (P8.11), и правилом дифференцирования сложных функций, показать, что

уравнения (P8.1)—(P8.4) можно записать в виде

$$\left[\eta \left(\frac{f'}{\eta} \right)' \right]' + f \left(\frac{f'}{\eta} \right)' + \frac{(f')^2}{\eta} = 0, \quad (\text{P8.12})$$

$$\left(\frac{\eta}{\text{Pr}} G' + fG \right)' = 0, \quad (\text{P8.13})$$

$$\eta = 0, \quad f = G' = 0, \quad f'' = 0 \quad (\text{P8.14a})$$

$$\eta = \eta_e, \quad f' = G = 0, \quad (\text{P8.14b})$$

где

$$G(\eta) = \frac{T - T_e}{T_c - T_e}.$$

г. Учитывая, что

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{f'(\eta)}{\eta} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} f''(\eta) \rightarrow 0, \quad (\text{P8.15})$$

показать, что решения уравнения (P8.12) при условии $f(0) = 0$ имеют вид

$$f(\eta) = \frac{1/2\eta^2}{1 + 1/8\eta^2}, \quad (\text{P8.16})$$

$$\frac{f'(\eta)}{\eta} = \frac{1}{[1 + 1/8\eta^2]^2}. \quad (\text{P8.17})$$

д. Используя $f(\eta)$, определяемую из условий (P8.15), показать, что решение уравнения (P8.13) при граничных условиях (P8.14) имеет вид

$$G = \frac{1}{[1 + \eta^2/8]^2 \text{Pr}}. \quad (\text{P8.18})$$

- 8.2. Вычислить u_c , δ/h , \dot{m}/ρ для плоской ламинарной струи, истекающей в покоящийся воздух из канала шириной 10 см. Коэффициент кинематической вязкости ν равен $1,5 \times 10^{-5}$ м²/с. Профиль скорости в канале параболический

$$u = u_{\max} \left[1 - (y/h)^2 \right]$$

или прямоугольный

$$u = u_{\max} = \text{const.}$$

В обоих случаях $u_{\max} = 0,5$ м/с.

- 8.3. Показать, что избыточная температура $T_c - T_e$ на оси нагретой плоской турбулентной струи, истекающей в неподвижный воздух, изменяется пропорционально $x^{-1/2}$.
- 8.4. Линеаризовать уравнение движения для слоя смешения на границе двух ламинарных потоков, скорости которых почти равны ($u_1 - u_2 \ll u_1$). Найти его решение и профиль скорости, проанализировать связь свободного сдвигового

- слоя с внешним течением, определить сдвиговое напряжение на разделяющей линии тока. Полученное решение сравнить с результатами численных решений, представленных на рис. 8.7 для случаев $u_2/u_1 = 0$ и $u_2/u_1 = 0,5$.
- 8.5 Проинтегрировать уравнение (8.31) при малых значениях числа Прандтля $Pr(-0)$ и при $Pr = 0,5$; вывести выражения для разности температур на оси плоской ламинарной струи и в окружающей среде, аналогичные уравнению (8.32b), которое было выведено для случая $Pr = 1,0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lai J.C.S., Simmons J.M., Numerical solution of periodically pulsed laminar free jets, *AIAA J.*, **19**, 813 (1981). [Имеется перевод: Лей, Симмонс. Численные методы расчета пульсирующих ламинарных струй. — Ракетная техника и космонавтика, 1981, № 8, с. 163.]
2. Schlichting H., *Boundary-Layer Theory*, McGraw, N.Y., 1981. [Имеется перевод с пятого немецкого издания, исправленного по шестому (американскому) изданию: Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974.]
3. Абрамович Г.Н. Теория турбулентных струй. — М.: Физматгиз, 1960.
4. Sabin C.M., An analytical and experimental study of the plane, incompressible, turbulent free-shear layer with arbitrary velocity ratio and pressure gradient, *J. Basic Eng.*, **87**, 421 (1965). [Имеется перевод: Сэбин. Аналитическое и экспериментальное исследование плоского несжимаемого турбулентного слоя смешения с произвольным отношением скоростей и градиентом давлений. — Труды Америк. о-ва инж.-мех., сер. D, Теоретические основы инженерных расчетов, 1965, № 2, с. 182.]
5. Pui N.K., Gartshore I.S., Measurement of the growth rate and structure in plane turbulent mixing layers, *J. Fluid Mech.*, **91**, 111 (1979).
6. Liepmann H.W., Laufer J., Investigations of free turbulent mixing, NACA TN 1257, 1947.
7. Brown G.L., Roshko A., On density effects and large structure in turbulent mixing layers, *J. Fluid Mech.*, **64**, 775 (1974).
8. Birch S.F., Eggers J.M., A critical review of the experimental data for developed free turbulent shear layers, in *Free Turbulent Shear Flows*, NASA SP-321, 1972, p. 11.
9. Ikawa H., Kubota T., Investigation of supersonic turbulent mixing layer with zero pressure gradient, *AIAA J.*, **13**, 566 (1975). [Имеется перевод: Икава, Кубота. Исследование сверхзвукового турбулентного слоя смешения с нулевым градиентом давления. — Ракетная техника и космонавтика, 1975, № 5, с. 28.]
10. Wagner R.D., Mean flow and turbulence measurements in a Mach 5 free shear layer, NASA TN D-7366, 1973.
11. Harvey W.D., Hunter W.W., Experimental study of a free turbulent shear flow at Mach 19 with electron-beam and conventional probes, NASA TN D-7981, 1975.
12. Demetriades A., Turbulence measurements in a supersonic two-dimensional wake, *Phys. Fluids*, **13**, 1672 (1970).
13. Demetriades A., Turbulence correlations in a compressible wake, *J. Fluid Mech.*, **74**, 251 (1976).

Плавучесть проявляется при любых движениях жидкостей переменной плотности в поле тяготения. Ее роль возрастает с ростом градиента плотности и определяется величиной числа Ричардсона, которое в простейшей форме записывается следующим образом:

$$Ri = \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{gh}{u^2}. \quad (9.1)$$

Здесь $\Delta\rho$ — разность плотностей жидкости в точках, разделенных характерным расстоянием h , которое обычно отсчитывается в вертикальном направлении, а u — скорость течения. При числе Ричардсона, стремящемся к нулю, влияние плавучести исчезает. Из выражения (9.1) следует, что роль плавучести велика либо при больших $\Delta\rho/\rho$, как в случае маломасштабных факелов, либо при больших gh/u^2 , характерных для геофизических явлений глобальных масштабов. Течения, развивающиеся только под действием выталкивающих сил, называются *естественной*, или *свободной*, конвекцией; в отличие от них *вынужденная* конвекция обусловлена главным образом перепадами давления, но подвержена также влиянию выталкивающих сил. Течения с выталкивающими силами, встречающиеся в природе и технике, очень разнообразны и подробно рассматриваются, например в работе [1]. Простейшими примерами естественной конвекции являются плоские факелы, образующиеся над длинными горизонтальными нагретыми предметами, и плоские пограничные слои на вертикальных пластинах с нагретой нижней кромкой. Причиной возникновения плоских факелов могут быть линейные источники тепла, такие как фронт лесного пожара. Аналогичным образом осесимметричный факел в покоящемся воздухе может образоваться над точечным источником тепла; в этом случае он ведет себя как круглая струя.

Очень часто течение определяется совместным действием естественной и вынужденной конвекции. Поведение нагретых струй или диффузионных пламен, образующихся при истечении горючих газов из вертикальной трубы, на начальном участке определяется вынужденной конвекцией, а на больших расстояниях от среза

трубы — выталкивающими силами. Дыму, истекающему из труб промышленных предприятий, обычно сообщается значительный начальный импульс, чтобы выбросить как можно дальше вверх загрязняющие вещества; точно так же отработавшие воды химических предприятий и электростанций сбрасываются в реки с достаточно большой начальной скоростью, чтобы они успели достичь центральной части потока до того, как выталкивающие силы вынесут вредные примеси на поверхность или, наоборот, заставят их осесть на дно. Примеры таких течений рассматриваются в разд. 9.2—9.4, а более простые случаи пограничных слоев с естественной конвекцией и свободные сдвиговые слои — в разд. 9.1 и 9.5 соответственно.

Выталкивающие силы играют большую роль в тех случаях, когда разность температур подстилающей поверхности (суши или моря) и воздуха может послужить причиной образования течений, обладающих сложной структурой; не менее важны они в замкнутых пространствах, таких как вентилируемые и отапливаемые комнаты или внутреннее пространство реактора. Расчет таких течений выходит за рамки этой книги, однако изложенные в ней методы позволяют рассчитывать существенные компоненты сложных течений, например течение около секции радиатора комнатного обогревателя и над ним, а также могут послужить отправной точкой для анализа более сложных течений. Следует иметь в виду, что в некоторых случаях, например в слое жидкости между двумя горизонтальными пластинами, из которых нижняя имеет более высокую температуру, в жидкости могут образоваться ячеистые структуры, расчет которых особенно труден.

Уравнения, описывающие естественную, или свободную, конвекцию в плоских ламинарных течениях ньютоновских жидкостей, представляют собой частный случай общих уравнений движения жидкостей и переноса тепла в них. В случаях факелов и течений около поверхности вертикальных пластин, которые достаточно хорошо описываются уравнениями пограничного слоя, они отличаются от уравнений вынужденной конвекции только членом для объемной силы. Направив ось x вертикально вверх, можно записать уравнение движения в приближении тонкого сдвигового слоя в следующем виде:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \rho g . \quad (9.2)$$

Здесь объемная сила f_x , введенная в общем виде в уравнение (3.32), равна $-g$, члены, описывающие турбулентную составляющую те-

чения, отброшены, а показатель K для плоского течения принят равным нулю.

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0, \quad (9.3)$$

а уравнение энергии (энтальпии) (3.24) упрощается и в случае ламинарного течения приобретает форму

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (9.4)$$

Если сдвиговые напряжения отсутствуют, а течение жидкости установившееся, то уравнение (9.2) сводится к

$$\frac{dp}{dx} = -\rho g. \quad (9.5)$$

Обозначив плотность жидкости за пределами нагретого слоя через ρ_e и учитывая сделанное выше допущение о постоянстве давления в тонком сдвиговом слое и его равенстве давлению в жидкости за пределами этого слоя, dp/dx в уравнении (9.2) можем заменить на $-\rho_e g$. Тогда получим

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - g(\rho - \rho_e). \quad (9.6)$$

Если же жидкость за пределами сдвигового слоя движется ускоренно, то вычитая так называемый гидростатический градиент давления $-\rho_e g$ из полного градиента давления (при этом действие выталкивающей силы полностью определяется членом $-g(\rho - \rho_e)$), уравнение (9.6) можно записать в виде

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - g(\rho - \rho_e). \quad (9.7)$$

В дальнейшем под «давлением», обозначаемым символом p , будем понимать давление в жидкости за *вычетом* гидростатического давления. Тогда в покоящейся жидкости $dp/dx = 0$.

Если плотность жидкости меняется в узких пределах, то можно воспользоваться *приближением Буссинеска* и принять в выписанных выше уравнениях $\rho = \rho_e$ всюду, за исключением члена, описывающего выталкивающую силу, который принимает вид

$$\rho - \rho_e = -\rho_e \beta (T - T_e). \quad (9.8)$$

Здесь T_e — температура окружающей среды, а β — коэффициент теплового объемного расширения жидкости, определяемый выражением

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p. \quad (9.9)$$

Для идеального газа $\beta = 1/T$. Отметим, что выражение (9.8) справедливо, когда давление в нагретом слое равно давлению за его пределами (при этом условие малости dp/dx не является обязательным). Если $T - T_e$ мало, то можно считать, что $\mu = \mu_e$ и $k = k_e$.

Воспользовавшись выражением (9.8), представим уравнение (9.7) в более общем виде

$$\rho_e \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{dp}{dx} + \mu_e \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho_e g \beta (T - T_e) + \rho_e \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{u'v'}), \quad (9.10)$$

пригодном для описания турбулентных течений. Для несжимаемой жидкости уравнение (9.3) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (9.11)$$

а уравнение энергии (9.4) — вид

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k_e}{\rho_e c_{p_e}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{T'v'}).$$

Опустив индекс e и введя число Прандтля, последнее уравнение можно представить в виде

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{T'v'}). \quad (9.12)$$

При нулевом градиенте давления, воспользовавшись выражением $\nu_e \equiv \mu_e/\rho_e$ и опустив, как и ранее, индекс e , приведем уравнение (9.10) к виду

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \beta (T - T_e) + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{u'v'}). \quad (9.13)$$

Применим уравнения (9.11)—(9.13) для описания течения жидкости вверх по нагретой вертикальной пластине (рис. 9.1, а). Если поставить вертикально горячий утюг, то можно заметить пылинки, увлекаемые вверх потоком воздуха, движущимся вдоль нагретой плоской рабочей поверхности утюга. На некотором расстоянии от утюга воздух в комнате неподвижен и, следовательно, $u_e = 0$. По-

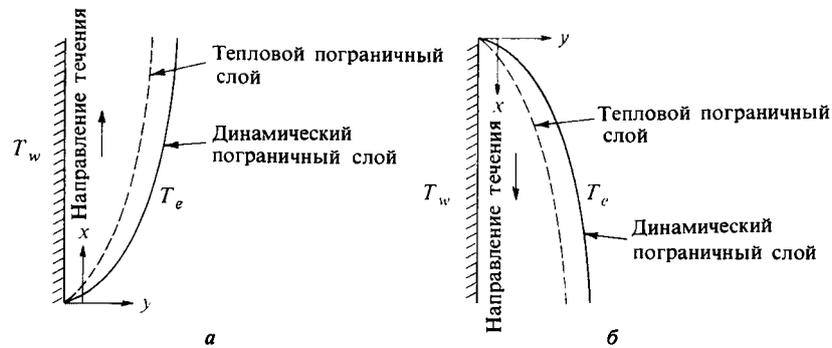


Рис. 9.1. Система координат в случае естественной конвекции около вертикальной поверхности.

а — $T_w > T_e$, б — $T_w < T_e$. (Размеры по оси y завышены.)

граничный слой нарастает в направлении от нижней кромки (передней кромки плоской пластины, $x = 0$) к ее верхней кромке (задней кромке, $x = L$), на которой он отрывается и образует факел. Так как сила, приводящая воздух в движение, определяется членом $\rho_e g \beta (T - T_e)$, то абсолютные скорости течения пропорциональны $T_w - T_e$.

Совершенно очевидно, что течение и процессы теплопереноса, рассмотренные выше, могут иметь место и при наличии градиента давления. Иначе говоря, можно вдуть воздух вверх (или вниз) вдоль поверхности пластины, и этот поток будет действовать в том же или противоположном направлении относительно выталкивающей силы, которая будет соответственно способствовать или противодействовать развитию вынужденной конвекции. Такие течения описываются уравнениями (9.10)—(9.12). В этом случае внешний поток имеет ненулевую скорость u_e , а градиент давления dp/dx в уравнении (9.10) может быть отличен от нуля.

Безразмерные определяющие параметры для рассматриваемых течений можно получить либо методом Тейлора (гл. 6), либо комбинируя соответствующим образом переменные. Для характерной скорости течения получаем

$$u = f(L, T_w - T_e, \nu, \text{Pr}, g\beta) . \quad (9.14)$$

В соответствии с уравнением (9.9) $g\beta$ имеет размерность $L/T^2\theta$, где $[\theta]$ — размерность температуры. Тогда уравнение (9.14) приобрета-

ет вид

$$\frac{u}{\sqrt{g\beta L(T_w - T_e)}} = f \left[\text{Pr}, \frac{L\sqrt{g\beta L(T_w - T_e)}}{\nu} \right], \quad (9.15)$$

где выражение

$$u_c \equiv \sqrt{g\beta L(T_w - T_e)} \quad (9.16)$$

имеет размерность скорости. Поделив u на u_c , получим безразмерную скорость u/u_c и образуем «число Рейнольдса», квадрат которого равен числу Грасгофа

$$\text{Gr}_L = \frac{u_c^2 L^2}{\nu^2} = \frac{g\beta L^3 (T_w - T_e)}{\nu^2}. \quad (9.17)$$

С физической точки зрения скорость, приобретаемая частицами за счет плавучести, есть результат действия выталкивающей силы, приходящейся на единицу массы жидкости, $g\beta(T_w - T_e)$, которая совершает работу на пути L . Под действием этой силы единица массы жидкости приобретает кинетическую энергию, пропорциональную $g\beta L(T_w - T_e)$. При этом скорость естественной конвекции пропорциональна $u_c \equiv \sqrt{g\beta L(T_w - T_e)}$.

Если в потоке жидкости одновременно происходят и вынужденная, и свободная конвекция, то, помимо u_c , существует характерная скорость u_e , а их отношение

$$\frac{\sqrt{g\beta L(T_w - T_e)}}{u_e}$$

является мерой относительного значения двух видов конвекции. Квадрат этого отношения представляет собой число Ричардсона (задача 9.2), которое можно записать следующим образом:

$$\text{Ri} = \frac{u_c^2}{u_e^2} = \frac{\text{Gr}_L}{R_L^2}. \quad (9.18)$$

В следующих разделах этой главы рассматриваются течения, в которых главную роль играет свободная конвекция. Почти все представленные результаты получены численными методами с помощью программы на языке Фортран, описанной в разд. 13.4 и 13.5, а также в гл. 14. Большая часть расчетов выполнена для ламинарного течения. Подобным же образом можно рассчитывать и турбулентные течения, однако модели турбулентности для течений с выталкивающими силами разработаны не столь хорошо, как для более простых течений, рассмотренных в гл. 6—8.

9.1. Пограничные слои с естественной конвекцией

Рассмотрим вертикальную пластину, погруженную в покоящуюся жидкость. Если температура поверхности пластины T_w выше температуры окружающей среды T_e , то жидкость, соприкасающаяся с пластиной, нагреется, ее плотность уменьшится и она начнет подниматься вверх вдоль поверхности пластины. В результате образуются динамический и тепловой пограничные слои (рис. 9.1, а). Аналогичное течение развивается и в случае, когда температура пластины ниже температуры жидкости (рис. 9.1, б).

В этом разделе рассматриваются только установившиеся течения, т. е. такие, при которых температура пластины не меняется со временем. Интересующимся нестационарными задачами рекомендуем обратиться к недавно опубликованной работе [1]. Исследование неустановившихся течений имеет большое практическое значение, поскольку при выделении тепла внутри тела в первые мгновения охлаждение его поверхности происходит лишь за счет теплопроводности, а для развития конвекции, обеспечивающей интенсивный съем тепла, требуется некоторое время, в течение которого тело может перегреться.

Установившиеся плоские ламинарные и турбулентные свободно-конвективные течения при нулевой скорости внешнего потока и малых перепадах температур описываются уравнениями (9.11)—(9.13). Если поверхность тела непроницаемая, то граничные условия имеют вид

$$y = 0, \quad u = v = 0, \quad T = T_w \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = - \frac{\dot{q}_w}{k}, \quad (9.19a)$$

$$y = \delta, \quad u = 0, \quad T = T_e. \quad (9.19b)$$

Как и в случае обычных пограничных слоев с вынужденной конвекцией, рассматриваемых в гл. 4, основные уравнения и граничные условия удобно записать через автомодельные переменные. При исследовании ламинарных течений с выталкивающими силами подходящая автомодельная переменная η и безразмерная функция тока f при заданной температуре стенки (задача 9.3) определяются выражениями

$$\eta = \left[\frac{g\beta(T_w - T_e)}{\nu^2 x} \right]^{1/4} y, \quad \psi = [g\beta(T_w - T_e)\nu^2 x^3]^{1/4} f(x, \eta). \quad (9.20)$$

Здесь предполагается, что f зависит также и от x и, следовательно, указанные переменные могут быть использованы для изучения неавтономных течений.

Как уже отмечалось в гл. 6, пользуясь понятиями турбулентной вязкости и турбулентного числа Прандтля, уравнения движения и энергии для турбулентных течений с выталкивающими силами можно записать в том же виде, что и уравнения для ламинарных течений. Воспользовавшись определениями ε_m (6.1) и Pr_t (6.2) и преобразованием (9.20), уравнения (9.12), (9.13) и (9.19) можно представить в виде

$$(bf'')' + \frac{3}{4}ff'' - \frac{1}{2}(f')^2 + \theta - \frac{1}{2}n[(f')^2 - \frac{1}{2}ff''] = x \left(f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (9.21)$$

$$(e\theta')' + \frac{3}{4}f\theta' + n \left[\frac{1}{4}f\theta' - f'\theta \right] = x \left(f' \frac{\partial \theta}{\partial x} - \theta' \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (9.22)$$

$$\eta = 0, \quad f = f' = 0, \quad \theta = 1, \quad (9.23a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad f' = 0, \quad \theta = 0. \quad (9.23b)$$

Здесь штрихами обозначено дифференцирование по η ,

$$b = 1 + \varepsilon_m^+, \quad e = \frac{1}{\text{Pr}} + \frac{\varepsilon_m^+}{\text{Pr}_t}. \quad (9.24)$$

Параметр θ представляет собой безразмерную температуру, определяемую выражением

$$T = T_e + T_e(\theta)\phi(x) \quad (9.25)$$

(сравните с выражением (4.25) для функции g); $\phi(x)$ определяется выражением

$$\phi(x) = \frac{T_w - T_e}{T_e}, \quad (9.26)$$

а n , как и прежде, — безразмерный градиент температуры, определяемый в виде

$$n = \frac{x}{(T_w - T_e)} \frac{d}{dx} (T_w - T_e). \quad (9.27)$$

В автономных течениях величина n постоянна, а в общем случае пограничных слоев с вынужденной конвекцией зависит от x . Когда тепловой поток на стенке задан, выражения (9.20) принимают вид

$$\eta = \left(\frac{g\beta T_e}{\nu^2 x} \right)^{1/4} y, \quad \psi = (g\beta T_e \nu^2 x^3)^{1/4} f(x, \eta).$$

Соответственно несколько изменяются и уравнения (9.21) и (9.22).

В последующих разделах данной главы рассматриваются решения уравнений (9.21), (9.22) при граничных условиях (9.23) и разных значениях n и Pr , как для ламинарных, так и для турбулентных течений со свободной конвекцией; в последнем случае используется та или иная модель турбулентности.

Ламинарное течение на поверхности вертикальной пластины

Рассматривая ламинарные течения, пренебрежем членами, описывающими рейнольдсовы сдвиговые напряжения и тепловые потоки. Тогда выражения (9.24) примут вид

$$b = 1, \quad e = \frac{1}{\text{Pr}}. \quad (9.28)$$

Как и в случае ламинарного пограничного слоя с вынужденной конвекцией, можно показать, что ламинарный пограничный слой со свободной конвекцией на вертикальной пластине при заданной температуре стенки будет автомодельным, если

$$T_w - T_e = c_2 x^n, \quad (9.29)$$

где c_2 и n — постоянные. Уравнения для автомодельного ламинарного пограничного слоя получим из уравнений (9.21) и (9.22) при граничных условиях (9.23)

$$f''' + \frac{3}{4}ff'' - \frac{1}{2}(f')^2 + \theta - \frac{1}{2}n[(f')^2 - \frac{1}{2}ff''] = 0, \quad (9.30)$$

$$\theta'' + \text{Pr}(\frac{3}{4}f\theta' - nf'\theta + \frac{1}{4}nf\theta') = 0. \quad (9.31)$$

Эти уравнения решались при указанных граничных условиях при разных значениях n и Pr . Здесь начнем с рассмотрения течений при заданной температуре стенки и приведем результаты, полученные численным методом, описанным в гл. 13.

Локальное число Нуссельта Nu_x определяется выражением

$$\text{Nu}_x = \frac{\dot{q}_w}{T_w - T_e} \frac{x}{k} = -\theta'_w \text{Gr}_x^{1/4}, \quad (9.32)$$

где Gr_x — локальное число Грасгофа, рассчитанное по локальной характерной скорости конвективного движения $u_c(x)$ и определяемое выражением

$$\text{Gr}_x = \frac{u_c^2(x)x^2}{\nu^2} \equiv \frac{g\beta x^3(T_w - T_e)}{\nu^2}, \quad (9.33)$$

в котором

$$u_c(x) = \sqrt{g\beta x(T_w - T_e)}. \quad (9.34)$$

Таблица 9.1. Решения уравнений (9.30), (9.31) при граничных условиях (9.23) и постоянной температуре стенки

Pr	$-\theta'_w = \frac{Nu_x}{Gr_x^{1/4}}$	$f''_w = \frac{c_f}{2} \sqrt{Gr_x}$
0,1	0,1637	1,2104
0,72	0,3567	0,9558
1,0	0,4009	0,9081
10	0,8266	0,5930
100	1,5495	0,3564

Аналогичным образом локальный коэффициент поверхностного трения следующим образом выражается через исходные и преобразованные переменные:

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho u_c^2} = \frac{2f''_w}{\sqrt{Gr_x}}. \quad (9.35)$$

В табл. 9.1 представлены результаты решения уравнений движения и энергии при постоянной температуре стенки ($n = 0$) и разных значениях числа Прандтля. Они указывают на сильное влияние числа Прандтля на безразмерный параметр теплового потока на стенке θ'_w и параметр сдвиговых напряжений на стенке f''_w . Данные табл. 9.1 хорошо описываются формулой Ида [2]

$$Nu_x = \frac{3}{4} \left[\frac{2 Pr}{5(1 + 2 Pr^{1/2} + 2 Pr)} \right]^{1/4} (Gr_x Pr)^{1/4}. \quad (9.36)$$

На рис. 9.2 и 9.3 представлены профили безразмерной скорости и температуры. В противоположность случаю вынужденной конвекции в несопряженных течениях, когда профили скорости не зависят от числа Прандтля, в случае естественной конвекции величина числа Прандтля оказывает на них большое влияние. Профили температуры сильно зависят от числа Прандтля в обоих случаях.

Как и в задачах с вынужденной конвекцией, при очень малых значениях числа Прандтля, например $Pr < 0,1$, и при очень больших его значениях, например $Pr > 100$, получать численные решения уравнений (9.30) и (9.31) становится все труднее и труднее. В этих случаях указанные уравнения следует записывать в других преобразованных переменных. Лефевр [3] рассмотрел предельные случаи $Pr \rightarrow 0$ и $Pr \rightarrow \infty$ и показал, что

$$Nu_x = 0,600(Gr_x Pr^2)^{1/4}, \quad Pr \rightarrow 0, \quad (9.37a)$$

$$Nu_x = 0,503(Gr_x Pr)^{1/4}, \quad Pr \rightarrow \infty. \quad (9.37b)$$

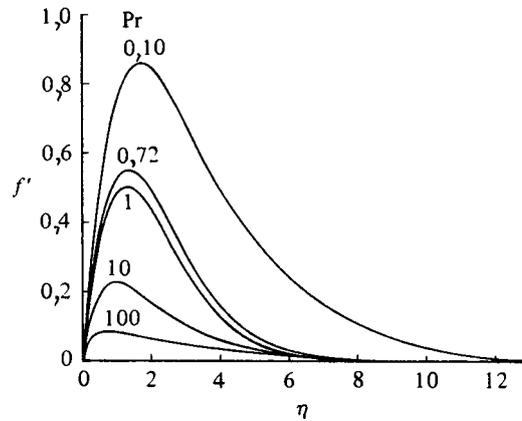


Рис. 9.2. Профили скорости при естественной конвекции в пограничном слое на вертикальной изотермической пластине.

С небольшими модификациями этот метод позволяет найти автомодельные решения уравнений (9.30) и (9.31) для случая заданного теплового потока на стенке. При этом локальное число Нуссельта хорошо аппроксимируется формулой, предложенной в работе [4] (и аналогичной формуле (9.36)):

$$\text{Nu}_x = \left(\frac{\text{Pr}}{4 + 9 \text{Pr}^{1/2} + 10 \text{Pr}} \right)^{1/5} (\text{Gr}_x \text{Pr})^{1/5}, \quad (9.38)$$

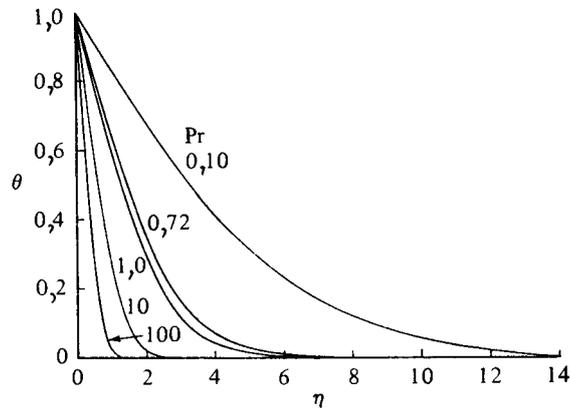


Рис. 9.3. Профили температуры при естественной конвекции в пограничном слое на вертикальной изотермической пластине.

где Gr_x^* — число Грасгофа, рассчитанное по плотности теплового потока:

$$Gr_x^* = \frac{g\beta\dot{q}_w x^4}{k\nu^2}. \quad (9.39)$$

При произвольной зависимости $T_w - T_e$ от x приходится решать неавтономные уравнения (9.21)—(9.23). Здесь приводятся результаты для числа Прандтля $Pr = 1$ и следующих законов изменения n :

$$n = \begin{cases} 1 & 0 \leq \frac{x}{L} \leq 1, \text{ т. е. } T_w - T_e \sim x, \\ 0 & \frac{x}{L} > 1, \text{ т. е. } T_w - T_e = \text{const.} \end{cases} \quad (9.40)$$

Поскольку в диапазоне значений $0 \leq x/L \leq 1$ течение автомодельное, а при $x/L > 1$ неавтономное, то расчет можно начать при $x = 0$ или $x = L$, используя автомодельное решение при $n = 1$, чтобы получить исходные данные для случая $x/L > 1$ или готовые результаты для случая $0 < x/L \leq 1$. При $x/L > 1$ сначала выби-

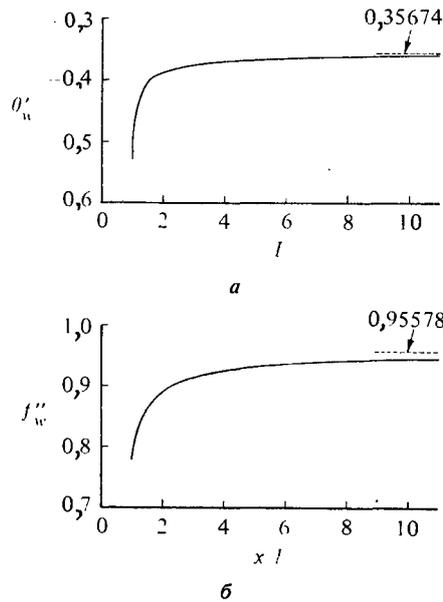


Рис. 9.4. Зависимость безразмерного параметра плотности теплового потока θ_w' (а) и параметра сдвиговых напряжений на стенке f_w'' (б) от x для случая неавтономного ламинарного течения при $Pr = 1$ на поверхности вертикальной пластины, распределение температуры которой задано соотношениями (9.40).

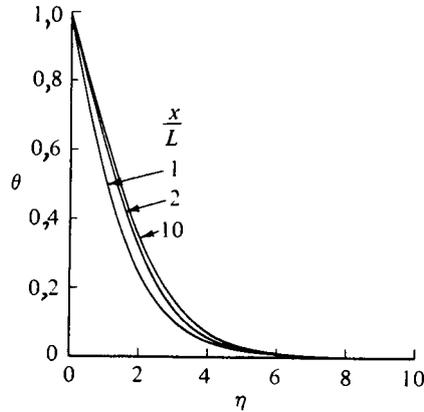


Рис. 9.5. Профили температуры для неавтономного ламинарного течения при $Pr = 1$ на поверхности вертикальной пластины, распределение температуры которой задано уравнениями (9.40).

рался малый шаг по x/L ($\Delta x/L = 0,01$), который сохранялся до $x/L = 2$. При $x/L > 2$ шаг по x/L увеличивался. Результаты расчета, представленные на рис. 9.4, показывают, что безразмерный параметр плотности теплового потока на стенке $\theta'_w (\equiv -Nu_x / Gr_x^{1/4})$ стремится к своему автомоделному значению $-0,35674$ несколько быстрее, чем безразмерный параметр сдвиговых напряжений на стенке $f''_w (\equiv c_f / 2\sqrt{Gr_x})$ стремится к своему автомоделному значению $0,95578$. Однако в обоих случаях автомоделные значения достигаются при $x/L > 10$. На рис. 9.5 представлены профили температуры при разных значениях x/L .

Турбулентное течение на поверхности вертикальной пластины

Пользуясь понятиями турбулентной вязкости и турбулентного числа Прандтля, которые уже применялись для исследования течений без действия выталкивающих сил, можно рассчитывать турбулентные пограничные слои с естественной конвекцией. Как и прежде, для этого можно воспользоваться уравнениями (6.102) и (6.109), полученными на основе понятия турбулентной вязкости, введенного Себиси — Смитом, и выражением для турбулентного числа Прандтля (6.26). Однако трудности, связанные с получением выражения для турбулентной вязкости внешнего течения с использованием выражения для дефекта скорости, наводят на мысль о

возможности использования более удобного выражения

$$(\epsilon_m) = (0,075\delta)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad (9.41)$$

соответствующего $l = 0,075 \delta$, т. е. характерному значению l для пограничных слоев без выталкивающих сил.

Если при численном решении уравнений свободноконвективного течения счет начинается от передней кромки пластины, то, как и в случае течений без выталкивающих сил, необходимо задать положение зоны перехода от ламинарного течения к турбулентному. Для рассматриваемых течений методы определения зоны перехода разработаны хуже, чем для сдвиговых течений на поверхности холодной пластины, однако в общих чертах процедура остается той же. По-видимому, положение начала или конца зоны перехода нельзя определить с помощью единственного параметра, такого как число Грасгофа; для этого необходим еще один параметр, например тепловой поток от твердой поверхности. Положение точки начала перехода в воде или в воздухе в первом приближении определяется соотношением $Gr_x^{1/4} = 500 - 600$. Для воздуха указанная величина с ростом плотности теплового потока \dot{q}_w убывает. Положение точки конца перехода определить весьма сложно; в типичных случаях оно соответствует $Gr_x^{1/4} = 900 - 1300$. Подробнее процесс перехода ламинарного течения в турбулентное рассмотрен в работе [5].

Результаты расчета свободноконвективных турбулентных течений на поверхности вертикальной пластины с постоянной температурой представлены на рис. 9.6—9.8. Расчеты были выполнены Себиси и Хаттабом [6], которые решали уравнения, близкие к уравнениям (9.21) и (9.22), пользуясь моделью турбулентности, определяемой уравнениями (6.26), (6.102) и (9.41). Расчет начинался от передней кромки, вблизи которой течение ламинарное, а переход к турбулентному течению соответствовал заданному значению локального числа Рэлея $Ra_x = Gr_x Pr$. На рис. 9.6, а приведены значения локального числа Нуссельта для ламинарного и турбулентного течений воздуха ($Pr = 0,72$) при числе Рэлея перехода $Ra_x = 6 \times 10^8$. Результаты, представленные на рис. 9.6, б, получены для масла ($Pr = 58,7$) и по характеру мало отличаются от приведенных на рис. 9.6, а. Указанная модель турбулентности позволяет достаточно хорошо предсказать зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея. На рис. 9.7 и 9.8 показаны профили скорости и температуры, причем последние сильно зависят от числа Прандтля.

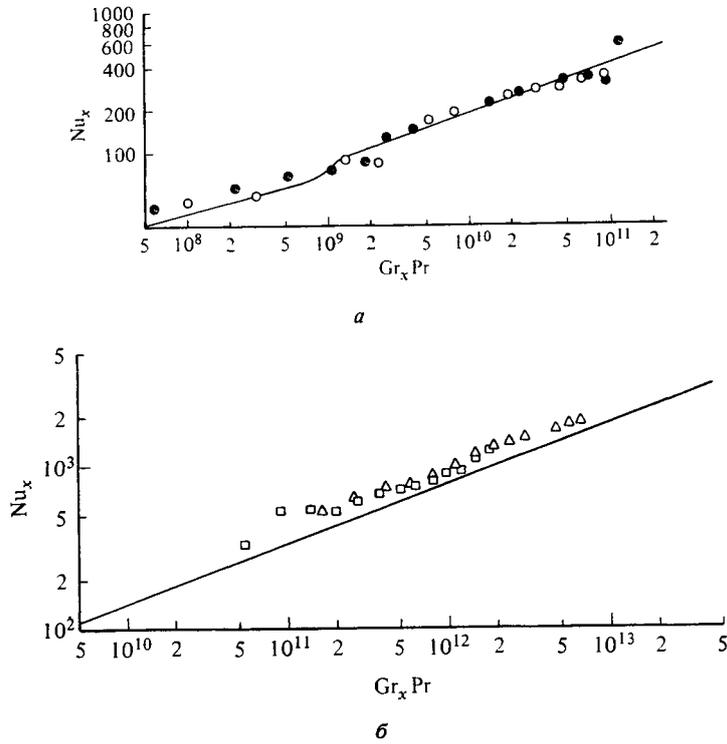


Рис. 9.6. Сравнение результатов расчета локального числа Нуссельта по уравнению (9.32) для ламинарного и турбулентного пограничных слоев с естественной конвекцией на вертикальной пластине в воздухе и в масле.

a — воздух, $Pr = 0,72$; *б* — масло, $Pr = 58,7$; — расчетные зависимости; значками показаны экспериментальные данные из работ [7, 8].

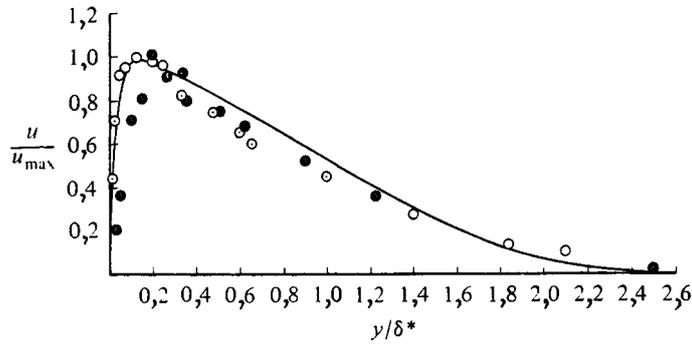


Рис. 9.7. Сравнение расчетного и экспериментальных профилей скорости для турбулентного пограничного слоя с естественной конвекцией на плоской вертикальной пластине при $Pr = 0,72$.

— расчетный профиль; светлыми и темными кружками указаны разные экспериментальные данные.

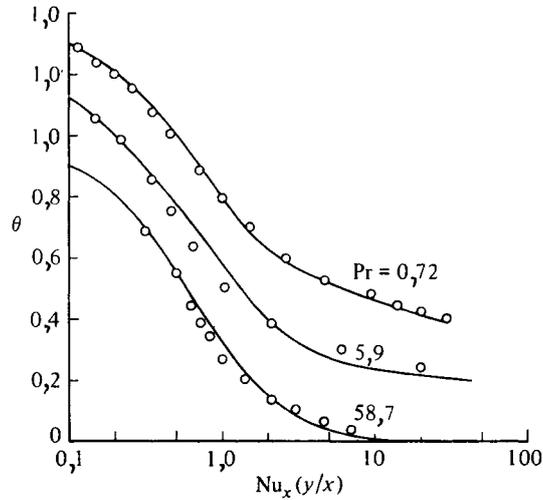


Рис. 9.8. Сравнение расчетных и экспериментальных профилей температуры для турбулентного пограничного слоя с естественной конвекцией на плоской вертикальной пластине.

Как и в случае вынужденной конвекции на поверхности горизонтальной пластины, существует ряд приближенных формул для вычисления локального числа Нуссельта для турбулентных свободноконвективных течений на поверхности вертикальной пластины с постоянной температурой стенки или постоянным тепловым потоком. Для вертикальных пластин с постоянной температурой стенки рекомендуются следующие выражения, полученные путем решения интегральных уравнений движения и энергии [9]:

$$\text{Nu}_x = \begin{cases} 0,10(\text{Gr}_x \text{Pr})^{1/3}, & \text{Pr} = 0,72, \\ 0,060\text{Gr}_x^{1/4}, & \text{Pr} = 0,01. \end{cases} \quad (9.42a)$$

$$(9.42b)$$

Для вертикальных пластин с постоянной по поверхности пластины плотностью теплового потока экспериментальные данные аппроксимируются формулой [10]

$$\text{Nu}_x = 0,568(\text{Gr}_x^* \text{Pr})^{0,22} \quad (9.43)$$

рекомендуемой для диапазона значений $2 \times 10^{13} \leq \text{Gr}_x^* \text{Pr} \leq 10^{16}$, где Gr_x^* определяется выражением (9.39).

Важнейшим фактором, в особенности для газов, является перенос физических свойств сплошных сред. В работе [11] показана

но, что в случае газов, когда $\beta = 1/T_e$, решения, полученные при постоянных физических свойствах среды, можно корректировать, пользуясь понятием *характерной температуры* T_r , которая определяется выражением

$$T_r = T_w - 0,38(T_w - T_e). \quad (9.44)$$

Физические свойства жидких металлов также рекомендуется брать при температуре T_r [11]. Оказалось также, что во многих случаях в качестве характерной можно использовать среднюю температуру слоя, определяемую выражением

$$T_f = \frac{T_w + T_e}{2}.$$

В диапазоне значений

$$0,25 \leq \frac{T_w}{T_e} \leq 4,0 \quad (9.45)$$

соотношение (9.44) дает результаты, которые лишь на 0,6% отличаются от результатов, полученных при постоянных значениях физических характеристик среды, соответствующих температуре слоя. Это позволяет пользоваться температурой слоя в большинстве случаев, когда разность температур в потоке велика. При исследовании течений газов более высокая точность достигается при использовании соотношения для характерной температуры.

Наклонная пластина

Если угол γ между нагретой пластиной и вертикалью составляет менее 45° , то уравнения пограничного слоя для случая свободной конвекции в области над пластиной решаются почти так же, как и для вертикальной пластины. Уравнение движения, аналогичное уравнению (9.10), в проекции на ось x , направленную вдоль поверхности пластины (в приближении пограничного слоя и приближении Буссинеска), имеет вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T - T_e)\cos\gamma - \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}(u'v'), \quad (9.46)$$

а в проекции на ось y (в том же приближении) —

$$g\beta(T - T_e)\sin\gamma = \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (9.47)$$

Уравнения неразрывности и энергии в рассматриваемом случае совпадают с уравнениями (9.11) и (9.12). Анализируя уравнение (9.46), видим, что оно отличается от уравнения (9.13) только тем, что вместо полной выталкивающей силы в него входит ее проекция на ось x и сохранен член, описывающий (полный) градиент давления, который необходимо учитывать при рассмотрении горизонтальных течений (см. ниже). Уравнение (9.47) получено приравнованием действия градиента давления вдоль оси y действию проекции выталкивающей силы на эту же ось.

При малых углах γ , когда пластина расположена почти вертикально, постановка задачи и ее решение практически те же, что и в случае строго вертикальной пластины: единственное отличие состоит в том, что g заменяется на $g \cos \gamma$. Соответственно вместо Gr_x используется $Gr_x \cos \gamma$. Кроме того, предполагается, что тепловые потоки на обеих сторонах пластины одинаковы. Джалурия [1] указывает, что эмпирической формулой для ламинарных течений на вертикальных пластинах

$$Nu_x = 0,55(Gr_x^* Pr)^{0,2} \quad (9.48)$$

можно пользоваться и для расчета параметров на обеих сторонах слегка наклоненной пластины с постоянной по поверхности плотностью теплового потока, однако при этом Gr_x^* следует заменить на $Gr_x^* \cos \gamma$. Для турбулентных течений предложена эмпирическая формула

$$Nu_x = 0,17(Gr_x^* Pr)^{0,25}, \quad (9.49)$$

в которой для верхней поверхности слегка наклоненной нагретой пластины берется то же число Грасгофа Gr_x^* , что и для вертикальной пластины, а для нижней ее поверхности Gr_x^* заменяется на $Gr_x^* \cos^2 \gamma$. Дополнительные рекомендации для расчета течений около пластин, наклоненных под разными углами к вертикали, можно найти в работе [12].

Горизонтальная пластина

Для полубесконечной горизонтальной нагретой пластины (рис. 9.9), обтекаемой горизонтальным потоком жидкости, уравнения движения имеют вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'}, \quad (9.50)$$

$$g\beta(T - T_e) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (9.51)$$

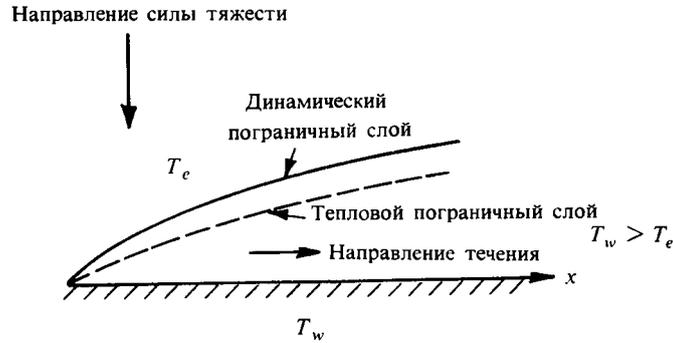


Рис. 9.9. Система координат для пограничного слоя с естественной конвекцией на полубесконечной горизонтальной пластине.

где x — координата, отсчитываемая вдоль поверхности пластины, а выталкивающая сила перпендикулярна направлению течения. Соприкасаясь с верхней поверхностью пластины, жидкость нагревается, расширяется и начинает подниматься вверх. В результате возникает градиент давления по нормали к пластине, и пограничный слой утолщается. То же самое происходит и на нижней поверхности охлаждаемой пластины.

Даже в неподвижном окружающем воздухе под действием выталкивающей силы на поверхности полубесконечной горизонтальной пластины может образоваться пограничный слой. В этом случае уравнение движения для ламинарного течения можно привести к автомодельному виду [13]. Введя переменную $\bar{p} \equiv (p - p_e)/\rho$, перепишем уравнения (9.50), (9.51) в виде

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (9.52)$$

$$g\beta(T - T_e) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}. \quad (9.53)$$

Введем также следующие безразмерные величины и автомодельные переменные:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \frac{T - T_e}{T_w - T_e} = H(\eta),$$

$$\eta = \text{Gr}_L^{1/5} \left(\frac{y}{L} \right) \frac{1}{\xi^{2/5}}, \quad \psi = \xi^{3/5} f(\eta), \quad \bar{p} = \frac{\nu^2}{L^2} \text{Gr}_L^{4/5} \xi^{2/5} G(\eta). \quad (9.54)$$

Используя определение функции тока, получим

$$u = \frac{\nu}{L} \text{Gr}_L^{2/5} \xi^{1/5} f', \quad (9.55a)$$

$$v = -\frac{1}{5} \frac{\nu}{L} \frac{\text{Gr}_L^{1/5}}{\xi^{2/5}} (3f - 2\eta f'). \quad (9.55b)$$

Отметим, что ν/L имеет размерность скорости и ее можно рассматривать как характерную скорость.

После подстановки автомодельных переменных, определяемых выражениями (9.54), уравнения энергии и движения (9.12), (9.52) и (9.53) принимают вид

$$f''' + \frac{3}{5} f f'' - \frac{1}{5} (f')^2 - \frac{2}{5} (G - \eta G') = 0, \quad (9.56)$$

$$G' = H, \quad (9.57)$$

$$H'' + \frac{3}{5} \text{Pr} f H' = 0, \quad (9.58)$$

а граничные условия — вид

$$\eta = 0, \quad f = f' = 0, \quad H = 1, \quad (9.59a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad f = 0, \quad G = H = 0. \quad (9.59b)$$

Основные результаты решения этих уравнений, полученные в работе [14], представлены в табл. 9.2. Число Нуссельта в этом случае было представлено в виде

$$\text{Nu} = \frac{\dot{g}_w}{T_w - T_e} \frac{L}{k} = -\frac{\text{Gr}_L^{1/5}}{\xi^{2/5}} H'(0). \quad (9.60)$$

Как и следовало ожидать, такой пограничный слой с естественной конвекцией очень неустойчив: при больших числах Грасгофа он приобретает ячеистую структуру, образованную продольными

Таблица 9.2. Автомодельные решения уравнений (9.56) — (9.59)

Pr	$f(\eta_e)$	$f''(0)$	$G(0)$	$H'(0)$
0,10	7,04147	2,03014	-3,3648	-0,19681
0,30	3,77414	1,36178	-2,2939	-0,27868
0,50	2,84050	1,12619	-1,9421	-0,32396
0,72	2,33450	0,97998	-1,7290	-0,35909
1,00	1,97860	0,86611	-1,5658	-0,39204
2,00	1,43923	0,66616	-1,2832	-0,46901
5,00	1,00826	0,47366	-1,0134	-0,58816
10,00	0,79423	0,36638	-0,8592	-0,69069

(вытянутыми в направлении оси x) вихрями. Такая структура течения сохраняется и в тех случаях, когда пластина немного наклонена к горизонту. На пластине конечной длины пограничные слои формируются на обеих ее кромках и, сливаясь в середине пластины, превращаются в поднимающийся вертикально вверх факел.

В работе [1] приведен ряд эмпирических формул для горизонтальных пластин конечной длины. Для нагретых нижних поверхностей или охлажденных верхних Мак-Адамс [15] рекомендует формулу

$$\overline{Nu} = 0,27(Gr_L Pr)^{1/4}, \quad 3 \times 10^5 < Gr_L Pr < 3 \times 10^{10}. \quad (9.61)$$

Аналогичное соотношение, предложенное в работе [12], имеет вид

$$\overline{Nu} = 0,58(Gr_L Pr)^{1/5}, \quad 10^6 < Gr_L Pr < 10^{11}. \quad (9.62)$$

Здесь \overline{Nu} — среднее значение числа Нуссельта, определяемое выражением

$$\overline{Nu} = \frac{1}{L} \int_0^L Nu_x dx. \quad (9.63)$$

Для верхней поверхности нагретой горизонтальной пластины в работе [16] предлагаются формулы

$$\overline{Nu} = 0,54(Gr_L Pr)^{1/4}, \quad 10^5 < Gr_L Pr < 2 \times 10^7, \quad (9.64)$$

$$\overline{Nu} = 0,14(Gr_L Pr)^{1/3}, \quad 2 \times 10^7 < Gr_L Pr < 3 \times 10^{10}. \quad (9.65)$$

Отметим, что формула (9.64) справедлива для ламинарного слоя без отрыва, а формула (9.65) совпадает с предложенной в работе [12].

9.2. Пограничные слои со смешанной конвекцией

Перейдем теперь к рассмотрению пограничного слоя с вынужденной конвекцией, формирующегося при наличии выталкивающих сил на вертикальной нагреваемой или охлаждаемой пластине, помещенной в поток жидкости, движущейся снизу вверх.

Если температура пластины выше температуры окружающей среды, то направление действия выталкивающих сил совпадает с направлением набегающего потока; в противоположном случае выталкивающие силы направлены против набегающего потока. И в том, и в другом случае развитие пограничного слоя вблизи передней кромки пластины, где число Рейнольдса мало, определяется силами вязкости, по сравнению с которыми выталкивающие силы

пренебрежимо малы. По мере удаления от передней кромки роль сил вязкости ослабевает и, как будет показано ниже, выталкивающие силы оказывают все большее влияние на развитие пограничного слоя.

Начнем с рассмотрения случая, когда направление действия выталкивающих сил совпадает с направлением набегающего потока. Действие выталкивающих сил на жидкость в пограничном слое, вызывающее ее ускорение, аналогично действию благоприятного (отрицательного) градиента давления. Для простоты ограничимся рассмотрением ламинарного течения при *постоянной* температуре стенки.

Чтобы получить решение основных уравнений, описывающих рассматриваемое течение, начнем с области вблизи передней кромки пластины, воспользовавшись несколько модифицированным преобразованием Фолкнера — Скэн, обсуждавшимся в разд. 4.1. Автомоделную переменную η , функцию тока f и безразмерную температуру θ зададим выражениями, аналогичными (4.19a), (4.19b) и (4.24) или совпадающими с ними. В результате получим

$$\eta = \left(\frac{u_e}{\nu x} \right)^{1/2} y, \quad \theta = \frac{T - T_e}{T_w - T_e}, \quad \psi = (u_e \nu x)^{1/2} f(x, \eta). \quad (9.66a)$$

Взяв число Ричардсона Ri в виде (9.18) и обозначив через L характерный линейный размер, представим безразмерную продольную координату ξ в виде

$$\xi = \left(\frac{x}{L} \right) Ri. \quad (9.66b)$$

Воспользовавшись преобразованиями (9.66) и отбросив члены, содержащие рейнольдсовы напряжения, т. е. рассматривая ламинарное течение, можно привести уравнения (9.12) и (9.13) и их граничные условия, соответствующие

$$y = 0, \quad u = v = 0, \quad T = T_w, \quad (9.67a)$$

$$y = \delta, \quad u = u_e, \quad T = T_e \quad (9.67b)$$

к виду

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = \xi \left(\theta + f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right), \quad (9.68)$$

$$\frac{\theta''}{Pr} + \frac{1}{2} f \theta' = \xi \left(f' \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \theta' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right), \quad (9.69)$$

$$\eta = 0, \quad f = f' = 0, \quad \theta = 1, \quad (9.70a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad f' = 1, \quad \theta = 0. \quad (9.70b)$$

Из уравнения (9.68) следует, что при $\xi = 0$ для рассматриваемого течения справедливо решение Блазиуса (разд. 4.2). Однако с увеличением ξ влияние выталкивающих сил растет, и при больших значениях ξ удобнее пользоваться другими автомодельными переменными, используя в качестве таковых либо автомодельные переменные, применявшиеся при анализе чисто естественной конвекции, либо исходные переменные, перейдя в уравнениях (9.12) и (9.13) к безразмерному расстоянию Y и функции тока $F(\xi, Y)$. Воспользуемся первой возможностью и представим безразмерное расстояние η в направлении оси y и безразмерную функцию тока f в виде, определяемом выражениями (9.20). Чтобы не путать эти переменные с переменными, вошедшими в уравнения (9.66)—(9.70), обозначим безразмерное расстояние в направлении оси y через ζ , а безразмерную функцию тока через $F(\xi, \zeta)$. В этих новых переменных уравнения (9.12) и (9.13) и их граничные условия принимают вид

$$F''' + \frac{3}{4}FF'' - \frac{1}{2}(F')^2 + \theta = \xi \left(F' \frac{\partial F'}{\partial \xi} - F'' \frac{\partial F}{\partial \xi} \right), \quad (9.71)$$

$$\frac{\theta''}{\text{Pr}} + \frac{3}{4}F\theta' = \xi \left(F' \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \theta' \frac{\partial F}{\partial \xi} \right), \quad (9.72)$$

$$\zeta = 0, \quad F = F' = 0, \quad \theta = 1, \quad (9.73a)$$

$$\zeta = \zeta_e, \quad F' = \xi^{-1/2}, \quad \theta = 0, \quad (9.73b)$$

где штрих означает дифференцирование по ζ .

Если набегающий поток направлен против выталкивающих сил, то последние тормозят жидкость в пограничном слое, действуя подобно неблагоприятному (положительному) градиенту давления. В работе [17] показано, что это может привести к отрыву потока. Уравнения (9.68)—(9.73) справедливы и для этого случая, однако плюс перед θ в уравнениях (9.68) и (9.71) следует заменить на минус.

Вновь введем локальное число Нуссельта Nu_x

$$\text{Nu}_x = \frac{\hat{h}x}{k} = \frac{\dot{q}_w}{T_w - T_e} \frac{x}{k}. \quad (9.74a)$$

и с помощью выражений (9.66a) преобразуем его к виду

$$\text{Nu}_x = -\theta'_w \sqrt{R_x}, \quad (9.74b)$$

а воспользовавшись выражениями (9.18) и (9.66b) и введя обозначение $R_L = u_e L / \nu$, получим

$$\text{Nu}_x \frac{\sqrt{\text{Gr}_L}}{R_L^{3/2}} = -\theta'_w \sqrt{\xi}. \quad (9.74c)$$

Подобным же образом локальный коэффициент поверхностного трения, определяемый выражением

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u_e^2}, \quad (9.75a)$$

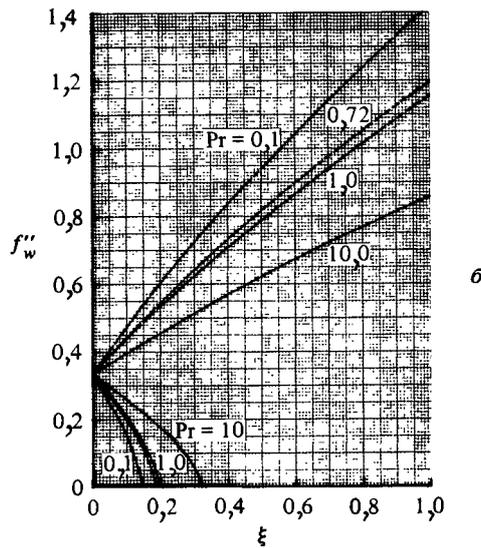
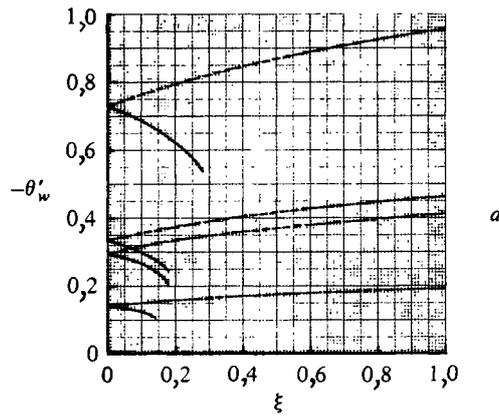


Рис. 9.10. Зависимость параметра плотности теплового потока на стенке $-\theta'_w$ (а) и параметра сдвиговых напряжений на стенке f''_w (б) для вертикальной плоской пластины с естественной и вынужденной конвекцией.

--- охлаждаемая поверхность; --- нагреваемая поверхность.

можно представить в виде

$$c_f \frac{R_L^{3/2}}{\sqrt{Gr_L}} = \frac{2f_w''}{\sqrt{\xi}}. \quad (9.75b)$$

Аналогичные выражения для Nu_x и c_f можно записать через переменные, заданные выражениями (9.20).

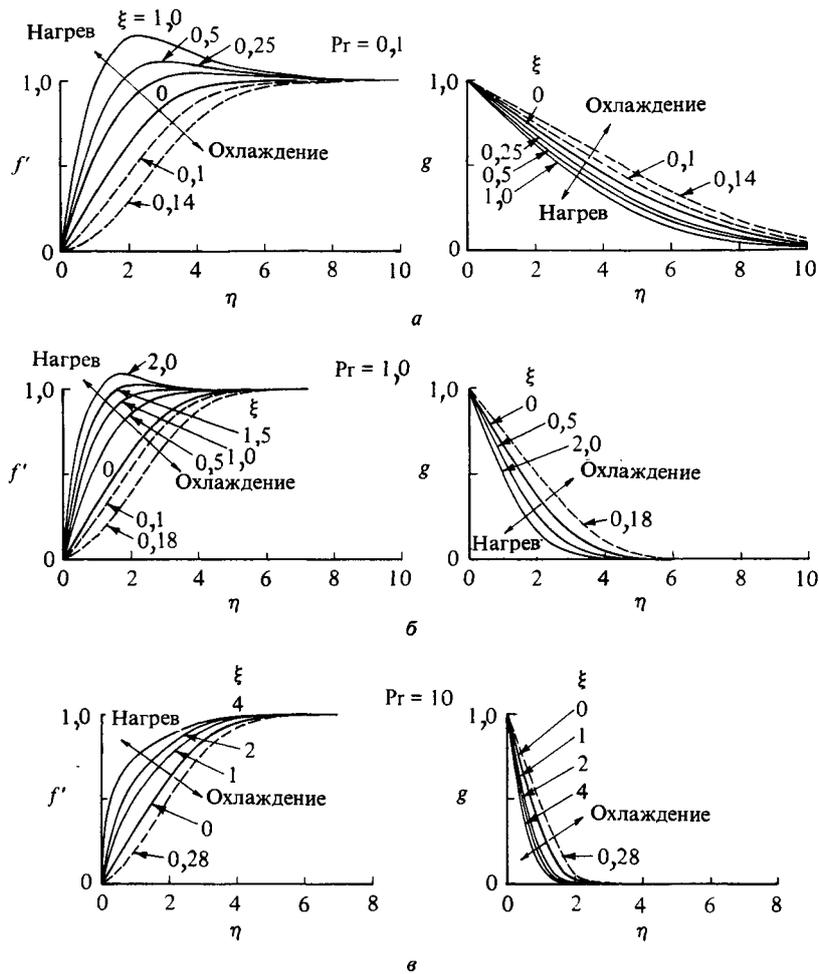


Рис. 9.11. Влияние выталкивающих сил на естественную и вынужденную конвекцию около нагреваемых и охлаждаемых вертикальных плоских поверхностей при разных значениях числа Прандтля Pr .
 а — $Pr = 0,1$; б — $Pr = 1,0$; в — $Pr = 10$.

На рис. 9.10, *a* и *б* показаны зависимости безразмерного параметра плотности теплового потока на стенке $-\theta'_w$ и безразмерного параметра сдвиговых напряжений на стенке f''_w от безразмерного расстояния ξ при разных значениях числа Прандтля. Оба рисунка позволяют сравнивать течения со смешанной конвекцией в случаях, когда температура пластины выше или ниже температуры окружающей жидкости.

Из рис. 9.10, *a* следует, что охлаждение стенки, в результате которого естественная и вынужденная конвекция направлены в противоположные стороны, приводит к отрыву пограничного слоя при некотором значении ξ , которое тем меньше, чем меньше число Прандтля. Так, при уменьшении значения числа Прандтля от 10 до 0,1 точка отрыва смещается вверх по потоку от $\xi = 0,35$ до $\xi = 0,15$. Замечаем, что, хотя, как и ожидалось, параметр f''_w в точке отрыва равен нулю, параметр θ'_w имеет конечное значение и, следовательно, вблизи точки отрыва аналогия Рейнольдса неприменима.

Кроме того, профили скорости и температуры, представленные на рис. 9.11, показывают, что влияние выталкивающих сил весьма велико. При $Pr \leq 1$ оно сказывается так сильно, что скорость жидкости в пограничном слое на поверхности нагретой пластины может превысить скорость внешнего потока ($f' > 1$). При $Pr > 1$ влияние выталкивающих сил на профиль скорости убывает, и скорость течения в пограничном слое всегда меньше скорости потока за его пределами. Отметим также, что с ростом ξ профиль температуры меняется все меньше и меньше.

9.3. Пристенные струи. Завесный нагрев и охлаждение

Пристенные струи уже рассматривались в разд. 4.5 и 6.7. Здесь мы сосредоточим внимание на завесном нагреве вертикальной стенки по схеме, представленной на рис. 9.12. Разности температур при этом таковы, что в уравнении движения в вертикальном направлении приходится учитывать гравитационный член, однако допущение о постоянстве коэффициентов переноса остается приемлемым, и можно пользоваться уравнением (9.8). Для простоты течение будем считать ламинарным. Влияние выталкивающих сил в рассматриваемом случае будет возрастать с увеличением расстояния от среза сопла. Многие бытовые газовые водонагреватели устроены так, что в них газ подается под давлением вдоль вертикальной стенки, на противоположной стороне которой расположены трубки с нагреваемой водой. Смешиваясь с воздухом, газ сгорает, продукты сгорания приобретают высокую температуру и влияние вытал-

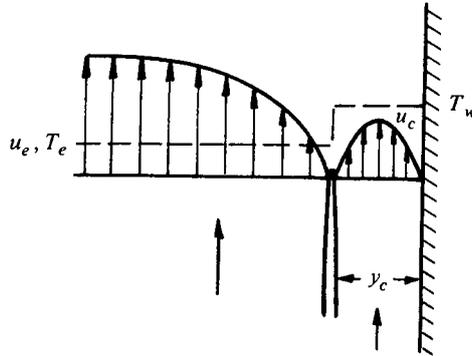


Рис. 9.12. Начальные профили скорости и температуры при наличии пристенной струи на плоской вертикальной пластине.

— профиль скорости; --- профиль температуры. u_c — средняя скорость на выходе из щели.

квивающих сил увеличивается по мере удаления от места подачи газа. Если объем, в который истекает пристенная струя, достаточно велик, то движением среды за пределами струи можно пренебречь. При наличии вынужденной конвекции, направленной против струи, могут образоваться зоны отрыва и рециркуляции. В этом разделе рассматривается случай, когда внешний ламинарный поток течет вверх по вертикальной поверхности, имеющей постоянную температуру, так что пристенная струя, внешний поток и выталкивающие силы направлены в одну сторону.

Рассматриваемое течение описывается уравнениями сохранения массы, движения и энергии, которые близки к уравнениям (9.68) и (9.69). Чтобы выделить влияние выталкивающих сил, представим эти уравнения несколько в ином виде. Используя уравнение (9.66b) и полагая $z = x/L$, получаем

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' = \text{Ri} z\theta + z\left(f' \frac{\partial f'}{\partial z} - f'' \frac{\partial f}{\partial z}\right), \quad (9.76a)$$

$$\frac{\theta''}{\text{Pr}} + \frac{1}{2}f\theta' = z\left(f' \frac{\partial \theta}{\partial z} - \theta' \frac{\partial f}{\partial z}\right). \quad (9.76b)$$

Как и в случае пристенной струи на горизонтальной поверхности (разд. 4.5), эти уравнения необходимо дополнить граничными и начальными условиями. При постоянной температуре стенки безразмерные граничные условия имеют вид (9.70), а начальные условия те же, что и для ламинарного течения на горизонтальной поверхности.

Результаты, представленные на рис. 9.13 и 9.14, получены при $\text{Pr} = 0,72$, $u_c/u_e = 1,0$ и $\delta/y_c = 0,95$ для разных значений числа Ри-

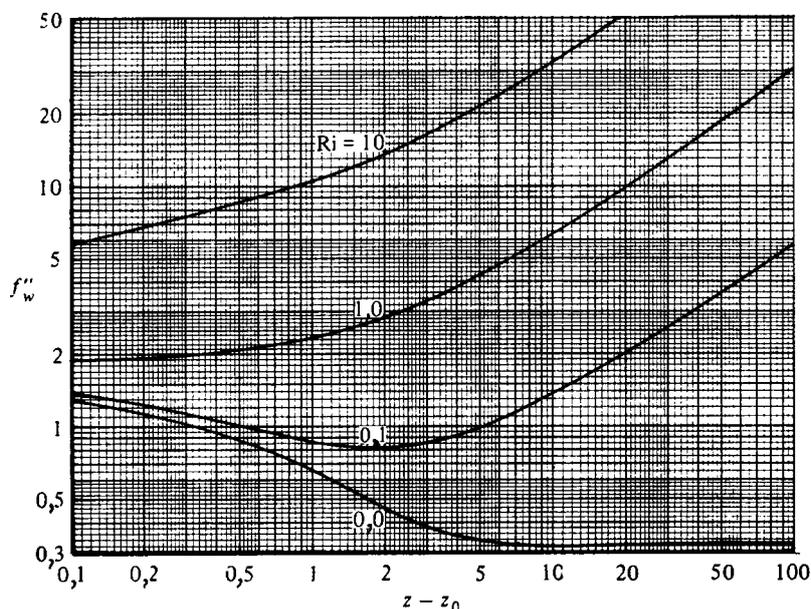


Рис. 9.13. Зависимость безразмерного параметра сдвиговых напряжений на стенке f''_w от расстояния до места вдува пристенной струи $z - z_0$ при $u_c/u_e = 1$, $Pr = 0,72$ и разных значениях числа Ричардсона Ri .

чардсона и позволяют проследить влияние выталкивающих сил на поверхностное трение и теплопередачу. Из рис. 9.13 видно, что в отсутствие выталкивающих сил ($Ri = 0$) безразмерный параметр сдвиговых напряжений на стенке f''_w убывает с увеличением безразмерного расстояния вдоль поверхности стенки $z - z_0$. При $Ri = 0,1$ значения параметра поверхностного трения при малых $z - z_0$ остаются практически теми же, что и при $Ri = 0$. Этого и следовало ожидать, так как вблизи передней кромки действие выталкивающих сил проявляется весьма слабо. Однако с увеличением z их влияние возрастает. Поскольку в случае нагретой поверхности действие выталкивающих сил эквивалентно действию благоприятного градиента давления, характер поведения f''_w с увеличением z изменяется: вместо того чтобы убывать с ростом z , f''_w начинает возрастать. При дальнейшем увеличении числа Ричардсона влияние выталкивающих сил становится все более ярко выраженным. На рис. 9.14 демонстрируется аналогичное поведение безразмерного параметра плотности теплового потока на стенке g'_w , значение которого с ростом числа Ричардсона начинает сильно отличаться от

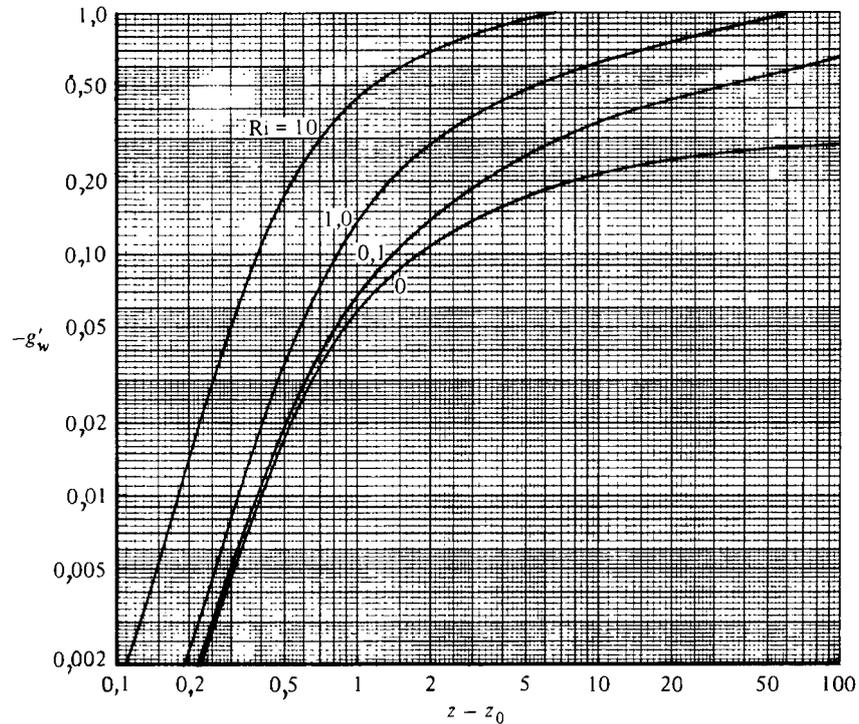


Рис. 9.14. Зависимость безразмерного параметра плотности теплового потока на стенке g'_w от расстояния до места вдува пристенной струи $z - z_0$ при $u_c/u_e = 1$, $Pr = 0,72$ и разных значениях числа Ричардсона Ri .

его значения при $Ri = 0$, причем это отличие тем сильнее, чем больше z .

На рис. 9.15 и 9.16 показано влияние отношения u_c/u_e на f_w'' и g_w' при $Ri = 1$. (Сравните этот рисунок с рис. 4.23 и 4.24.) При $z < 10$ влияние пристенной струи и отношения скоростей u_c/u_e велико и действие выталкивающих сил приводит к росту параметра поверхностного трения. При $z > 10$ пограничный слой постепенно «забывает» о своем начале и влияние пристенной струи сводится к нулю, а полученные результаты совпадают с приведенными в табл. 9.1 (задача 9.26). Соответственно меняется и тепловой поток на стенке: с ростом выталкивающих сил параметр g_w становится больше при каждом значении отношения скоростей u_c/u_e . Как и ранее, при $z > 10$ полученные результаты полностью соответствуют результатам для пограничного слоя с естественной конвекцией в отсутствие пристенной струи.

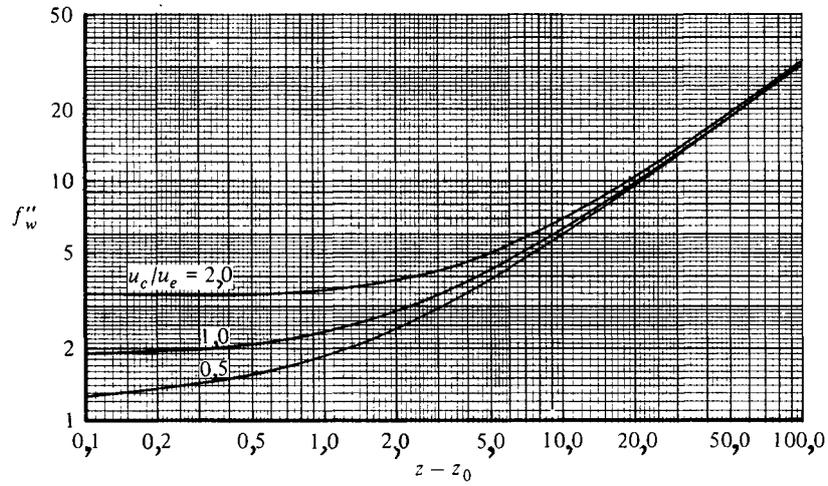


Рис. 9.15. Зависимость безразмерного параметра сдвиговых напряжений на стенке f''_w от расстояния до места вдува пристенной струи $z - z_0$ для изотермической вертикальной стенки при $\delta/y_c = 0,95$, $Pr = 1$ и $Ri = 1$.

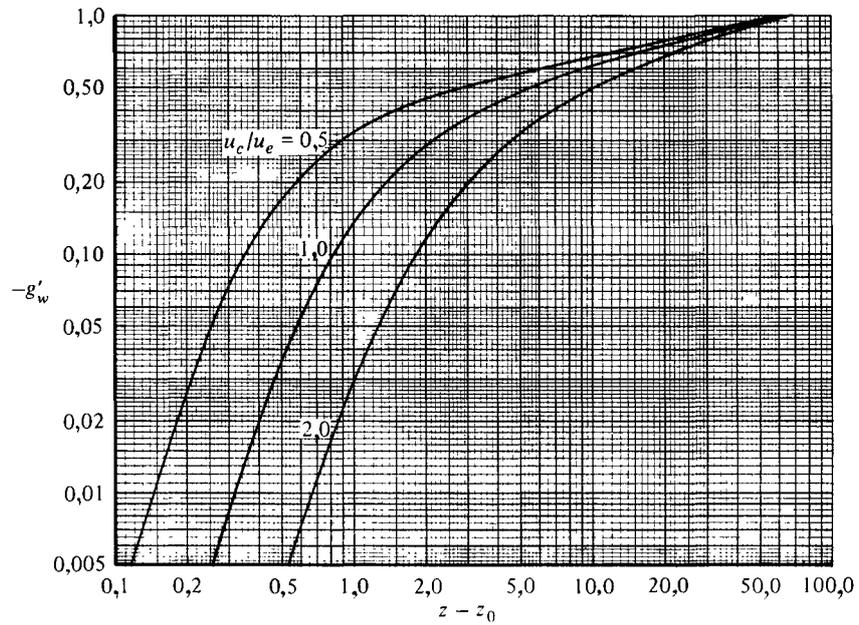


Рис. 9.16. Зависимость безразмерного параметра плотности теплового потока на стенке g'_w от расстояния до места вдува пристенной струи $z - z_0$ для изотермической вертикальной стенки при $\delta/y_c = 0,95$, $Pr = 1$ и $Ri = 1$.

9.4. Естественная и вынужденная конвекция в каналах и трубах

Ламинарные и турбулентные течения с выталкивающими силами в каналах и трубах можно исследовать теми же методами, которые применялись в гл. 5 и 7 для изучения течений без выталкивающих сил. Задавая разные граничные условия, можно рассчитывать различные течения, реализующиеся в области до и после слияния сдвиговых слоев. Типичный пример такого течения — течение в вертикальной трубе с нагретыми стенками, при котором движение жидкости полностью определяется естественной конвекцией. В этом случае толщина пограничных слоев на входе в трубу начинает расти за счет нагрева от стенок, обладающих более высокой температурой. На некотором расстоянии от входа в трубу пограничные слои сливаются и продолжают ускорять текущий по ней поток. Другим примером является вынужденная конвекция в вертикальной трубе с нагретыми стенками. Если в этом случае температура жидкости выше температуры стенок трубы, то выталкивающая сила направлена против течения и действует примерно так же, как неблагоприятный градиент давления. В результате может произойти отрыв потока (как и в случае пограничных слоев на поверхности вертикальных пластин, рассмотренных в разд. 9.3). Если же температура жидкости ниже температуры стенок трубы, то выталкивающие силы действуют подобно благоприятному градиенту давления.

В качестве примера расчета тепломассообмена в вертикальной трубе рассмотрим ламинарное течение с естественной и вынужденной конвекцией в пространстве между двумя параллельными пластинами с постоянной температурой поверхности. Модифицировав соответствующим образом уравнения, можно рассчитать и течение в вертикальной трубе круглого сечения, а также турбулентные течения; в последнем случае потребуется модель турбулентности, позволяющая представить рейнольдсовы напряжения.

Основные уравнения, описывающие ламинарное течение (члены, содержащие рейнольдсовы напряжения, отброшены), имеют вид уравнений (9.11)—(9.13). В области до слияния сдвиговых слоев граничные условия на стенке и границе пограничного слоя имеют следующий вид:

$$y = 0, \quad u = v = 0, \quad T = T_w, \quad (9.67a)$$

$$y = \delta, \quad u = u_e, \quad T = T_e. \quad (9.67b)$$

После того как толщина сдвиговых слоев увеличится настолько, что станет выгоднее пользоваться исходными переменными, гра-

ничные условия на границе пограничного слоя следует заменить условиями на оси потока, являющейся осью симметрии:

$$y = L, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (9.77)$$

Здесь через L обозначена полуширина канала.

При рассмотрении течений в каналах без выталкивающих сил основные уравнения и граничные условия можно записать через преобразованные или исходные переменные. Здесь воспользуемся алгоритмом, описанным в разд. 5.3, и применим обе системы координат.

На начальных стадиях течения, когда сдвиговые слои еще тонкие, основные уравнения решаются в преобразованных переменных. Для этого следует воспользоваться модифицированным преобразованием Фолкнера — Скэн, определяемым уравнениями (5.45), которые для двумерного потока имеют вид

$$\eta = \sqrt{\frac{u_0}{\nu x}} y, \quad \psi(x, y) = \sqrt{u_0 \nu x} f(x, \eta). \quad (9.78)$$

Воспользуемся также введенной выше безразмерной температурой

$$\theta = \frac{T - T_e}{T_w - T_e},$$

а штрихами обозначим дифференцирование по η . Тогда уравнения движения и энергии и соответствующие граничные условия можно представить в виде

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = \xi \frac{dp^*}{d\xi} + \xi \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \pm \xi \theta, \quad (9.79)$$

$$\frac{\theta''}{\text{Pr}} + \frac{1}{2} f \theta' = \xi \left(f' \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \theta' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right), \quad (9.80)$$

$$\eta = 0, \quad f = f' = 0, \quad \theta = 1, \quad (9.81a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad f' = \frac{u_e}{u_0} \equiv \bar{u}_e, \quad \theta = 0. \quad (9.81b)$$

Знак перед последним членом в правой части уравнения (9.79) выбирается положительным, если выталкивающие силы ускоряют поток (температура стенки выше температуры жидкости) и отрицательным, если они тормозят поток (температура стенки ниже температуры жидкости). Через ξ в приведенных выше уравнениях обозначено безразмерное расстояние вдоль оси x , определяемое уравнением (9.66b), а через p^* — безразмерное давление $p/\rho u_0^2$.

Чтобы получить дополнительное граничное условие, связанное с наличием градиента давления, воспользуемся уравнением (5.57)

$$u_0 L = \int_0^L u dy \quad (5.57)$$

и запишем его в преобразованных переменных

$$f(\xi, \eta_{sp}) = \eta_{sp}, \quad (9.82a)$$

где $\eta_{sp} = \sqrt{(Gr_L/R_L)(1/\xi)}$. Замечая, что $f' = \bar{u}_e$ при $\eta_e < \eta < \eta_{sp}$, можно переписать это уравнение в виде

$$\bar{u}_e(\eta_{sp} - \eta_e) + f_e = f_{sp}. \quad (9.82b)$$

За исключением члена, описывающего выталкивающую силу в уравнении (9.79), и множителя Gr_L/R_L , в формуле для η_{sp} уравнения движения и энергии для течения в вертикальном канале, как и следовало ожидать, совпадают с уравнениями для горизонтального канала. Более важным является то обстоятельство, что хотя уравнения и их решения для горизонтального канала не зависят от числа Рейнольдса, в случае вертикального канала они зависят и от числа Рейнольдса, и от числа Грасгофа.

После того как толщины сдвиговых слоев превысят некоторую величину $\xi = \xi_0$, приходится переходить от преобразованных переменных к исходным. Более того, по мере увеличения ξ влияние выталкивающих сил растет и оказывается выгодным перейти от автомодельных переменных к переменным, применявшимся при изучении естественной конвекции, или к исходным переменным. Здесь воспользуемся второй из этих возможностей и представим безразмерное расстояние Y и функцию тока $F(x, Y)$ выражениями (5.52), которые в случае двумерных течений имеют вид

$$Y = \left(\frac{u_0}{\nu L}\right)^{1/2} y, \quad \psi = (u_0 \nu L)^{1/2} F(x, Y). \quad (9.83)$$

В этих новых переменных уравнения сохранения и соответствующие граничные условия приобретают вид

$$F''' = \frac{d\rho^*}{d\xi} + F' \frac{\partial F'}{\partial \xi} - F'' \frac{\partial F}{\partial \xi} \pm \xi \theta, \quad (9.84)$$

$$\frac{\theta''}{Pr} = F' \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \theta' \frac{\partial F}{\partial \xi}, \quad (9.85)$$

$$Y = 0, \quad F = F' = 0, \quad \theta = 1, \quad (9.86a)$$

$$Y_c = \sqrt{R_L}, \quad F'' = 0, \quad F = \sqrt{R_L}, \quad \theta' = 0, \quad (9.86b)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по Y .

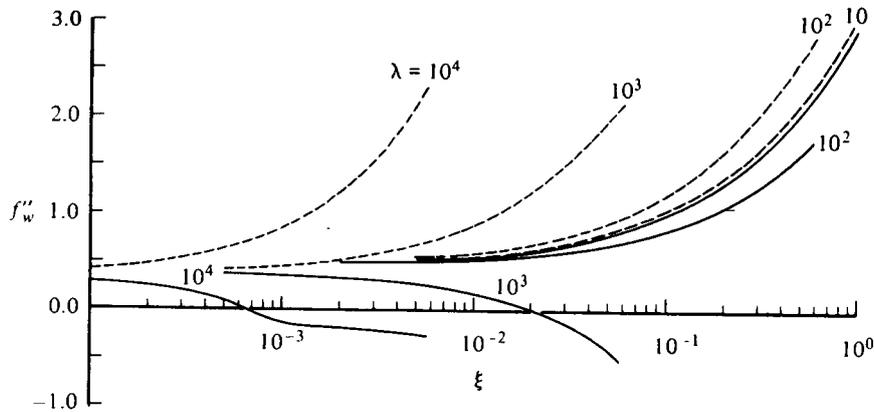


Рис. 9.17. Зависимость преобразованного безразмерного параметра сдвиговых напряжений на стенке f''_w от безразмерного расстояния вниз по потоку ξ .
охлажденная стенка; --- нагретая стенка.

Как и в случае решения уравнений для горизонтального канала (гл. 5), систему уравнений для вертикального канала, выписанную выше, можно решить нелинейным методом собственных значений, описанным в разд. 14.1, или методом функций Мечула, изложенным в работе [18]. Оба этих метода дают удовлетворительные результаты при расчете безотрывных течений, однако лишь второй пригоден для расчета течений с отрывом. Подробнее этот вопрос рассмотрен в работе [19].

На рис. 9.17—9.19 представлены зависимости безразмерного параметра сдвиговых напряжений на стенке f''_w ($\equiv c_f/2R_L \xi^{1/2}$), безразмерного падения давления Δp^* и безразмерного параметра плотности теплового потока на стенке θ'_w ($\equiv -Nu_x/R_L \xi^{1/2}$) от безразмерного расстояния ξ при $Pg = 0,72$ и $R_L = 10^3$. Здесь c_f определяется выражением (9.75а), в котором u_e заменено на u_0 , а число Нуссельта Nu_x определяется уравнением (9.74а). Во всех случаях считалось, что динамический и тепловой пограничные слои начинают нарастать от входной кромки канала, т. е. от точки $\xi = 0$ при заданном отношении Gr_L/R_L . Расчет заканчивался при $\xi = 6$, поскольку при этом был охвачен почти весь интервал значений ξ , представляющих практический интерес. На рисунках приведены результаты расчетов при значениях λ ($\equiv Gr_L/R_L^2 \equiv Ri$) 10, 10², 10³ и 10⁴. При $\lambda = 10$ влияние естественной конвекции пренебрежимо мало, и данные, приве-

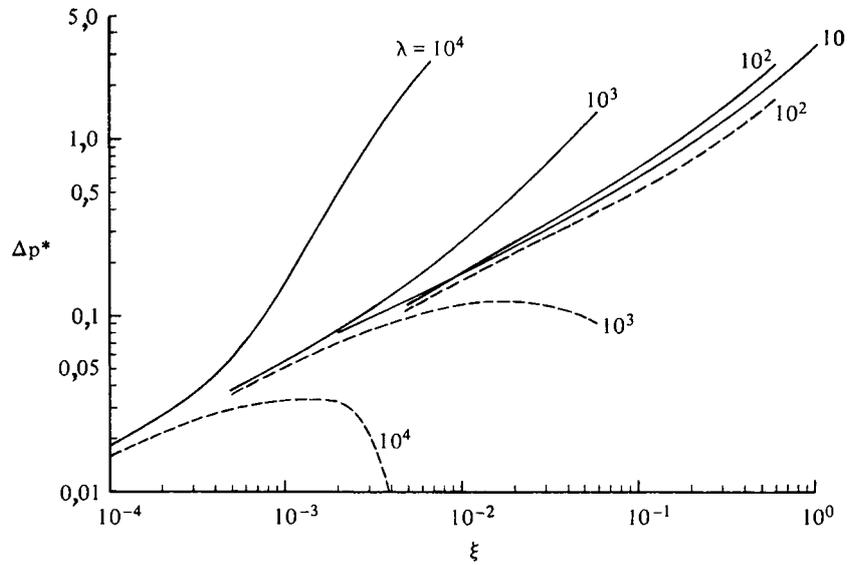


Рис. 9.18. Зависимость безразмерного падения давления от безразмерного расстояния вниз по потоку ξ .

- охлажденная стенка; --- нагретая стенка.

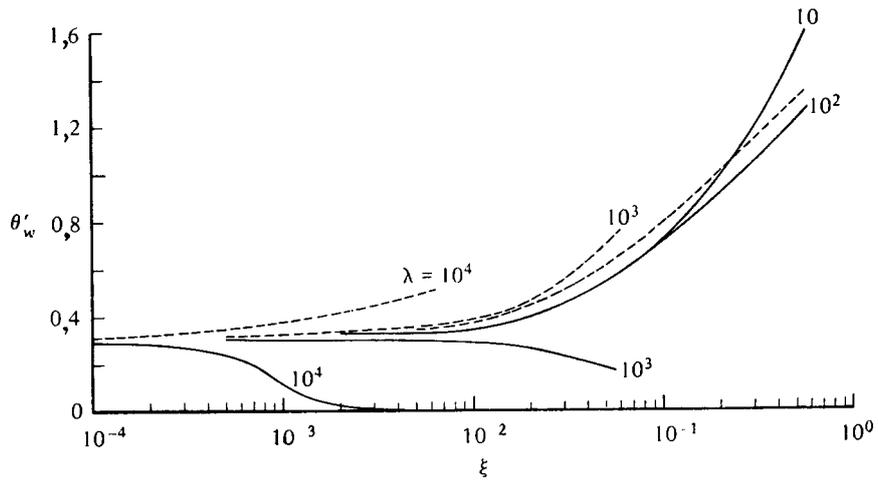


Рис. 9.19. Зависимость преобразованного безразмерного параметра плотности теплового потока на стенке θ'_w от безразмерного расстояния вниз по потоку ξ .

охлажденная стенка; --- нагретая стенка.

денные на каждом из рисунков, соответствуют ламинарному течению с вынужденной конвекцией в горизонтальном двумерном канале. Кривые, представленные на указанных рисунках, позволяют сравнить течения с вынужденной и естественной конвекцией, направленной по потоку и против него. Предполагается, что вынужденная конвекция направлена вверх и, следовательно, нагрев стенок порождает естественную конвекцию, направленную по потоку; если же градиент давления направлен вниз, то представленные результаты соответствуют течению в канале с охлаждаемыми стенками.

Как видно из рис. 9.17, охлаждение стенок, при котором течения с естественной и вынужденной конвекцией направлены в противоположные стороны, приводят к отрыву пограничного слоя и образованию возвратного течения при некоторых значениях ξ , которые убывают с ростом λ . Таким образом, с увеличением $T_w - T_e$ точка отрыва смещается вверх по потоку, а вниз по потоку от нее сохраняется возвратное течение. Соответствующее падение давления (рис. 9.18) прогрессивно растет вниз по потоку от точки отрыва, однако, как можно видеть, при $\lambda = 10^4$ градиент давления начинает убывать по мере того, как безразмерный параметр сдвиговых напряжений на стенке стремится к своему максимальному отрицательному значению. Изменение падения давления в зависимости от λ становится существенным, когда отрыв потока начинает оказывать на течение заметное влияние. Если течения с естественной и вынужденной конвекцией направлены в одну сторону, то падение давления быстро уменьшается по мере того, как выталкивающая сила все сильнее противодействует росту параметра сдвиговых напряжений на стенке f_w'' .

На рис. 9.20 показано влияние числа Прандтля на безразмерный параметр теплового потока на стенке θ_w' при $\lambda = 10^3$. Как и следовало ожидать, с уменьшением отношения толщин теплового и динамического пограничных слоев параметр θ_w' растет; одновременно увеличивается и различие между случаями, когда конвекция направлена по потоку и против него. В последнем случае число Прандтля оказывает сравнительно слабое влияние на положение точки отрыва: при $\text{Pr} = 0,1$ и 10 отрыв происходит соответственно при $\xi = 0,017$ и $0,032$.

На рис. 9.21 показана зависимость безразмерной скорости на оси течения от безразмерного расстояния вниз по потоку ξ при $\text{Pr} = 0,72$ и разных значениях λ . При $\lambda = 10$, когда влияние естественной конвекции пренебрежимо мало, течение Блазиуса превращается в полностью развитое плоское течение Пуазейля с соответствующим изменением безразмерной скорости на оси потока от 1 до

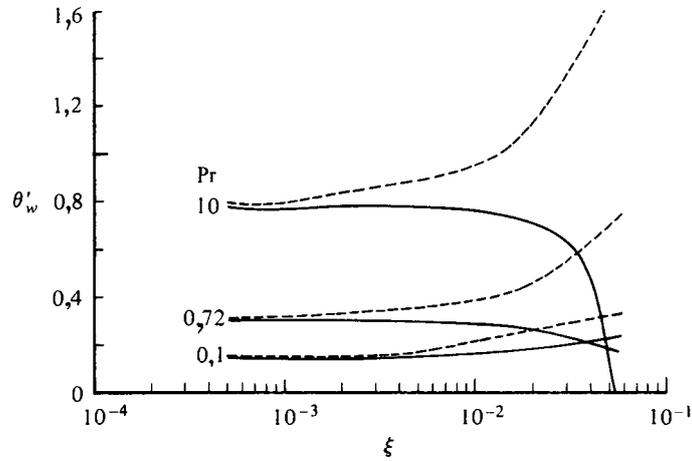


Рис. 9.20. Влияние числа Прандтля на θ'_w при $\lambda = 10^3$.
— охлажденная стенка; --- нагретая стенка.

1,5. Если течения с естественной и вынужденной конвекцией направлены в одну сторону, то жидкость вблизи стенок ускоряется, в результате чего, как следует из графика для $\lambda = 10^3$, увеличение скорости на оси потока может оказаться незначительным или она может здесь даже уменьшиться, поскольку жидкость из центральной части потока будет отсасываться в тонкий пристенный слой, в пределах которого скорость течения имеет заметный максимум.

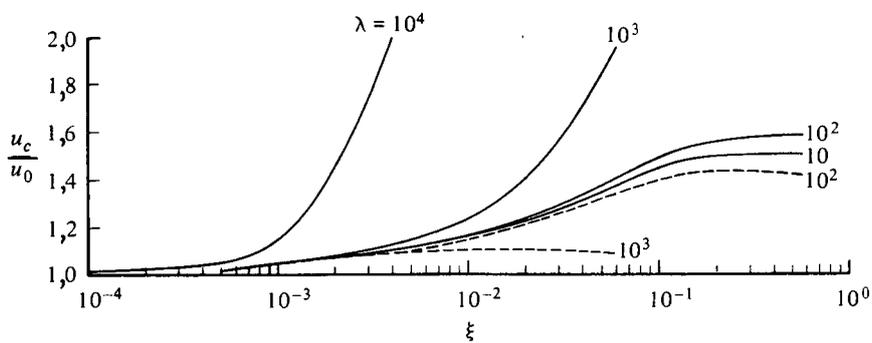


Рис. 9.21. Зависимость безразмерной скорости на оси течения u_c/u_0 от безразмерного расстояния вниз по потоку ξ .
— охлажденная стенка; --- нагретая стенка.

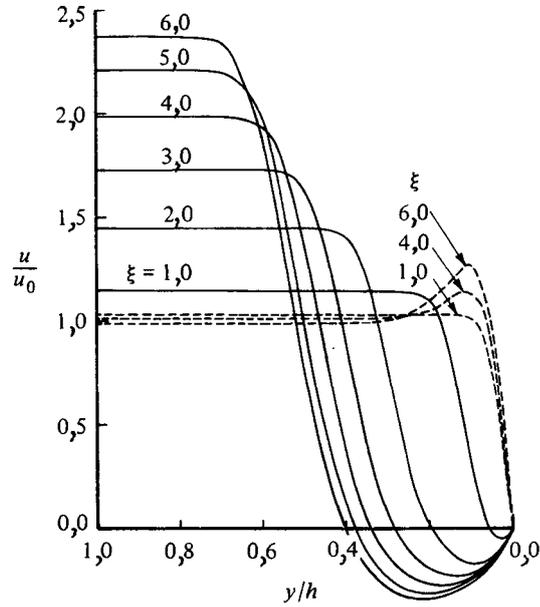


Рис. 9.22. Безразмерные профили скорости для нагретой (—) и охлажденной (---) стенки при $Pr = 0,72$, $\lambda = 10^4$ и разных значениях ξ .

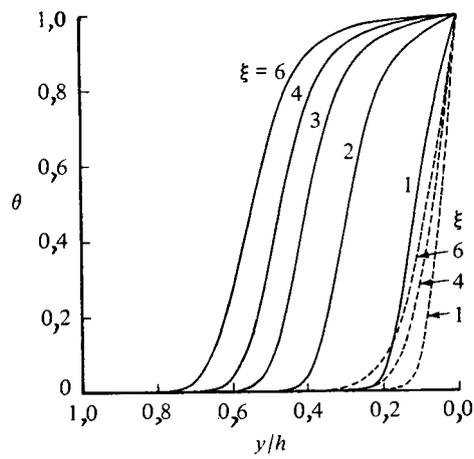


Рис. 9.23. Безразмерные профили температуры для нагретой (—) и охлажденной (---) стенки при $Pr = 0,72$, $\lambda = 10^4$ и разных значениях ξ .

Представленные на рис. 9.22 расчетные профили скоростей, полученные при $Pr = 0,72$ и $\lambda = 10^4$ для случаев, когда течения с естественной и вынужденной конвекцией направлены в одну сторону (нагретые стенки) или в противоположные стороны (охлажденные стенки), подтверждают сделанные выше выводы. В первом случае по мере ускорения пристенного слоя скорость жидкости в центральной части потока действительно убывает. Соответствующие профили температуры, представленные на рис. 9.23, показывают, что в этом случае толщина теплового пограничного слоя мала. Когда же течения с естественной и вынужденной конвекцией направлены в противоположные стороны, скорость на оси потока существенно увеличивается по мере развития зон возвратного течения.

9.5. Естественная конвекция в свободных сдвиговых течениях

В течениях с выталкивающими силами могут образовываться струи, следы и зоны смешения; отдельный класс течений составляют течения в зонах взаимодействия с пристенными течениями. Особую роль течения с выталкивающими силами играют в метеорологии, но с ними приходится иметь дело также при изучении выбросов из труб и градирен, течений в реках и эстуариях. В этом разделе будет рассмотрена задача о *плоском ламинарном факеле*, образующемся над горизонтальным линейным источником тепла. Подобные течения развиваются над длинными нагретыми проводниками или тонкими трубами, причем практический интерес представляют течения на больших высотах над линейными источниками тепла. Содержательные обзоры исследований в этой области читатель найдет в работах [20, 21].

На рис. 9.24 схематически показано рассматриваемое течение и применяемая система координат. Считая течение ламинарным, отбросим в уравнениях (9.11)—(9.13) члены, содержащие реинольдсовы напряжения и тепловые потоки, и поставим следующие граничные условия:

$$y = 0, \quad v = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad (9.87a)$$

$$y \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow T_e, \quad u \rightarrow 0. \quad (9.87b)$$

Поскольку в рассматриваемом течении нет других источников тепла, кроме находящегося в начале координат, то суммарное количе-

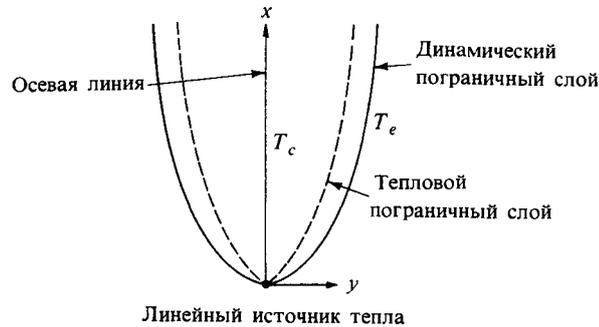


Рис. 9.24. Система координат для двумерного факела над линейным горизонтальным источником тепла.

В направлении оси y размеры завышены.

ство тепла, переносимого в пограничном слое в единицу времени, постоянно, т. е.

$$K_c = \rho c_p \int_{-\infty}^{\infty} u(T - T_e) dy = \text{const.} \quad (9.88)$$

Если температура распределена вдоль вертикальной оси симметрии потока по степенному закону, определяемому, например, уравнением (9.29), то уравнения (9.11)—(9.13), (9.87) и (9.88) имеют автомодельное решение. Чтобы показать, что это так, введем автомодельную переменную η и функцию тока ψ (пользуясь при этом алгоритмом, описанным в разд. 4.1) в виде

$$\eta = \left(\frac{x}{L}\right)^{(n-1)/4} \sqrt{\frac{u_c}{\nu L}} y, \quad \psi = \left(\frac{x}{L}\right)^{(n+3)/4} \sqrt{u_c \nu L} f(\eta) \quad (9.89)$$

и примем

$$T_c - T_e = \left(\frac{x}{L}\right)^n N. \quad (9.90)$$

Здесь N — постоянная, T_c — температура на вертикальной оси симметрии потока, а u_c — характерная скорость. Кроме того, введем безразмерную температуру

$$\theta = \frac{T - T_e}{T_c - T_e}. \quad (9.91)$$

Используя три последних выражения и замечая, что

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_c \left(\frac{x}{L}\right)^{(2n+2)/4} f', \quad (9.92)$$

можно представить выражение (9.88) в виде

$$K_c = 2\rho c_p \sqrt{u_c L \nu} N \left(\frac{x}{L} \right)^{(5n+3)/4} \int_0^\infty f' \theta d\eta. \quad (9.93)$$

Поскольку тепловой поток K_c не зависит от x , то показатель степени n должен быть равен $-3/5$. Подставив это значение n в выражения (9.89) и (9.90), приведем уравнения (9.12) и (9.13) и граничные условия (9.87) к виду

$$f''' + \frac{12}{5} f f'' - \frac{4}{5} (f')^2 + \theta = 0, \quad (9.94)$$

$$\theta'' + \frac{12}{5} \text{Pr} (f\theta)' = 0, \quad (9.95)$$

$$\eta = 0, \quad f = f'' = 0, \quad \theta' = 0, \quad (9.96a)$$

$$\eta \rightarrow \eta_e, \quad f' \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0. \quad (9.96b)$$

Для решения этой системы уравнений можно использовать несколько численных методов. Один простейший (но не самый лучший) метод состоит в том, чтобы решать уравнения (9.94) и (9.95) по отдельности. Проинтегрировав уравнение (9.95) и представив результат в виде

$$\theta(\eta) = \exp \left[-\frac{12}{5} \text{Pr} \int_0^\eta f(\eta) d\eta \right], \quad (9.97)$$

найдем его решение, подставив любую функцию $f(\eta)$, удовлетворяющую граничным условиям для f и ее производных, заданных выражениями (9.96). Затем, подставив полученное решение в уравнение (9.94), найдем новое выражение для f , которое подставим в уравнение (9.95) и получим из него новое распределение температуры $\theta(\eta)$. Эту функцию опять подставим в уравнение (9.94) и найдем из него функцию $f(\eta)$. Будем повторять эту процедуру до тех пор, пока не будет получено сходящееся решение. На рис. 9.25 показаны профили скорости и температуры, полученные этим методом при разных значениях числа Прандтля, которое, как можно видеть, сильно влияет на форму и тех и других. Дополнительные сведения о решениях указанной системы уравнений можно получить в работе [22].

Если f и θ известны, то из уравнения (9.93) можно найти множитель N и определить массовый расход \dot{m} в факеле.

Пользуясь безразмерными переменными и введя обозначение

$$I_1 = \int_0^\infty f' \theta d\eta,$$

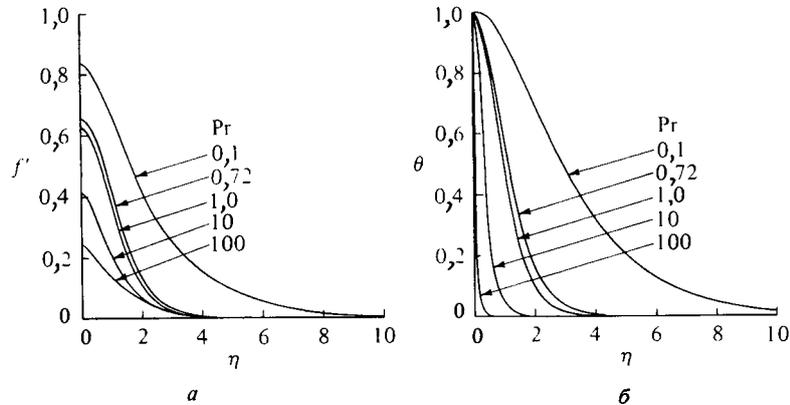


Рис. 9.25. Безразмерные профили скорости (а) и температуры (б) для плоского ламинарного факела при разных значениях числа Прандтля.

перепишем уравнение (9.93) в виде

$$K_c = 2kNPr\sqrt{Gr_L} I_1. \quad (9.98)$$

Поскольку тепловой поток K_c по высоте факела постоянен и равен суммарной теплоотдаче линейного источника, то из (9.98) найдем

$$N = \frac{K_c}{2kPr\sqrt{Gr_L} I_1}. \quad (9.99)$$

Тогда массовый расход в факеле определяется выражением

$$\dot{m} = 2 \int_0^\infty \rho u dy = 2\rho u_c L \left(\frac{x}{L}\right)^{3/5} \frac{f(\eta_e)}{\sqrt{Gr_L}}. \quad (9.100)$$

из которого следует, что массовый расход увеличивается с увеличением высоты над линейным источником тепла пропорционально $x^{3/5}$. Значения $f(\eta_e)$ в зависимости от числа Прандтля приведены в табл. 9.3.

Таблица 9.3. Значения безразмерной функции тока $f(\eta_e)$ при разных значениях числа Прандтля

Pr	0,1	0,72	1,0	10	100
$f(\eta_e)$	2,127	0,920	0,827	0,499	0,353

Задачи

- 9.1 В случае естественной конвекции в ламинарном потоке жидкости коэффициент теплоотдачи \hat{h} определяется следующей функциональной зависимостью

$$\hat{h} = f(\rho, \mu, c_p, k, L, g\beta, \Delta T).$$

Пользуясь методом исключения из матрицы (разд. 6.2), показать, что

$$\text{Nu} = f(\text{Gr}_L, \text{Pr}).$$

- 9.2. Показать, что квадрат отношения

$$\frac{u_c}{u_e} = \frac{\sqrt{g\beta L(T_w - T_e)}}{u_e}$$

представляет собой число Ричардсона, определяемое выражением (9.1).

- 9.3. Показать, что в случае плоского ламинарного свободноконвективного течения над вертикальной пластиной автомодельную переменную η и безразмерную функцию тока $f(\eta)$, заданную выражением (9.20), можно представить в виде

$$\eta = \left(\frac{u_c}{\nu L}\right)^{1/2} y \left(\frac{L}{x}\right)^{1/4}, \quad \psi = (u_c \nu L)^{1/2} \left(\frac{x}{L}\right)^{3/4} f(\eta).$$

Воспользоваться для этого методом, изложенным в разд. 4.1.

- 9.4. Вывести автомодельные уравнения для плоского ламинарного свободноконвективного течения около вертикальной плоской пластины для случаев, когда задана: а) температура поверхности пластины, б) плотность теплового потока. Воспользоваться преобразованием (9.20).
- 9.5. Вывести выражение для величины и положения максимума скорости в ламинарном пограничном слое с естественной конвекцией на поверхности вертикальной изотермической пластины в воздухе ($\text{Pr} = 0,72$).
- 9.6. Две вертикальные плоские пластины высотой по 0,5 м нагреты до 323 К и находятся в воздухе, температура которого 288 К. Определить минимальное расстояние между пластинами, при котором образующиеся на них свободноконвективные пограничные слои не сливаются.
- 9.7. Вычислить значения локального коэффициента поверхностного трения c_f и числа Нуссельта Nu_x при $x = 0,25$ м для случая ламинарного течения на вертикальной плоской пластине, температура поверхности которой постоянна и равна 338 К. Температура окружающей среды 288 К. Физические характеристики среды вычислить при температуре пленки T_f . Рассмотреть в качестве окружающей среды: а) воздух, б) глицерин, в) водяной пар.
- 9.8. Горизонтальная пластина, температура которой постоянна и равна 523 К, находится в воздухе, имеющем температуру 288 К. Определить теплосъем с единицы длины пластины для случая ламинарного течения, если пластина: а) полубесконечная, б) имеет конечную длину. Физические характеристики воздуха вычислить при температуре слоя T_f . Сравнить полученные результаты.
- 9.9. Вертикальную пластину длиной 1,5 м, поверхность которой поддерживается при постоянной температуре 393 К, обтекает поток воздуха при температуре 293 К и давлении 1 атм (0,1013 МПа). Скорость потока 10 м/с. Физические характеристики воздуха вычислить при температуре слоя T_f .

- а. Определить локальное число Нуссельта и величину поверхностного трения при $x = 0,5; 1,0$ и $1,5$ м. Сравнить полученные результаты с результатами расчета для течения около горизонтальной плоской пластины при тех же условиях. Обсудить результаты сравнения.
- б. Вычислить суммарный тепловой поток от пластины, если ее ширина $0,5$ м.
- 9.10. Из щели шириной $0,01$ м истекает пристенная струя, скорость которой равна скорости набегающего потока воздуха. Температура потока воздуха равна 300 К.
- а. Вычислить значение числа Ричардсона при скорости набегающего потока $0,1$ м/с и постоянной температуре стенки 320 К.
- б. Вычислить значение числа Ричардсона при скорости набегающего потока $1,0$ м/с и постоянной температуре стенки 320 К.
- в. Вычислить значение числа Ричардсона при скорости набегающего потока $1,0$ м/с и постоянной температуре стенки 1000 К. Применим ли используемый метод в последнем случае?
- 9.11. Пользуясь данными, приведенными на рис. 9.13 и 9.14, определить значения $c_f/2$ и Nu в точке, смещенной на $0,1$ м вниз по потоку от среза щелевого сопла, из которого истекает струя воздуха. Скорости струи и внешнего потока $0,1$ м/с, ширина щели $0,01$ м, температура внешнего потока и стенки 300 и 500 К соответственно. Что произойдет, если значения температур стенки и внешнего потока поменять местами?
- 9.12. Пользуясь данными, приведенными на рис. 9.13—9.16, оценить значения $c_f/2$ и Nu при условиях предыдущей задачи, если скорость внешнего потока вдвое больше скорости пристенной струи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jaluria Y., Natural Convection. Heat and Mass Transfer, Pergamon, Oxford, 1980. [Имеется перевод: Джалурия Й. Естественная конвекция. Тепло- и массообмен. — М.: Мир, 1983.]
2. Ede A.J., Advances in free convection, in Advances in Heat Transfer, Vol. 4, Academic, N.Y., 1967, p. 1. [Имеется перевод: Ид А.Дж. Свободная конвекция. — В сб. Успехи теплопередачи. — М., 1970, с. 11.]
3. LeFevre E.J., Laminar free convection from a vertical plane surface, Proc. 9th Int. Cong. Appl. Mech., Brussels, Vol. 4, 1956, p. 168.
4. Fujii T., Fujii M., The dependence of local Nusselt number on Prandtl number in the case of free convection along a vertical surface with uniform heat flux, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **19**, 121 (1976).
5. Jaluria Y., Gebhart B., On transition mechanisms in vertical natural convection flow, *J. Fluid Mech.*, **66**, 309 (1974).
6. Cebeci T., Khattab A.A., Prediction of turbulent-free-convective-heat transfer from a vertical flat plate, *J. Heat Transfer*, **97**, 469 (1975).
7. Warner C.Y., Arpaci V.S., An experimental investigation of turbulent natural convection in air along a vertical heated flat plate, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **11**, 397 (1968).
8. Fujii T., Takeuchi M., Fujii M., Suzaki K., Vehara H., Experiments on natural convection heat transfer from the outer surface of a vertical cylinder to liquids, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **13**, 753 (1970).
9. Bailey F.J., Analysis of turbulent free convection heat transfer, *Proc. Inst. Mech. Eng.*, **169**, 361 (1955).

10. Vliet G.C., Liu C.K., An experimental study of turbulent natural convection boundary layers, *J. Heat Transfer*, **91**, 517 (1969). [Имеется перевод: Влит, Лайю. Экспериментальное исследование турбулентных пограничных слоев в условиях естественной конвекции. — Труды Амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1969, № 4, с. 73.]
11. Sparrow E.M., Gregg J.L., Variable fluid-property problem in free convection, *J. Heat Transfer*, **80**, 879 (1958).
12. Fujii T., Imura H., Natural-convection heat transfer from a plate with arbitrary inclination, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **15**, 755 (1972).
13. Stewartson K., On free convection from a horizontal plate, *ZAMP*, **9**, 276 (1958).
14. Rotem A., Claassen L., Natural convection above unconfined horizontal surfaces, *J. Fluid Mech.*, **39**, 173 (1969).
15. McAdams W.H., Heat Transmission, 3rd ed. McGraw, N.Y., 1954. [Имеется перевод: Мак-Адамс В.Х. Теплопередача. — М.: Metallurgizdat, 1961.]
16. Fishenden M., Saunders O.A., An Introduction to Heat Transfer, Oxford, London, 1950.
17. Merkin J.H., The effect of buoyancy forces on the boundary-layer flow over a semi-infinite vertical flat plate in a uniform freestream, *J. Fluid Mech.*, **35**, 439 (1969).
18. Bradshaw P., Cebeci T., Whitelaw J.H., Engineering Calculation Methods for Turbulent Flows, Academic, London, 1981.
19. Cebeci T., Khattab A.A., Lamont R., Combined natural and forced convection in vertical ducts, Proc. Seventh International Heat Transfer Conf., Munich, GFR, Hemisphere Publishing Co., Washington, D.C., 1982.
20. Turner J.S., Buoyancy Effects in Fluids, University Press, Cambridge, 1973. [Имеется перевод: Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. — М.: Мир, 1977.]
21. Rodi W., Vertical Turbulent Buoyant Jets: a Review of Experimental Data, Pergamon, Oxford, 1980.
22. Gebhart B., Pera L., Schorr A.W., Steady laminar natural convection plumes above a horizontal line heat source, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **13**, 161 (1970).

Если разность температур между характерными точками газового потока составляет значительную часть полной температуры, то разность плотностей также велика по сравнению с абсолютной плотностью, и при решении уравнений, описывающих поле течения, ее нельзя считать постоянной. Вместо этого, как и в случае течений с выталкивающими силами, рассмотренных в предыдущей главе, уравнения движения и энергии *следует* решать совместно, так как они «сопряжены», иначе говоря, плотность, входящая в уравнение движения, связана через уравнение состояния с зависимой переменной в уравнении энергии.

Процедура решений для медленных течений в ламинарных сдвиговых слоях с большими перепадами плотности (обусловленными интенсивным нагревом или резкими изменениями концентрации) мало отличается от процедуры решений для высокоскоростных течений, в которых перепады температур обусловлены вязкой диссипацией кинетической энергии. Дополнительные трудности, создаваемые переменностью поля давления с соответствующими изменениями плотности, невелики; поэтому высокоскоростные течения без ударных волн можно изучать методами, изложенными в данной главе. Высокоскоростные сдвиговые слои с постоянным давлением практически не отличаются от медленных течений с распределенными источниками тепла, которые заменяют вязкую диссипацию кинетической энергии.

Как и в случае несопряженных ламинарных пограничных слоев, прежде чем решать основные уравнения течения, их удобно представить в преобразованных переменных. В этой главе при рассмотрении сопряженных течений будем пользоваться двумя совершенно разными типами преобразований. Первое — преобразование Фолкнера — Скэн, упрощенная форма которого применялась при изучении течений с постоянными свойствами. Оно позволяет исключить из уравнений, обычно не полностью, независимую переменную x . Другое преобразование, предложенное Иллингвортом [1]

и Стюартсоном [2]¹⁾, выполняется с целью исключить из уравнений зависимость от числа Маха, отношения температур на стенке и в набегающем потоке или других параметров, отражающих переменность свойств жидкости. По сути дела, полностью исключить влияние переменности свойств жидкости можно лишь в немногих частных случаях ламинарных течений. Однако при изучении как ламинарных, так и турбулентных течений частичное исключение из уравнений переменных свойств жидкости облегчает их решение, так как учет оставшихся переменных свойств упрощается. Можно вести расчет и в непреобразованных исходных переменных, однако он менее эффективен.

Преобразование Фолкнера — Скэн для газа записывается в виде

$$d\eta = \left(\frac{u_e}{\nu_e x}\right)^{1/2} \frac{\rho}{\rho_e} dy, \quad \psi(x, y) = (\rho_e \mu_e u_e x)^{1/2} f(x, \eta). \quad (10.1)$$

Будем пользоваться процедурой, аналогичной описанной в разд. 4.1, заменив обычное определение функции тока следующим:

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (10.2)$$

Для ламинарных течений с пренебрежимо малыми объемными силами уравнение движения совпадает с уравнением (3.38), из которого исключены члены, обусловленные турбулентностью и действием объемных сил,

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (3.38)$$

а уравнение энергии совпадает с уравнением (3.47а)

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial H}{\partial y} + \mu \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) u \frac{\partial u}{\partial y} \right]. \quad (3.47a)$$

Выполнив ряд преобразований и заменив $-dp/dx$ на $\rho_e u_e (du_e/dx)$, можно представить два последних уравнения в виде

$$(bf'')' + m_1 f f'' + m_2 [c - (f')^2] = x \left(f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (10.3)$$

$$(eS' + df'f'')' + m_1 f S' = x \left(f' \frac{\partial S}{\partial x} - S' \frac{\partial f}{\partial x} \right). \quad (10.4)$$

¹⁾ Аналогичное преобразование независимо было предложено Дородницыным А. А. [4*]. — Прим. ред.

При отсутствии массообмена граничные условия имеют вид

$$y = 0, \quad v = 0, \quad u = 0, \quad H = H_w(x) \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_w = - \frac{c_{p_w}}{k_w} \dot{q}_w, \quad (10.5a)$$

$$y = \delta, \quad u = u_e(x), \quad H = H_e. \quad (10.5b)$$

В преобразованных переменных их можно записать следующим образом:

$$\eta = 0, \quad f = 0, \quad f' = 0, \quad S = S_w(x) \quad \text{или} \quad S'_w = - \frac{c_{p_w} C_w x \dot{q}_w}{k_w H_e \sqrt{R_x}}, \quad (10.6a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad f' = 1, \quad S \equiv H/H_e = 1. \quad (10.6b)$$

Как и ранее, штрихами в уравнениях (10.3), (10.4) и (10.6) обозначено дифференцирование по η . Кроме того, здесь $f' = u/u_e$ — отношение скоростей, $S = H/H_e$ — отношение полных энтальпий, а остальные параметры определяются выражениями

$$b = C, \quad C \equiv \frac{\rho \mu}{\rho_e \mu_e}, \quad c = \frac{\rho_e}{\rho}, \quad d = \frac{C u_e^2}{H_e} \left(1 - \frac{1}{Pr} \right), \quad e = \frac{b}{Pr}, \quad (10.7a)$$

$$m_1 = \frac{1}{2} \left[1 + m_2 + \frac{x}{\rho_e \mu_e} \frac{d}{dx} (\rho_e \mu_e) \right], \quad m_2 \equiv \frac{x}{u_e} \frac{du_e}{dx}, \quad R_x = \frac{u_e x}{\nu_e}. \quad (10.7b)$$

Так как число Прандтля для жидкостей изменяется в широких пределах, а характер зависимости вязкости от температуры для разных жидкостей также может быть самым различным, то полезно рассмотреть модельную жидкость, для которой $Pr = 1$, а μ и T связаны простой зависимостью. Применяя преобразование Иллингворта — Стюартсона для жидкости с простыми физическими свойствами, можно упростить основные уравнения, описывающие течение, и исследовать их решения для сопряженных внешних ламинарных пограничных слоев на адиабатной и теплопроводной стенках. В первом случае тепловой поток сквозь стенку равен нулю, и уравнения, описывающие течения, приобретают вид уравнений для несжимаемой жидкости.

Представим преобразование Иллингворта — Стюартсона в виде

$$dX = \frac{a_e}{a_\infty} \frac{p_e}{p_\infty} dx, \quad (10.8a)$$

$$dY = \frac{a_e}{a_\infty} \frac{\rho}{\rho_\infty} dy, \quad (10.8b)$$

где a — скорость звука, а индексом ∞ обозначены условия на бесконечности (при $y = \infty$). Введем также связь между размерной функцией тока ψ и функцией тока для несжимаемой жидкости $F(X, Y)$

$$\psi = \rho_\infty F. \quad (10.9)$$

Затем, используя определение функции тока (10.2), а также соотношения (10.8) и (10.9), применим обычное правило дифференцирования сложных функций и запишем уравнение движения (10.3) в виде

$$\begin{aligned} F' \frac{\partial F'}{\partial X} - F'' \frac{\partial F}{\partial X} = \\ = \frac{a_\infty}{a_e} \left[-(F')^2 \frac{d}{dX} \left(\frac{a_e}{a_\infty} \right) + \frac{\rho_e}{\rho_\infty} \frac{a_\infty}{a_e} u_e \frac{du_e}{dX} \right] + \frac{T_\infty}{T_e} \frac{\mu_e}{\mu_\infty} \nu_\infty (CF'')', \end{aligned} \quad (10.10)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по Y , а параметр C определяется вторым выражением в (10.7a). В общем случае C является функцией от x и y , однако для рассматриваемой нами модельной жидкости C зависит только от x . Это позволяет упростить решение уравнений пограничного слоя приближенными методами. Поскольку действие вязкости сильнее всего проявляется вблизи стенки, то C с достаточной точностью можно аппроксимировать выражением

$$C(x) = \frac{\rho_w \mu_w}{\rho_e \mu_e} = \frac{\mu_w T_e}{T_w \mu_e}, \quad (10.11)$$

использовав при его выводе уравнение состояния совершенного газа и условие постоянства давления в направлении оси y . Полученное эмпирическое соотношение известно как *закон вязкости Чепмена — Рубезина*. Заметим, что равенство (10.11) является точным при $C = 1$, т. е. при условии, что вязкость μ пропорциональна температуре T . В действительности для воздуха при обычных условиях μ приблизительно пропорциональна $T^{0,76}$.

Обратимся теперь к первому из выражений (10.2) и запишем его в виде

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho_\infty \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} = \rho \frac{a_e}{a_\infty} F'. \quad (10.12)$$

Если через \bar{u} обозначить скорость течения несжимаемой жидкости u ($\equiv F'$), то из последнего выражения получим следующее соотношение между скоростями течений сжимаемой и несжимаемой жидкостей:

$$u = \frac{a_e}{a_\infty} \bar{u}. \quad (10.13)$$

(Скорость звука в несжимаемой жидкости считается очень большой по сравнению с u ; при этом конкретизировать вид жидкости необязательно.) Из определения скорости звука в изоэнтропном течении следует

$$a_e^2 = \gamma R T_e = \frac{\gamma R}{c_p} c_p T_e = \frac{\gamma R}{c_p} \left[H_e - \frac{u_e^2}{2} \right]. \quad (10.14)$$

Продифференцировав это выражение по X , получим

$$2a_e \frac{da_e}{dX} = - \frac{\gamma R}{c_p} \bar{u}_e \frac{du_e}{dX}. \quad (10.15)$$

Первый член в правой части уравнения (10.15) определяет градиент давления. Замечая, что $\partial F / \partial Y = \bar{u} = a_\infty / a_e u$, а $H = c_p T + u^2 / 2$, можно записать этот член в виде

$$\frac{1}{c_p T_e} \left(\frac{a_\infty}{a_e} \right)^2 H u_e \frac{du_e}{dX}. \quad (10.16)$$

Представив затем u_e в виде $u_e = a_e / a_\infty \bar{u}_e$, с помощью уравнения (10.15) можно показать, что

$$\frac{du_e}{dX} = \frac{c_p T_e}{H_e} \frac{a_e}{a_\infty} \frac{d\bar{u}_e}{dX}. \quad (10.17)$$

Если теперь подставить du_e / dX в уравнение (10.16) и вновь воспользоваться соотношением между u_e и \bar{u}_e , то уравнение (10.16) можно записать в виде

$$S \bar{u}_e \frac{d\bar{u}_e}{dX}, \quad (10.18)$$

где $S = H / H_e$. Кроме того, для совершенного газа с $C = 1$ преоб-

разованное уравнение движения (10.10) в переменных Иллингворта — Стюартсона можно записать следующим образом:

$$\nu_{\infty} F'''' + S \bar{u}_e \frac{d\bar{u}_e}{dX} = F' \frac{\partial F'}{\partial X} - F'' \frac{\partial F}{\partial X}, \quad (10.19)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по Y . Если представить C в несколько более общем виде формулой Чепмена — Рубекина (10.11), то уравнение (10.19) все еще останется справедливым, если в нем X заменить на \hat{x} , которое определяется выражением

$$d\hat{x} = C(X) dX = \frac{a_e P_e}{a_{\infty} P_{\infty}} C(x) dx. \quad (10.20)$$

Чтобы записать уравнение энергии в переменных Иллингворта — Стюартсона, примем число Прандтля равным единице. Тогда полная энтальпия будет определена уравнением (3.47b):

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial H}{\partial y} \right). \quad (3.47b)$$

Воспользовавшись соотношениями (10.2), (10.8) и (10.9) и применив процедуру, аналогичную использованной при выводе уравнения движения, приведем уравнение (3.47b) к виду

$$\nu_{\infty} S'' = F' \frac{\partial S}{\partial X} - S' \frac{\partial F}{\partial X}, \quad (10.21)$$

в котором штрихами обозначено дифференцирование по Y .

Аналогичным образом граничные условия (10.5) для адиабатного течения запишем в виде

$$Y=0, \quad F = F' = 0, \quad S' = 0, \quad (10.22a)$$

а для заданной температуры стенки ($S = S_w(x)$) — в виде

$$Y \rightarrow \infty, \quad F' \rightarrow \bar{u}_e, \quad S \rightarrow 1, 0. \quad (10.22b)$$

Легко видеть, что при $\text{Pr} = 1$ уравнение полной энтальпии (3.47b) имеет решение $H = H_e$ (т. е. $S = 1$), которое соответствует адиабатному течению. Тогда $S = 1$ должно быть одновременно и решением уравнения (10.21) и сводить уравнение (10.19) точно к стандартной форме для течения несжимаемой жидкости. Следует, однако, помнить, что при решении этого уравнения при граничных условиях (10.22) координаты x и y деформируются в соответствии с уравнением (10.8), а распределение скорости внешнего течения \bar{u}_e несжимаемой жидкости изменяется в соответствии с соотношением $u_e(x) = \{[a_e(x)]/a_{\infty}(x)\} \bar{u}_e(X)$.

Решение уравнения полной энтальпии $H = H_e$ для адиабатной стенки называется *интегралом Крокко*. Заметим, что 1) поскольку скорость u в течении с нулевым градиентом давления удовлетворяет уравнению (3.47b) при замене в нем H на u и 2) если H — это решение, то $H - H_w$ также является решением этого уравнения, указанное уравнение имеет также решение $H - H_w + (\text{const})u$. Постоянная определяется из условия $H = H_e$ при $u = u_e$, т. е. из условий во внешнем потоке. Найдя указанную постоянную, получим следующие выражения для H и T :

$$H = H_w - (H_w - H_e) \frac{u}{u_e}, \quad (10.23a)$$

$$T = T_w - \frac{1}{c_p} (H_w - H_e) \frac{u}{u_e} - \frac{u^2}{2c_p}, \quad (10.23b)$$

которые при $\text{Pr} = 1$ справедливы при произвольной температуре стенки $T_w = H_w/c_p$.

10.1. Автомодельные течения

Для автомодельных течений безразмерная функция тока f и отношение полных энтальпий S , определяемые преобразованием Фолкнера — Скэн для сжимаемой жидкости, зависят только от η , и уравнения (10.3), (10.4) и (10.6) сводятся к следующим:

$$(bf'')' + m_1 ff'' + m_2 [c - (f')^2] = 0, \quad (10.24)$$

$$(eS' + df'f'')' + m_1 fS' = 0, \quad (10.25)$$

$$\eta = 0, \quad f = 0, \quad f' = 0, \quad S = S_w \text{ или } S' = S'_w \quad (10.26a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad f' = 1, \quad S = 1. \quad (10.26b)$$

Кроме того, для автомодельных течений параметры b , e , d , c , m_1 и m_2 , определяемые выражениями (10.7), а также граничные условия не зависят от x .

Чтобы получить автомодельные решения уравнений движения и энергии, записанных через преобразованные переменные Иллингворта — Стюартсона, воспользуемся преобразованием Фолкнера — Скэн для несопряженных течений, рассмотренных в разд. 4.1:

$$\eta = \left(\frac{\bar{u}_e}{\nu_\infty X} \right)^{1/2} Y, \quad F(X, Y) = (\bar{u}_e \nu_\infty X)^{1/2} \phi(\eta) \quad (10.27)$$

и с его помощью приведем уравнения (10.19) и (10.21) к виду

$$\phi''' + \frac{m+1}{2}\phi\phi'' + m[S - (\phi')^2] = 0, \quad (10.28)$$

$$S'' + \frac{m+1}{2}\phi S' = 0. \quad (10.29)$$

Во втором из выражений (10.27) обозначение функции тока $f(\eta)$ заменено на $\phi(\eta)$, чтобы не путать его с $f(\eta)$ в (4.19), а m в уравнениях (10.28) и (10.29) — обычное обозначение для безразмерного параметра градиента давления:

$$m = \frac{X}{\bar{u}_e} \frac{d\bar{u}_e}{dX}. \quad (10.30)$$

Точно такие же уравнения получаются и при использовании приближения Чепмена — Рубезина, однако в них вместо X входит \hat{x} .

Аналогичным образом граничные условия (10.22) можно записать в виде

$$\eta = 0, \quad \phi = \phi' = 0 \quad S = S_w \text{ или } S' = 0, \quad (10.31a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad \phi' = 1, \quad S = 1. \quad (10.31b)$$

Как и раньше, решения уравнений (10.28) и (10.29) не зависят от X , если указанные граничные условия не зависят от X , т. е. если S_w и m — постоянные величины.

Требование $S = \text{const}$ означает, что температура стенки постоянна, поскольку H_e в изоэнтропном внешнем потоке постоянна, а условие $m = \text{const}$, как и в случае несопряженных течений, позволяет сделать вывод, что

$$\bar{u}_e = cX^m, \quad (10.32)$$

где c — постоянная. Таким образом, для сопряженных ламинарных пограничных слоев на непроницаемой стенке автомодельные решения можно получить лишь при условии, что \bar{u}_e и X связаны соотношением (10.32), а температура стенки постоянна. Как и в случае несопряженных ламинарных течений, преимущества автомодельных течений определяются тем, что при их исследовании вместо двух дифференциальных уравнений в частных производных достаточно решить два обыкновенных дифференциальных уравнения. Однако, как и в случае несопряженных течений, значения m , отличные от 0 и 1 (которые соответствуют течениям на поверхности плоской пластины и в окрестности критической точки), на практике встречаются редко.

Соотношение между параметрами сопряженных и несопряженных пограничных слоев

Как и в случае несопряженных автомодельных течений, параметры пограничного слоя, такие как δ^* , θ и c_f , можно представить в упрощенной форме, используя преобразование Фолкнера — Скэн для сжимаемой жидкости или преобразование Иллингворта — Стюартсона. Можно также вывести формулы, связывающие параметры сопряженных пограничных слоев с решениями уравнений (10.28) и (10.29) при граничных условиях (10.31) и $S_w = \text{const}$. Для *адиабатных* течений их решения сводятся к решениям для несопряженных течений, и в этом случае можно воспользоваться данными табл. 4.1.

В качестве примера рассмотрим течение с нулевым градиентом давления, описываемое уравнениями (10.28) и (10.29) для течения несжимаемой жидкости, которые являются аналогом уравнений для течения сжимаемой жидкости. Независимо от того, подводится или не подводится тепло к жидкости, эти уравнения имеют вид

$$\phi''' + \frac{1}{2}\phi\phi'' = 0, \quad (10.33)$$

$$S'' + \frac{1}{2}\phi S' = 0, \quad (10.34)$$

т. е. совпадают по виду с уравнениями (4.31) и (4.32) для течения несжимаемой жидкости при $m = 0$, $n = 0$ и $\text{Pr} = 1$. Разрешив два последних уравнения относительно ϕ и приравняв полученные выражения, найдем

$$\frac{S''}{S'} = \frac{\phi'''}{\phi''}. \quad (10.35)$$

Проинтегрировав это выражение дважды при граничных условиях (10.31) и полагая для автомодельных течений $S_w = \text{const}$, получим выражение

$$S = S_w - (S_w - 1)\phi', \quad (10.36)$$

совпадающее по форме с уравнениями (10.23), записанными через параметр S . Из (10.36) следует, что распределение статической температуры поперек пограничного слоя определяется выражением

$$\frac{T}{T_e} = -\frac{\bar{u}_e^2}{2c_p T_e} (\phi')^2 + \left(1 + \frac{\bar{u}_e^2}{2c_p T_e}\right) [\phi' + S_w(1 - \phi')]. \quad (10.37)$$

Толщина вытеснения пограничного слоя по определению равна

$$\delta_c^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy \quad (10.38a)$$

или в переменных Иллингворта — Стюартсона —

$$\delta_c^* = \frac{a_\infty \rho_\infty}{a_e \rho_e} \left[\int_0^\infty \left(\frac{\rho_e}{\rho} - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} \right) dY \right]. \quad (10.38b)$$

Для совершенного газа это выражение приобретает вид

$$\delta_c^* = \frac{a_\infty \rho_\infty}{a_e \rho_e} \left[\int_0^\infty \left(\frac{T}{T_e} - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} \right) dY \right]. \quad (10.38c)$$

Распределение температур для адиабатного течения ($S = 1$) можно получить, вспомнив определение полной энтальпии

$$H = c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_e + \frac{u_e^2}{2},$$

или в переменных Иллингворта — Стюартсона —

$$\frac{T}{T_e} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} \right)^2 \right]. \quad (10.39)$$

Подставив уравнение (10.39) в уравнение (10.38c), перегруппировав члены и учитывая, что при постоянном давлении $a_\infty \rho_\infty / a_e \rho_e = 1$, представим δ_c^* в виде

$$\delta_c^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} \right) dY + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \int_0^\infty \left[1 - \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} \right)^2 \right] dY. \quad (10.40)$$

Воспользовавшись уравнением

$$\int_0^\infty (1 - z^2) dY = \int_0^\infty z(1 - z) dY + \int_0^\infty (1 - z) dY,$$

в котором z — любая переменная, приведем уравнение (10.40) к виду

$$\delta_c^* = \delta_i^* + \sigma(\delta_i^* + \theta_i), \quad (10.41)$$

где δ_i^* и θ_i — безразмерные толщины вытеснения и потери импульса для несжимаемой жидкости (табл. 4.1), а σ — параметр, связанный с числом Маха соотношением

$$\sigma = \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2. \quad (10.42)$$

С помощью процедуры, аналогичной описанной выше для толщины вытеснения, можно получить соотношения между толщинами потери импульса и локальными коэффициентами поверхностно-

го трения для сжимаемой и несжимаемой жидкостей. В случае адиабатного течения на поверхности плоской пластины они имеют вид

$$\theta_c = \theta_i, \quad c_{f_c} = \frac{\rho_w}{\rho_\infty} \frac{\mu_w}{\mu_\infty} c_{f_i}, \quad (10.43)$$

где c_{f_i} — локальный коэффициент поверхностного трения в несжимаемой жидкости при том же значении $u_e \theta / \nu_e$, что и для сжимаемой жидкости.

С учетом равенства $\theta_c = \theta_i$ можно переписать уравнение (10.41) в виде

$$H_c = H_i + \sigma(H_i + 1), \quad (10.44)$$

где $H = \delta^* / \theta$ — формпараметр, а h_e полная энтальпия. Из уравнения (10.44) следует, что формпараметр H_c ламинарного пограничного слоя в сжимаемой жидкости возрастает с ростом числа Маха. Это происходит из-за повышения температуры жидкости в результате вязкой диссипации кинетической энергии, вследствие которого плотность жидкости ρ вблизи обтекаемой поверхности уменьшается, так что отношение подинтегрального выражения $\rho u / \rho_e u_e (1 - u/u_e)$ в определении θ к подинтегральному выражению $1 - \rho u / \rho_e u_e$ в определении δ^* становится меньше, чем при $\rho / \rho_e = 1$.

В предположении $\mu \propto T$ из второго соотношения (10.43) следует, что поскольку $T_e = T_\infty$, значение локального коэффициента поверхностного трения при адиабатном течении сжимаемой жидкости на поверхности плоской пластины равно значению той же величины в преобразованном течении (несжимаемой жидкости).

Решение для течений с теплообменом

В случае адиабатного течения, когда $S \equiv 1$, уравнение движения (10.28) не связано с уравнением энергии (10.29). Это позволяет использовать решения уравнения (10.28) для течений несжимаемой жидкости при исследовании сопряженных адиабатных течений. Для течений с теплообменом, когда $S_w \neq 1$, уравнения движения и энергии приходится решать совместно. В этом случае приходится искать решения системы уравнений (10.28) и (10.29) при разных значениях S_w и m . Отметим, что для каждого значения безразмерного градиента давления m можно получить разные решения, соответствующие разным значениям S_w ($S_w \neq 1$).

На рис. 10.1 показана зависимость параметра сдвиговых напряжений на стенке ϕ_w'' от параметра градиента давления m и параметра теплообмена S_w . Хотя при нулевом градиенте давления ($m = 0$)

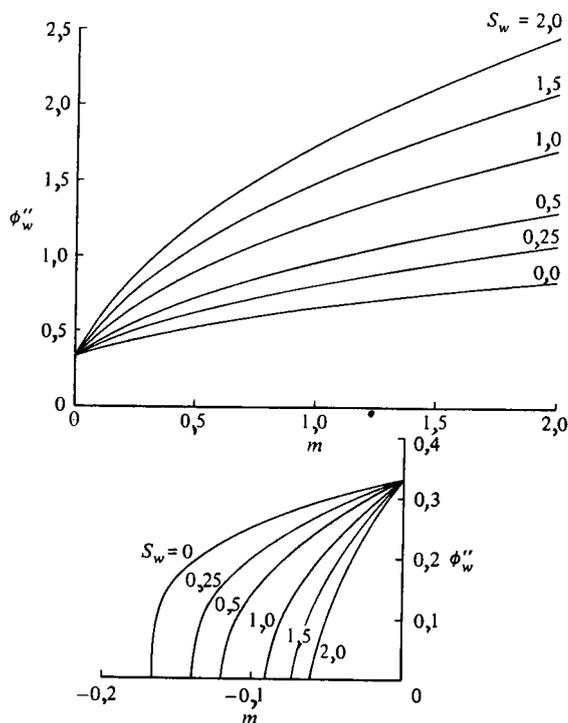


Рис. 10.1. Зависимость параметра сдвиговых напряжений на стенке ϕ_w'' от параметра градиента давления m и параметра теплообмена S_w для автомодельных течений сжимаемой жидкости.

При $m > 0$ и $m < 0$ использованы разные масштабы.

при использовании преобразования Иллингворта — Стюартсона решение уравнения движения в преобразованных переменных не зависит от S_w (см. уравнение (10.33)), в течениях с градиентом давления, когда $m \neq 0$, теплообмен оказывает сильное влияние на характер получаемого решения. Из рис. 10.1 следует, что при заданном градиенте давления нагрев стенки ($S_w > 1$) ведет к увеличению значения ϕ_w'' и, наоборот, охлаждение стенки ($S_w < 1$) ведет к уменьшению значения ϕ_w'' .

На рис. 10.2 и 10.3 представлены профили скорости и энтальпии поперек пограничного слоя при разных значениях S_w и m . Из рис. 10.2, а видно, что при *благоприятном* градиенте давления скорость в пограничном слое на нагреваемой поверхности может превысить скорость внешнего течения ($\phi' > 1$). Этот эффект наблюда-

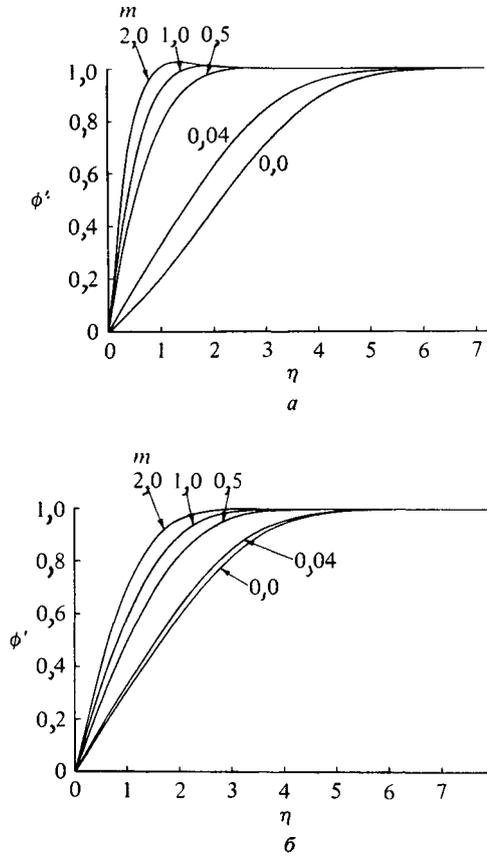


Рис. 10.2. Профили безразмерной скорости ϕ' в зависимости от η при разных значениях m .
 а — $S_w = 2,0$; б — $S_w = 0$.

ется при всех положительных значениях m ($0 < m < \infty$), но проявляется тем слабее, чем меньше m . С физической точки зрения это объясняется тем, что при $m > 0$ благоприятный градиент давления ускоряет жидкость. При нагревании стенки плотность жидкости ρ , входящая в уравнение состояния, уменьшается, в результате чего усиливается влияние градиента давления на ускорение жидкости, увеличивается ϕ' и соответственно, как отмечалось выше, растет ϕ''_w . Влияние нагрева сказывается даже при нулевом градиенте давления ($m = 0$), так как μ зависит от y .

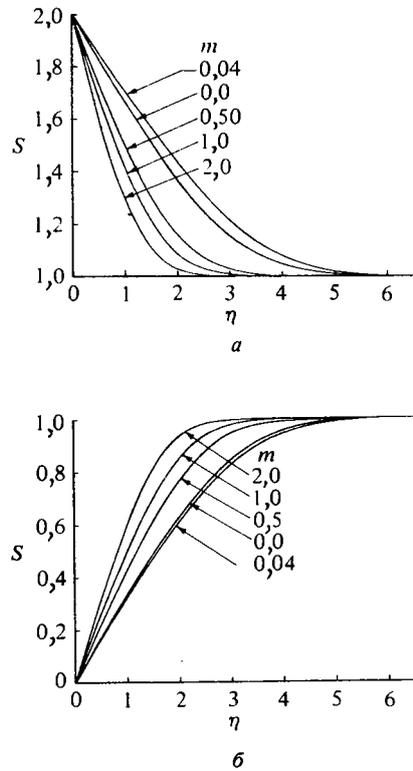


Рис. 10.3. Профили безразмерной энтальпии S в зависимости от η при разных значениях m .

$a - S_w = 2.0$; $b - S_w = 0$.

Из рис. 10.3 следует, что влияние градиента давления на профили энтальпии не столь заметно, как его влияние на профили скорости. Это обстоятельство уже отмечалось выше при рассмотрении несопряженных течений (рис. 4.4).

В табл. 10.1 приведены решения уравнений (10.28) и (10.29) при нескольких значениях S_w и $m = 1$. Видно, с увеличением нагрева безразмерная толщина потери импульса уменьшается и в предельных случаях (при $\phi' > 1$) может стать отрицательной. С другой стороны, при охлаждении стенки безразмерная толщина вытеснения уменьшается и, как видно из табл. 10.1, может даже стать отрицательной.

Таблица 10.1. Решения уравнений (10.28) и (10.29) при $m = 1$

S_w	ϕ_w''	$\delta_1^* = \int_0^\infty (S - \phi') d\eta$	$\theta_1 = \int_0^\infty \phi'(1 - \phi') d\eta$	H	S_w'
2	1,7361	1,3855	0,1753	7,904	-0,6154
1,5	1,4911	1,0235	0,2338	4,378	-0,2972
1,0	1,2326	0,6479	0,2919	2,216	0
0,5	0,9545	0,2567	0,3489	0,736	0,2710
0,25	0,8060	0,0529	0,3766	0,141	0,3041
0	0,6487	-0,1577	0,4032	-0,391	0,5066

10.2. Неавтономные течения

Как отмечалось в начале этой главы, расчет тепло- и массообмена для сопряженных неавтономных ламинарных течений несколько отличается от расчета для несопряженных неавтономных течений. Главная причина этого в том, что в уравнения неразрывности и движения входят физические свойства жидкости, такие как плотность ρ и динамическая вязкость μ , значения которых определяются полем температур. Поэтому решения указанных уравнений в отличие от решений уравнений для несопряженных течений, зависят от решения уравнения энергии, которое в свою очередь связано с решениями уравнений неразрывности и движения (как и в случае несопряженных течений). Следовательно, необходимо прибегнуть к итерационной процедуре типа описанной в разд. 13.4.

В качестве примера двумерного сопряженного неавтономного ламинарного течения рассмотрим течение Хоурта (задача 4.24), для которого скорость во внешнем потоке линейно зависит от x :

$$u_e = u_\infty \left(1 - \frac{x}{8}\right). \tag{10.45}$$

Вначале (при $x = 0$) такое течение может иметь профиль скорости пренебрежимо малой толщины, как на плоской пластине, однако в нем действует неблагоприятный градиент давления и это в конце концов приводит к отрыву потока. Согласно расчетам, в случае несопряженного течения без теплообмена отрыв происходит при $x = 0,96$ (задача 4.24).

Чтобы продемонстрировать влияние теплообмена на положение точки отрыва, рассмотрим сначала уравнения движения и энергии, записанные в переменных Иллинговорта — Стюартсона, т. е. уравнения (10.19), (10.21) при граничных условиях (10.22). Используя преобразование Фолкнера — Скэн (10.27) и полагая, что безразмерная функция тока ϕ зависит также и от X , перепишем указанные

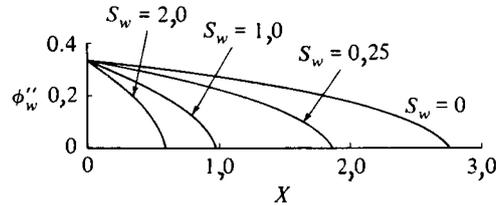


Рис. 10.4. Зависимость безразмерного параметра сдвиговых напряжений на стенке ϕ_w'' для сжимаемого течения Хюарта от X и безразмерной температуры стенки.

уравнения и их граничные условия в виде

$$\phi''' + \frac{m+1}{2} \phi \phi'' + m[S - (\phi')^2] = X \left(\phi' \frac{\partial \phi'}{\partial X} - \phi'' \frac{\partial \phi}{\partial X} \right), \quad (10.46)$$

$$S'' + \frac{m+1}{2} \phi S' = X \left(\phi' \frac{\partial S}{\partial X} - S' \frac{\partial \phi}{\partial X} \right), \quad (10.47)$$

$$\eta = 0, \quad \phi = \phi' = 0, \quad S = S_w(x) \text{ или } S' = 0, \quad (10.48a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad \phi' = 1, \quad S = 1. \quad (10.48b)$$

Найдем решения этих уравнений численным методом с помощью программы, составленной на языке Фортран и описанной в разд. 13.4 и 13.5. Решения будем искать при $S_w (\equiv H_w/H_e) = 2,0; 1,0; 0,25$ и 0 , т. е. для случаев, когда стенка соответственно нагрета ($S_w = 2,0$), охлаждена ($S_w = 0,25$), охлаждена практически до нулевой энтальпии ($S_w = 0$) или является адиабатной ($S_w = 1$). В последнем случае в соответствии с решением уравнения движения точка отрыва должна располагаться при $X = 0,96$, как и в случае несопряженных течений.

На рис. 10.4 и рис. 10.5 показаны зависимости безразмерных параметров сдвиговых напряжений на стенке ϕ_w'' и теплообмена S_w' от

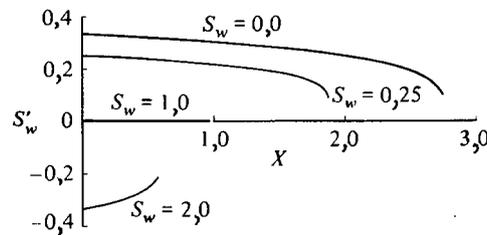


Рис. 10.5. Зависимость параметра теплообмена на стенке S_w' для сжимаемого течения Хюарта от X и безразмерной температуры стенки.

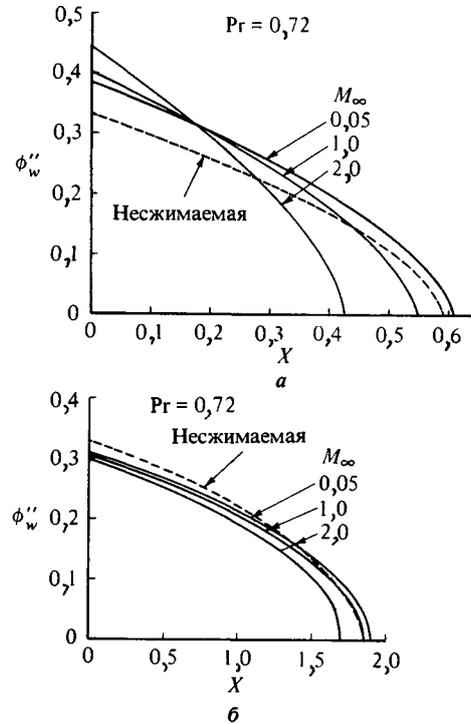


Рис. 10.6. Влияние числа Маха на параметр сдвиговых напряжений на стенке ϕ_w'' .
 а — $S_w = 2,0$; б — $S_w = 0,25$.

X при четырех разных значениях S_w . Как и предполагалось, при $S_w = 1$ точка отрыва располагается при $X = 0,96$ (рис. 10.4). При нагревании стенки она смещается вверх по потоку, и при $S_w = 2$ ее положение соответствует $X = 0,6$. Охлаждение, наоборот, стабилизирует пограничный слой и затягивает отрыв. Согласно расчетам, при $S_w = 0,25$ отрыв происходит в точке $X = 1,86$, а при $S_w = 0$ — в точке $X = 2,74$. Из рис. 10.5 видно также, что в точке отрыва параметр теплообмена на стенке S_w' имеет конечное значение. Это, так же как и результаты расчета несопряженных течений, представленные в табл. 4.3, свидетельствует о том, что вблизи точки отрыва аналогия Рейнольдса неприменима.

На рис. 10.6 и 10.7 показано влияние чисел Маха и Прандтля на решения уравнений движения и энергии. Расчеты были сделаны для распределения скорости внешнего потока, соответствующего тече-

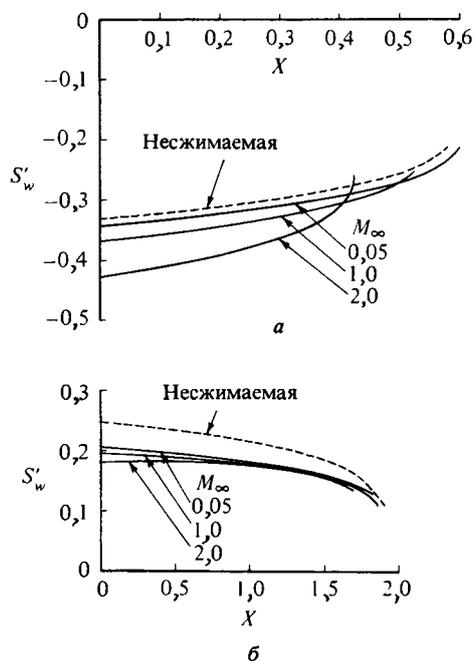


Рис. 10.7. Влияние числа Маха на параметр теплообмена на стенке S'_w .
 а — $S_w = 2,0$; б — $S_w = 0,25$.

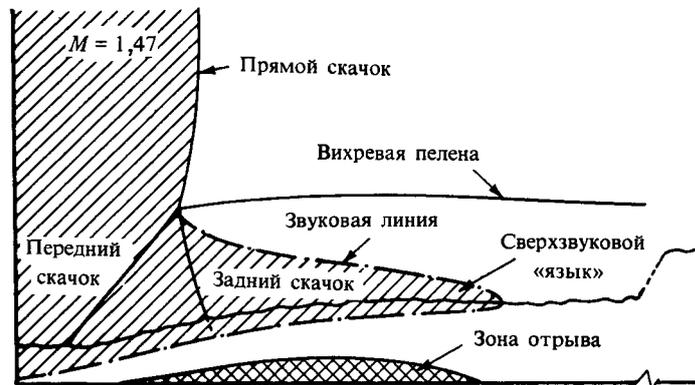
нию Хоурта. Решались уравнения движения и энергии (10.3) и (10.4) при $S_w = 2,0$ и $0,25$. На рис. 10.6 и 10.7 приведены результаты расчетов при числе Прандтля $0,72$ и числах Маха набегающего потока $0,05$; $1,0$ и $2,0$. На указанных рисунках представлены также результаты для несжимаемой жидкости, полученные путем решения уравнений (10.46) и (10.47).

Согласно результатам, представленным на рис. 10.6, число Маха сильно влияет на положение точки отрыва как при нагревании, так и при охлаждении стенки. При нагревании ($S_w = 2$) точка отрыва смещается от $X \approx 0,61$ при $M_\infty = 0,05$ до $X \approx 0,55$ при $M_\infty = 1,0$ и до $X \approx 0,425$ при $M_\infty = 2,0$. При охлаждении стенки ($S_w = 0,25$) точка отрыва смещается от $X \approx 1,9$ при $M_\infty = 0,05$ до $X \approx 1,86$ при $M_\infty = 1,0$ и до $X \approx 1,7$ при $M_\infty = 2,0$. Видим, что при заданном значении S_w влияние числа Маха на положение точки отрыва аналогично влиянию нагрева при заданном значении M_∞ ;

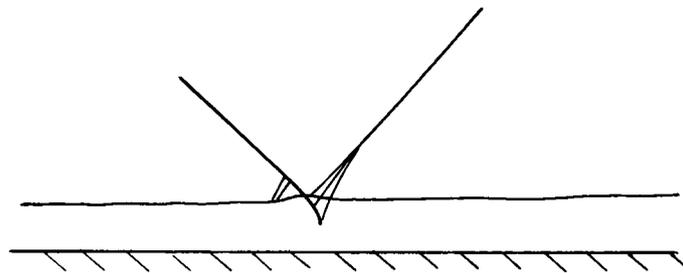
иначе говоря, точка отрыва смещается вверх по течению как при увеличении S_w , так и при увеличении M_∞ . Из рис. 10.6 и 10.7 также следует, что при $M_\infty < 1$ параметр сдвиговых напряжений на стенке ϕ_w'' и положение точки отрыва слабо зависят от сжимаемости. Кроме того, видно также, что при охлаждении стенки величина параметра теплообмена S_w' меньше зависит от числа Маха, чем при нагревании.

10.3. Взаимодействие ударных волн с пограничным слоем

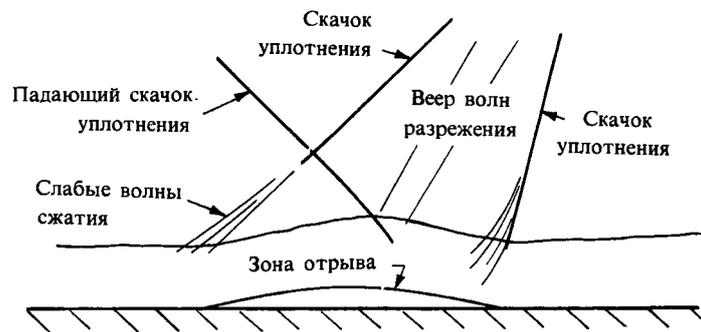
Ударная волна — это резкое повышение давления и плотности в очень тонком «волновом» фронте в сверхзвуковом потоке газа. Для нее, конечно, справедливы уравнения сохранения массы, количества движения и энергии, выписанные выше, однако при переходе через ударную волну резко падает полное давление и возрастает энтропия. На диссипацию оказывает влияние вязкость (с учетом того обстоятельства, что толщина ударной волны составляет всего лишь несколько длин свободного пробега молекул газа), однако особенности процесса потери полного давления и изменения других параметров течения от вязкости не зависят. Возрастание энтропии свидетельствует о невозможности существования концентрированной «волны разрежения», так как в этом случае энтропия должна была бы убывать. Простейшим видом волны сжатия является «прямой» скачок уплотнения, т. е. скачок, перпендикулярный направлению течения (рис. 10.8, а), для которого повышение давления в скачке однозначно определяется числом Маха набегающего потока M_∞ . Если $M_\infty = 1,3$, то давление в скачке возрастает в 1,80 раза (при отношении удельных теплоемкостей 1,4, как у воздуха), а полное давление уменьшается на 2%. Число Маха за прямым скачком уплотнения всегда меньше единицы и в рассматриваемом случае составляет 0,79. С ростом числа Маха набегающего потока повышение давления и потери полного давления в прямом скачке уплотнения возрастают, а число Маха за скачком при этом убывает. При числе Маха набегающего потока 1,3 интенсивности прямого скачка уплотнения вполне достаточно, чтобы вызвать отрыв *турбулентного* пограничного слоя от поверхности, на которую падает скачок. *Косые* скачки уплотнения (рис. 10.8, б, в) отличаются от прямых тем, что имеют составляющую скорости, направленную вдоль скачка. При переходе через скачок эта составляющая скорости остается неизменной, а повышение давления за ним определяется в основном нормальной составляющей скорости. Детальное изложе-



а



б



в

Рис. 10.8. Взаимодействие между прямым скачком уплотнения и турбулентным пограничным слоем (а) [4]; слабый падающий скачок уплотнения (б); сильный косой скачок уплотнения (отраженные скачки уплотнения и веер волн разрежения сливаются в один скачок уплотнения) (в).

ние теории скачков уплотнения читатель найдет, например, в книге Липмана и Рошко [3].

В этом разделе рассматривается взаимодействие скачков уплотнения со сдвиговым слоем. Два основных случая такого взаимодействия — это взаимодействие с «падающим» скачком, т. е. со скачком, приходящим извне, и взаимодействие со скачком, образующимся на твердой поверхности, лежащей под пограничным слоем, и распространяющимся вовне. Отметим, что в последнем случае та или иная система скачков образуется даже в отсутствие пограничного слоя. На рис. 10.9, а показана структура скачков уплотнения и вееров волн разрежения, образующихся в струе, истекающей со сверхзвуковой скоростью в покоящуюся среду, когда дав-

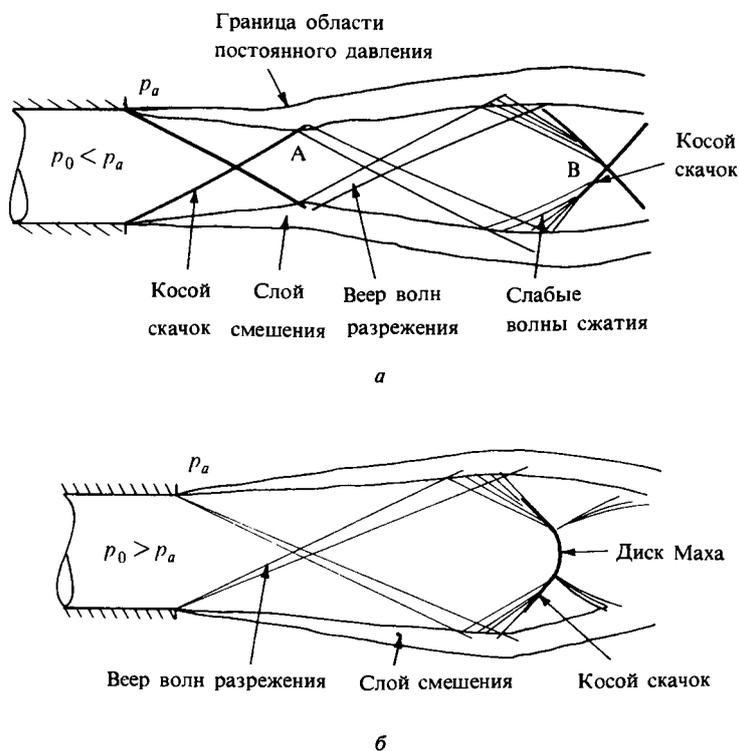


Рис. 10.9. Взаимодействие между скачками уплотнения или волнами разрежения и слоем смешения на границе струи.

а — перерасширенная струя (давление на срезе сопла ниже давления в окружающей среде);
 б — недорасширенная струя (давление на срезе сопла выше давления в окружающей среде).

ление в окружающей среде больше давления на срезе сопла. Такое течение возникает, например, при старте ракеты-носителя, сопло которой рассчитано на работу в верхних слоях атмосферы. На рис. 10.9, б показана недорасширенная струя, т. е. истекающая в пространство, давление в котором меньше, чем на срезе сопла. Основное различие между двумя указанными течениями состоит в том, что в начале перерасширенной струи образуется скачок уплотнения, в котором давление повышается до давления на границе струи, равного атмосферному, а в начале недорасширенной струи образуется веер волн разрежения, в котором давление *падает* до уровня атмосферного. Расширение происходит на конечной длине, так как скорость звука при расширении падает, а число Маха M возрастает, как и угол между волной слабого возмущения и направлением течения, равный $\arcsin(1/M)^1$.

Наоборот, при сжатии число Маха вниз по течению убывает, и наклон волны слабого возмущения за скачком больше, чем перед ним; в результате слабые волны сжатия сливаются, образуя скачок уплотнения. Там, где скачок уплотнения пересекает границу области постоянного давления, например границу окружающей среды в точке А на рис. 10.9, а, происходит его отражение в виде волны разрежения (грубо говоря, чтобы давление на границе оставалось постоянным, вызванное скачком повышение давления должно немедленно смениться его падением, т. е. веером волн разрежения). В противоположность этому веер волн разрежения отражается от границы постоянного давления в виде ряда слабых волн сжатия, которые затем сливаются в скачок уплотнения, так что ударная волна, образующаяся вблизи точки В на рис. 10.9, а, на первый взгляд не отличается по интенсивности от первого скачка, образовавшегося на срезе сопла. В действительности в скачке уплотнения теряется часть полного давления, и поэтому последовательные скачки уплотнения и вееры волн разрежения не совсем идентичны. Как видно из рис. 10.9, а, в точке пересечения скачков угол наклона скачка изменяется, и если пересекающиеся скачки уплотнения достаточно интенсивны, то вблизи точки пересечения они сливаются в прямой скачок (рис. 10.9, б). Поскольку скачки уплотнения могут образовываться только в сверхзвуковых потоках газов, скачок в точке А, достигая дозвуковой внешней части слоя смещения на границе струи, ослабляется, превращаясь в область непрерывного сжатия, а дозвуковое течение перестраивается таким образом, что на

¹⁾ Исследованию такого рода струй посвящена монография [2*]. — Прим. ред.

внешней границе сдвигового слоя, где воздух почти неподвижен, сжатие исчезает вообще. Отметим, что направление течения меняется в косом скачке уплотнения или веере волн разрежения независимо от того, имеется сдвиговый слой или его нет.

Другой тип взаимодействия между скачком уплотнения или веером волн разрежения и сдвиговым слоем реализуется в следе за трансзвуковой «решеткой» (рядом лопаток в осевой турбине), когда волны сжатия, сходящиеся с одной лопатки, например с ее задней кромки, пересекают след за другой лопаткой. В этом случае волна сжатия проходит сквозь след, и лишь в том случае, если скорость в центральной части следа дозвуковая, развивается сильное возмущение давления, распространяющееся вверх и вниз по течению от точки пересечения.

На рис. 10.8, б показано взаимодействие ударной волны, возникшей в набегающем потоке, с пограничным слоем. Граничным условием на твердой поверхности является требование постоянства направления течения, а не постоянства давления, и поэтому падающий скачок уплотнения, отклоняющий течение вниз, сопровождается отраженным скачком уплотнения (а не веером волн разрежения), в котором внешний поток отклоняется обратно вверх, приобретая почти прежнее направление. Как и в случае слоя смещения на границе струи, скачок уплотнения не может проникнуть в дозвуковую часть пограничного слоя вблизи твердой поверхности; поэтому вниз и вверх по течению от точки падения скачка на поверхности твердого тела образуются зоны повышенного давления.

Независимо от того, падает ли скачок уплотнения на поверхность тела (как правило, падающие скачки косые) или образуется на самой поверхности и, следовательно, должен быть перпендикулярен к ней (чтобы течение номинально оставалось параллельным поверхности), в пограничном слое возникает большой положительный (неблагоприятный) градиент давления, вызывающий торможение потока, которое особенно сильно проявляется вблизи стенки. Если интенсивность скачка достаточно велика, может произойти отрыв пограничного слоя (рис. 10.8, а). Длина зоны отрыва часто оказывается небольшой, так как внешний поток заставляет пограничный слой опять присоединиться к стенке. Как видно из рис. 10.8, в, торможение потока в передней части зоны взаимодействия заставляет линии тока отходить от поверхности тела, в результате чего в сверхзвуковой части течения образуются волны сжатия, которые затем сливаются в отраженный скачок. Первый и второй отраженные скачки, а также веер волн разрежения, исходящий из точки пересечения падающего скачка с пограничным слоем, в дальней-

шем также сливаются в скачок уплотнения, интенсивность которого как раз такова, что позволяет компенсировать отклонение потока в падающем скачке. Если интенсивность падающего скачка достаточно велика, то может образоваться почти прямой скачок, направленный вонне от сдвигового слоя к точке пересечения прямого и отраженного скачков, как в случае пересечения скачков вблизи оси струи (рис. 10.9). Аналогичная, хотя и не столь явно выраженная структура формируется и в случае отсутствия отрыва, так как заторможенная жидкость вблизи стенки ведет себя подобно границе области постоянного давления независимо от того, движется жидкость по течению или против него.

С другими случаями взаимодействия скачков уплотнения со сдвиговыми слоями мы сталкиваемся при изучении течения за обращенной назад ступенькой, являющегося прототипом многих более сложных течений, в которых присоединение к стенке происходит за протяженной зоной отрыва, образовавшейся под действием скачка уплотнения или по другим причинам. Как видно из рис. 10.10, расширение течения происходит на кромке уступа, и поскольку давление в зоне отрыва за уступом почти постоянно, то в соответствии с обычными правилами для сверхзвуковых течений, в которых угол наклона линии тока и давление связаны простым соотношением, линии тока во внешнем течении почти прямолинейны. В результате образуется «нормальный» свободный слой смешения (разд. 8.2 или 8.4), и если толщина начального пограничного слоя невелика по сравнению с высотой ступеньки, то течение в слое смешения практически не зависит от начальных условий. Вблизи точки присоединения часть жидкости попадает в зону отрыва под слоем

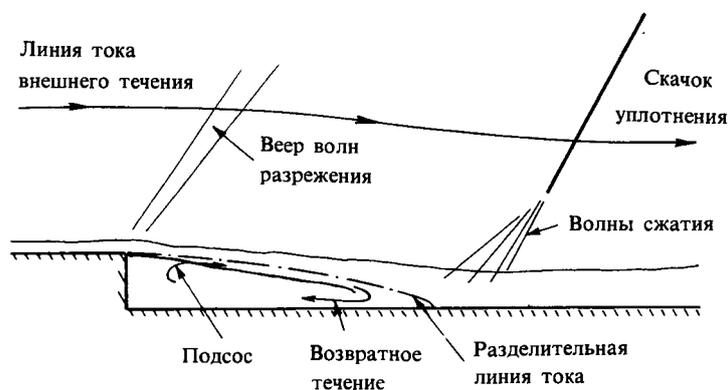


Рис. 10.10. Сверхзвуковое течение за обращенной назад ступенькой.

смещения (рис. 10.10). Такое возвратное течение должно возникнуть обязательно, так как без него основной поток не может вновь присоединиться к стенке. Градиент давления вблизи точки присоединения велик, поскольку здесь происходит поворот потока, который вновь начинает движение вдоль стенки. Существование зоны повышенного давления вблизи стенки обуславливает образование во внешней части течения скачка уплотнения, в котором номинально компенсируется расширение течения на кромке уступа. Следовательно, в данном случае скачок уплотнения правильнее рассматривать не как падающий на сдвиговый слой, а как создаваемый самим сдвиговым слоем.

Свободное взаимодействие и влияние набегающего потока

Удивительной особенностью взаимодействия ударных волн с пограничными слоями (особенно ламинарными) является то, что скачок средней интенсивности, вызывающий в типичных случаях подъем давления на 20% и более, возмущает течение в пограничном слое на значительном расстоянии вверх по потоку от места его падения. На первый взгляд это явление кажется непонятным, поскольку невязкое течение вне пограничного слоя сверхзвуковое и возникающие в нем возмущения не могут распространяться против потока. Более того, уравнения пограничного слоя параболические и, следовательно, в отсутствие отрыва возмущения могут распространяться только по потоку. Возмущения, распространяющиеся вверх по потоку, можно описать только с помощью полных уравнений Навье — Стокса, поскольку они являются эллиптическими и, следовательно, допускают распространение возмущений в указанном направлении. Однако и эти уравнения позволяют объяснить распространение возмущений вверх по потоку в пограничном слое лишь на одну-две его толщины, т. е. на гораздо меньшее расстояние, чем наблюдается в реальных ламинарных течениях.

Объяснение этого замечательного явления дали Осватич и Вигхардт [5]. Они заметили, что характер взаимодействия пограничного слоя с внешним сверхзвуковым потоком таков, что течение в точке $x = x_0$ может спонтанно развиваться следующим образом. Пусть давление во внешнем потоке при $x = x_0$ несколько возросло. Тогда при $x < x_0$ пограничный слой будет находиться под действием неблагоприятного градиента давления и его толщина должна увеличиться. В результате возрастает и толщина вытеснения, и эффективная скорость вдува $v_w = (1/\rho_e)d(\rho_e u_e \delta^*)/dx$ (см. уравнение (10.68)). Как только это произойдет, внешнее течение отклонится

от стенки, а давление возрастет в соответствии с формулой Аккерета

$$\Delta p = \frac{u_e \rho_e U_w}{\sqrt{M_e^2 - 1}}. \quad (10.49)$$

Соответствующим образом будет развиваться и пограничный слой, пока какие-либо другие факторы не изменят условия его взаимодействия с внешним течением. Если указанный процесс пойдет слишком далеко, то пограничный слой оторвется и дальнейшее увеличение его толщины будет сопровождаться уменьшением градиента давления. Через некоторое время давление достигнет постоянного значения и в дальнейшем будет сохранять его, а толщина оторвавшегося слоя будет продолжать расти. Уменьшение неблагоприятного градиента давления в отрывных течениях объясняется тем, что скорость возвратного течения на нижней границе пограничного слоя очень мала и для ее поддержания требуется лишь очень небольшой перепад давления.

Если же предположить теперь, что давление во внешнем течении несколько понизилось, то в пограничном слое произойдут изменения, ведущие к дальнейшему падению давления, так что в любом случае слабое возмущение усиливается. Как бы то ни было, приемлемой предельной формы взаимодействия не существует, и течение развивается до тех пор, пока допущение о делении поля течения на вязкое внешнее течение и пограничный слой не потеряет смысла. Два указанных вида взаимодействия пограничного слоя со сверхзвуковым внешним течением в литературе обычно называют *свободным взаимодействием сжатия* и *свободным взаимодействием расширения*. Первое из них развивается при падении на пограничный слой скачков уплотнения и обтекании обращенной назад ступеньки, а второе — в течениях перед ступеньками, обращенными навстречу потоку.

При дозвуковом внешнем течении пограничный слой ведет себя иначе, так как возмущения, возникающие в нем и во внешнем течении, действуют в противоположных направлениях. Например, небольшое *увеличение* давления вызывает утолщение пограничного слоя и индуцирует положительную скорость v_s , направленную по нормали к стенке; в результате давление несколько *уменьшается*.

Главной причиной ограниченности развития свободного взаимодействия обоих видов в пограничном слое является изменение давления с расстоянием x , которое должно компенсироваться какими-либо геометрическими или физическими особенностями поля тече-

ния. В противном случае на больших расстояниях от тела давление не будет уравновешено.

Соотношения между масштабами характерных величин развивающейся части зоны свободного взаимодействия были получены Лайтхиллом [6]. Как и следовало ожидать, характерная длина (отсчитываемая вдоль поверхности тела), на которой развивается взаимодействие, мала и формально имеет порядок $\delta^* R^{1/8}$, где δ^* — толщина вытеснения пограничного слоя, а R — число Рейнольдса, равное $u_e x_0 / \nu_w$. Практически характерная длина равна нескольким толщинам пограничного слоя. Отличительной чертой свободного взаимодействия сжатия, обуславливающей его особое значение для практических расчетов, является устойчивость конечной стадии его развития. Как уже отмечалось, на этой стадии развития в течении образуется клиновидная зона отрыва, при обтекании которой происходит отклонение натекающего пограничного слоя и невязкого внешнего течения. В случае теплоизолированных стенок это отклонение сопровождается повышением давления, определяемым выражением

$$\frac{1}{2} \frac{c C^{1/4} \lambda_0^{1/2} \rho_e u_e^2}{R^{1/4} (M_e^2 - 1)^{1/4}}, \quad (10.50)$$

в котором λ_0 — постоянная Чепмена, равная $T_e \mu_e / T_w \mu_w$, а c — почти постоянная величина, примерно равная 1,6. Под этой движущейся по течению жидкостью находится зона «возвратного течения», в которой жидкость совершает медленное вращательное движение.

Поскольку развитие свободного взаимодействия на первый взгляд кажется странным, изложим подробнее соображения, которые позволили Лайтхиллу сформулировать соотношения между масштабами характерных величин. Это поможет читателю лучше понять, как они были получены.

В качестве исходной точки анализа используем простой, но в то же время замечательный результат, впервые полученный Прандтлем, и известный как *теорема транспозиции*, которая утверждает, что если $u(x, y)$, $v(x, y)$, $T(x, y)$ есть решение уравнений пограничного слоя установившегося течения, то $U(x, Y)$, $V(x, Y)$, $\theta(x, Y)$ также является их решением, причем

$$Y = y + A(x), \quad U(x, Y) = u(x, y), \quad V = v - A'(x)u, \quad \theta = T, \quad (10.51)$$

а $A(x)$ — произвольная функция x . Это утверждение можно легко доказать, подставив выражения (10.51) в уравнения пограничного

слоя. Рассматриваемая теорема является строгой и не налагает каких-либо ограничений на вид функции $A(x)$; в частности, можно принять $A'(x) = O(R^{-1/4})$, где $R = u_e x_0 / \nu_w$ — число Рейнольдса течения. Тогда вклад $A'(x)u$ в величину V оказывается гораздо больше, чем вклад v , который имеет порядок величины $R^{-1/2}u$. Следовательно, величиной v в выражениях (10.51) можно пренебречь.

Для простоты рассмотрим пограничный слой на поверхности плоской пластины, помещенной в однородный внешний поток. Пусть центр зоны свободного взаимодействия находится в точке x_0 пограничного слоя, а расстояние, на котором она развивается, мало по сравнению с x_0 , но велико по сравнению с $\delta^* = O(R^{-1/2}x_0)$. Пусть, кроме того, взаимодействие описывается вытеснением линий тока и характеризуется функцией $A(x)$, которую требуется найти. Поэтому в первом приближении будем считать, что любой индуцированный градиент давления не влияет на свойства течения в большей части пограничного слоя в пределах зоны взаимодействия. Из выражений (10.51) следует, что нормальная составляющая скорости непосредственно за пределами пограничного слоя определяется выражением

$$v_e(x) = v(x_0, \infty) - A'(x)u_e(x_0). \quad (10.52)$$

В соответствии со сказанным выше, величиной $v(x_0, \infty)$ в последнем уравнении можно пренебречь. Заметим, что разность $x - x_0$ считается малой, так что в *невозмущенном* пограничном слое характеристики течения в первом приближении постоянны. Тогда индуцированное в соответствии с уравнением (10.49) давление определяется выражением

$$\Delta p = - \frac{u_e^2(x_0)\rho_e A'(x)}{(M_e^2 - 1)^{1/2}}. \quad (10.53)$$

Хотя это приращение давления для большей части пограничного слоя невелико, вблизи поверхности пластины оно становится существенным, так как здесь скорость течения мала. Помимо указанного индуцированного давления, вблизи поверхности пластины простое решение (10.51) должно быть также модифицировано, поскольку $U \neq 0$ при $y = 0$. Вблизи $y = 0$ приходится вводить динамический пограничный подслой, в котором жидкость движется под действием перепада давления Δp и который удовлетворяет решению уравнения (10.53). Иначе говоря, в нем

$$u = \lambda [y + A(x)], \quad (10.54)$$

где λ — значение градиента скорости невозмущенного течения при

$y = 0$, когда величина y мала по сравнению с толщиной основного пограничного слоя и велика по сравнению с толщиной подслоя. Аналогичный пограничный подслой приходится вводить для согласования термодинамических свойств жидкости, однако это не оказывает влияния на динамический пограничный подслой.

Основные уравнения пограничного подслоя по существу не отличаются от соответствующих уравнений основного пограничного слоя; единственное отличие состоит в том, что входящие в эти уравнения значения плотности и кинематической вязкости соответствуют их значениям на стенке. Указанные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (10.55)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_w \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (10.56)$$

Анализ этих уравнений показывает, что для подслоя масштаб y гораздо меньше, чем для основного пограничного слоя. Действительно, ниже будет показано, что в подслое масштаб y имеет порядок $R^{-5/8}$, в то время как в основном пограничном слое его порядок $R^{-1/2}$. На границе подслоя и основного пограничного слоя граничные условия имеют вид

$$u = v = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad (10.57a)$$

$$u \rightarrow \lambda y \text{ вверх по течению от зоны возмущения,} \quad (10.57b)$$

$$u \rightarrow \lambda [y + A(x)] \text{ при } y \rightarrow \infty. \quad (10.57c)$$

Через ρ_w и ν_w выше обозначены соответственно плотность и кинематическая вязкость в невозмущенном течении на поверхности пластины. Граничное условие (10.57b) отражает спонтанность взаимодействия, иначе говоря, отсутствие внешнего фактора, возмущающего течение вблизи точки $x = x_0$. Наконец, необходимость условия (10.57c) обусловлена тем, что вблизи нижней границы пограничного слоя u приобретает именно такой вид. Напомним, что $\lambda = O(R^{1/2})$, а $\nu_w = O(R^{-1})$, и будем также иметь в виду, что нам придется предположить, что в пределах подслоя y и $A(x)$ примерно равны; в противном случае не удастся избежать противоречия.

Система уравнений (10.55) и (10.56) в принципе позволяет найти функцию $A(x)$, хотя ясно, что для этого придется выполнить значительный объем вычислений. Однако порядки величин, характеризующие

ющих свободное взаимодействие, определить нетрудно. Действительно, для подслоя можно записать

$$\begin{aligned} y &= \lambda^{-5/4} \alpha z, & x &= x_0 + \frac{\lambda^{-3/4} \alpha^3 X}{\nu_w \lambda^2}, \\ u &= \lambda^{-1/4} \alpha \tilde{u}(X, z), & v &= \lambda^{-3/4} \alpha^{-1} \tilde{v}(X, z) (\nu_w \lambda^2), \\ A(x) &= \lambda^{-5/4} \alpha \tilde{A}(X), & p &= p_e(x_0) + \frac{\lambda^{-1/2} \rho_e u_e^2 \alpha^{-2} P(X) (\nu_w \lambda^2)}{(M_e^2 - 1)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (10.58)$$

где

$$\alpha = \left(\frac{\rho_e u_e^2 \nu_w \lambda^2}{\rho_w (M_e^2 - 1)^{1/2}} \right)^{1/4}. \quad (10.59)$$

Отметим, что поскольку $\lambda^2 \nu_w$ не зависит от числа Рейнольдса, то же справедливо и для α . Теперь основные уравнения, позволяющие определить $A(x)$, приобретают вид

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = 0, \quad (10.60)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = \frac{d^2 \tilde{A}}{dX^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2}, \quad (10.61)$$

а граничные условия —

$$\tilde{u} = \tilde{v} = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (10.62a)$$

$$\tilde{u} \rightarrow z \quad \text{при } X \rightarrow -\infty, \quad (10.62b)$$

$$\tilde{u} \rightarrow z + A(X) \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (10.62c)$$

Из факта, что $\lambda = O(R^{1/2})$, следует, что увеличение давления при свободном взаимодействии сжатия имеет порядок $R^{-1/4}$ (уравнение (10.50)), а длина зоны взаимодействия — порядок $R^{-3/8}$ или $R^{1/8} \delta^*$. Чтобы продолжить анализ соотношений между масштабами характерных величин, придется конкретизировать физические свойства рассматриваемой жидкости. Если для нее справедливо, например, соотношение Чепмена — Рубезина

$$\lambda = 0,332 \frac{\rho_w u_e}{\rho_e x_0} R^{1/2} C^{-1/2},$$

то из этого сразу следует, что приращение давления определяется выражением (10.50).

Теперь покажем, что можно найти решение уравнения (10.61), если A мало, а X имеет большое отрицательное значение. Пусть

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= a_1 e^{\kappa X}, & \tilde{u} &= z + a_1 e^{\kappa X} f'(z), \\ v &= -a_1 \kappa e^{\kappa X} f(z), \end{aligned} \quad (10.63)$$

где κ — искомая положительная константа, а величиной $\exp(2\kappa X)$ можно пренебречь. Для свободного взаимодействия сжатия постоянную a_1 примем равной -1 , а для свободного взаимодействия расширения будем считать ее равной $+1$. Тогда из уравнения (10.63) непосредственно получаем

$$\kappa z f' - \kappa f = \kappa^2 + f''' \quad (10.64)$$

при условиях

$$f'(0) = f(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1. \quad (10.65)$$

Решение дифференциального уравнения (10.64) имеет вид

$$f(z) = \frac{-\kappa^{5/3} Ai(z\kappa^{1/3})}{Ai'(0)}, \quad (10.66)$$

где $Ai(t)$ — функция Аэри, удовлетворяющая уравнению $w'' - tw = 0$ и стремящаяся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Граничные условия удовлетворяются при

$$-\kappa^{4/3} \int_0^\infty \frac{Ai(t) dt}{Ai'(0)} = 1, \text{ т. е. при } \kappa = 0,8272. \quad (10.67)$$

Это решение было получено Лайтхиллом. Оно свидетельствует, что пограничный слой может спонтанно перейти из обычного состояния в состояние, в котором влияние взаимодействия становится существенным. При свободном взаимодействии расширения давление падает, а при взаимодействии сжатия оно увеличивается. В обоих случаях скорость жидкости меняется мало, однако изменением поверхностного трения пренебречь нельзя, так как оно пропорционально du/dz . Действительно, в течениях сжатия сила поверхностного трения меняет знак, а это, как было показано выше, сопровождается отрывом пограничного слоя от поверхности пластины. В течениях расширения поверхностное трение неограниченно растет и в конце концов оказывает существенное влияние на величину скорости. Решение (10.66) можно использовать как основу для разложения в ряд по степеням $\exp(\kappa X)$, однако обычно рассматриваемые уравнения решают численно.

Сказанное выше о двух видах свободного взаимодействия составляет основу трехслойной теории взаимодействующих течений, обзор которой был дан Стюартсоном [7], а затем Смитом [8]. Мы надеемся, что это краткое введение позволит читателю составить общее представление о рассматриваемой теории и убедит его в том, что теория взаимодействий, основанная на прочной теоретической базе, позволяет объяснить основные свойства изучаемого явления.

10.4. Указания по расчету течений с взаимодействиями, содержащих скачки уплотнения

Теоретически течение, описанное в предыдущем разделе, может существовать у поверхности тела неограниченно долго и прекращается лишь под действием фактора, вызвавшего взаимодействие. Если таковым является скачок уплотнения, то он падает на пограничный слой (рис. 10.11), который к этому моменту ведет себя уже почти как слой смещения (рис. 6.9), затем скачок отражается в виде веера волн разрежения и отклоняет слой смещения обратно к поверхности тела. Однако от точки присоединения R_0 (рис. 10.11) начинается возвратное течение в пограничном слое, развивающееся в условиях весьма большого отрицательного градиента давления. Таким образом, если мы проследим за возвратным течением, двигаясь от точки R_0 к точке отрыва S , то прежде всего увидим, что между точкой R_0 и местом падения скачка оно приобретает значительное количество движения, которое должно быть затем утрачено за счет вязкого взаимодействия со слоем смещения на участке от места падения скачка до точки S . Поскольку вязкое взаимодействие — довольно малоэффективный механизм передачи ко-

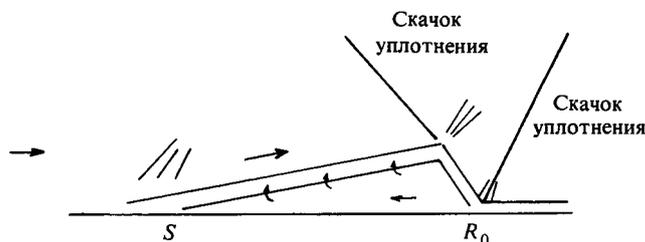


Рис. 10.11. Схема взаимодействия скачка уплотнения с ламинарным пограничным слоем.

S — точка отрыва, R_0 — точка присоединения.

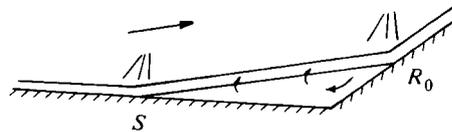


Рис. 10.12. Схема взаимодействия скачка уплотнения с ламинарным пограничным слоем при обтекании внутреннего угла.

S — точка отрыва; R_0 — точка присоединения.

личества движения, то вполне естественно, что точка отрыва часто располагается далеко вверху по потоку от места падения скачка. На практике дело обстоит несколько иначе, так как оторвавшийся пограничный слой легко теряет устойчивость и в промежутке между точкой S и местом падения скачка становится турбулентным. Для этого необходимо лишь, чтобы скачок обладал хоть сколь угодно значительной интенсивностью. Турбулентный пограничный слой способен захватывать в единицу времени гораздо больше жидкости, чем ламинарный, вследствие чего длина зоны постоянного давления между точкой отрыва и местом падения скачка сокращается, хотя и остается значительной.

Если свободное взаимодействие развивается при обтекании внутреннего угла или обращенной против потока ступеньки (рис. 10.12), то слой смешения пересекает угол, оставаясь практически неизменным, но затем, вместо того чтобы плавно подойти к противоположной стороне угла, он резко поворачивает в точке присоединения к ней и в дальнейшем течет параллельно стенке. Поворот слоя смешения сопровождается резким подъемом давления вблизи точки присоединения. Возникающие здесь слабые волны сжатия за пределами пограничного слоя сливаются в скачок уплотнения и заставляют часть жидкости слоя смешения повернуть назад, порождая в пограничном слое возвратное течение. Чепмен и др. [9] считают, что длину зоны отрывного течения можно найти, вычислив скорость жидкости непосредственно перед точкой присоединения на линии тока, отходящей от стенки в точке отрыва. Чтобы удовлетворять условию неразрывности, эта скорость в точке присоединения должна обращаться в нуль. На практике указанное условие удовлетворяется за счет работы невязких сил, обусловленных увеличением давления вблизи точки присоединения.

На первый взгляд может показаться, что приближение пограничного слоя неприменимо к задачам сильного взаимодействия, так как в основе теории пограничного слоя лежит предположение о том, что изменение скорости поперек пограничного слоя гораздо

больше, чем вдоль него, а это утверждение противоречит факту существования скачка уплотнения. Действительно, масштаб длины в скачке имеет порядок R^{-1} , т. е. он гораздо меньше, чем в пограничном слое, где его порядок $R^{-1/2}$. Тем не менее существует целый ряд доводов в пользу того, что приближение пограничного слоя заслуживает определенного внимания. Для анализа рассматриваемых течений можно, конечно, воспользоваться уравнениями Навье — Стокса, однако в этом случае даже для расчета стационарных течений потребуются исключительно мощные компьютеры.

В то же время надо отдавать себе отчет в том, что приближение пограничного слоя применимо далеко не всегда. Например, если толщина зоны отрывного течения достаточно велика, то справедливость основных допущений вызывает сомнения. В настоящее время нельзя четко указать границы, за пределами которых приближение пограничного слоя становится неприменимым. Отметим, однако, что для полностью ламинарного течения результаты расчетов при $M_\infty = 4$ вполне удовлетворительно согласуются с результатами экспериментов и решением уравнений Навье — Стокса [10—12].

Первой проблемой, с которой сталкиваются при расчете рассматриваемых течений, является определение точки, в которой давление начинает расти. Выше уже было показано, что ее положение до некоторой степени зависит от интенсивности падающего скачка уплотнения, однако найти координаты этой точки можно только методом проб и ошибок. На практике придется совершить несколько проходов вдоль пограничного слоя в направлении течения и разработать сходящуюся итерационную процедуру. Воздействие пограничного слоя на невязкое течение можно описать выражением

$$v_w = \frac{1}{\rho_e} \frac{d}{dx} \int_0^\infty (\rho_e u_e - \rho u) dy, \quad (10.68)$$

где ρ и u определяются из решения уравнений пограничного слоя, а v_w — эффективная скорость вдува. Тогда в простых случаях вклад v_w в давление, обусловленное невязким течением, определяется уравнением (10.49), а в общем случае — выражением (10.50), заменяющим граничное условие $v = 0$ на поверхности тела в программе расчета невязкого течения. Такой подход особенно удобен, если внешнее течение трансзвуковое, т. е. в случае, когда нельзя пользоваться уравнением (10.49). При решении рассматриваемой задачи возникают также следующие дополнительные затруднения. Если течение за основным скачком уплотнения становится дозвуковым,

как это часто бывает в трансзвуковых потоках и всегда при образовании падающего скачка уплотнения в результате маховского отражения, то расчет внешнего течения еще более усложняется. Влияние набегающего потока приводит не только к фиксации начального подъема давления при взаимодействии, но и затрудняет осуществление итерационной процедуры.

Сначала задают координаты точки критического подъема давления и вводят ее в поле течения. Обычно она имеет относительный порядок $10^{-3} - 10^{-4}$. После этого пограничный слой развивается сам по себе, и вскоре происходит отрыв. Если натекающий пограничный слой турбулентный, то модель турбулентности, применяемую в этой книге, приходится модифицировать, а если он ламинарный, то строят схему расчета, позволяющую выполнить интегрирование в направлении против течения жидкости в зоне возвратного течения. Это можно сделать разными способами, однако наиболее популярным и эффективным является так называемый способ FLARE, впервые примененный Рейнером и Флюгге — Лотцем [13]. Суть его состоит в том, что в тех частях поля течения, где $u < 0$, в уравнении движения полагают $u(du/dx) = 0$. В результате удается избежать неустойчивости численного счета, которая затрудняет интегрирование уравнения пограничного слоя в направлении, противоположном локальному направлению течения, и легко довести интегрирование до конца. Конечно, точность при этом понижается, но не слишком сильно, так как скорость возвратного течения u всегда составляет лишь небольшую долю скорости внешнего течения. Отметим, что, несмотря на то, что способ FLARE является приближенным, он дает достаточно точные результаты. Существуют также методы повышения точности расчета, которыми можно воспользоваться, если в этом есть необходимость.

Продолжая интегрирование в зоне отрыва, следует иметь в виду, что независимо от того, является ли пограничный слой ламинарным или турбулентным, при задании скорости внешнего течения решение уравнений становится сингулярным. Чтобы этого избежать (а надо иметь в виду, что нет никаких оснований ожидать, что окончательное сходящееся решение содержит особенность), скорость внешнего течения необходимо как-то связать с толщиной вытеснения. Таким образом, при каждом проходе вдоль стенки при решении уравнений пограничного слоя скорость внешнего течения надо рассматривать в некотором смысле как неизвестную. Это можно сделать разными способами, например с помощью известной формулы Аккерета (10.49), связывающей скорость внешнего течения с u_w в сверхзвуковом потоке, или предложенным Вельдманом

способом применения интеграла Гильберта для дозвуковых течений [14—16]; можно также воспользоваться релаксационной формулой, предложенной Ле Баллером [17, 18] для определения толщины вытеснения и широко используемой другими исследователями (см., например, [19]). В настоящее время все эти способы нуждаются в дополнительной разработке.

Задачи

10.1. В адиабатном течении распределение статической температуры поперек пограничного слоя определяется уравнением (10.39).

а. Показать, что для неадиабатных течений статическая температура определяется выражением

$$\frac{T}{T_e} = S + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left(S - \frac{\bar{u}^2}{\bar{u}_e^2} \right). \quad (\text{P10.1})$$

б. Воспользовавшись приведенной выше формулой и уравнением (10.36), показать, что в случае течений с теплообменом соотношение

$$\delta_c^* = S_w \delta_i^* + \sigma (S_w \delta_i^* + \theta_i) \quad (\text{P10.2})$$

эквивалентно уравнению (10.41). Здесь δ_i^* — толщина вытеснения для несжимаемой жидкости, а произведение $S_w \delta_i^*$ определяется выражением

$$S_w \delta_i^* = \int_0^\infty \left(S - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} \right) d\bar{Y}. \quad (\text{P10.3})$$

в. Показать, что для течения с теплообменом соотношения (10.43) остаются неизменными.

г. Показать, что плотность теплового потока на стенке можно вычислять по формуле

$$\dot{q}_w = \frac{\rho_\infty u_\infty H_\infty}{\sqrt{R_x}} \left(\frac{\mu_w}{\mu_\infty} \right) S_w f_w'' , \quad (\text{P10.4})$$

или

$$\dot{q}_w = \frac{\rho_w u_\infty H_\infty}{\sqrt{R_x}} \left(\frac{\mu_w}{\mu_\infty} \right) S_w' , \quad (\text{P10.5})$$

где

$$R_x = \frac{\rho_\infty u_\infty x}{\mu_\infty}.$$

10.2. Охлаждаемая плоская пластина с $S_w = 0,5$ на высоте 2300 м обтекается потоком с $M_\infty = 3,0$. Считая атмосферу стандартной, определить толщину вытеснения, формпараметр, локальный коэффициент поверхностного трения и тепловой поток (отнесенный к ширине пластины) на расстоянии 3 м от передней кромки. Вязкость определить из закона Сазерленда при $\gamma = 1,4$.

- 10.3. Вычислить значения коэффициента Чепмена — Рубезина на стенке под ламинарным пограничным слоем в воздухе при полной температуре 300 К и $M_e = 1; 2; 5$ и 10. Коэффициент восстановления принять равным 0,9.
- 10.4. Показать, что в течениях с постоянной плотностью формпараметр $H \equiv \delta^*/\theta$ всегда больше единицы, но в пограничных слоях на сильно охлажденных стенках он может быть меньше единицы даже при малых скоростях.
- 10.5. Показать, что в автомодельных течениях модельной жидкости на нагретой или охлажденной стенке S принимает экстремальные значения на стенке и на бесконечности.

Примечание. При $\dot{m} < 0$ решения уравнений (10.28) и (10.29) неоднозначны, если не вводится дополнительное условие, что $1 - \phi'$ экспоненциально убывает, когда η неограниченно возрастает. Если это условие не выполняется, то скорость может оказаться завышенной независимо от того, нагрета стенка или нет.

- 10.6. При числах Прандтля, близких к единице, температура в пограничном слое на теплоизолированной стенке достаточно точно определяется формулой

$$T = T_e \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Pr}^{1/2} M_e^2 \left(1 - \frac{u^2}{u_e^2} \right) \right].$$

Показать, что для таких течений преобразование Иллингворта — Стюартсона можно представить в более общем виде

$$dX = \left(\frac{a_e}{a_\infty} \right)^{\text{Pr}^{1/2}} \frac{P_e}{P_\infty} dx, \quad dY = \left(\frac{a_e}{a_\infty} \right)^{\text{Pr}^{1/2}} \frac{\rho}{\rho_\infty} dy$$

и определить эквивалентную скорость внешнего течения несжимаемой жидкости. Подробнее этот вопрос рассмотрен в работе [20].

- 10.7. Адиабатная плоская пластина помещена в поток модельной жидкости с числом Маха M_∞ . Показать, что если θ_c — толщина потери импульса на расстоянии x от передней кромки пластины, то

$$\theta_c = \theta_i + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \theta_{1i},$$

Где θ_i — толщина потери импульса, а

$$\theta_{1i} = \int_0^\infty \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} \left(1 - \frac{\bar{u}^2}{\bar{u}_e^2} \right) dY$$

для эквивалентного течения несжимаемой жидкости. Найти приближенное значение θ_c , для чего записать интеграл количества движения для эквивалентного течения несжимаемой жидкости и предполагая, что

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}_e \sin \left(\frac{\pi Y}{2\delta(x)} \right) & Y < \bar{\delta}, \\ \bar{u} &= \bar{u}_e & Y > \bar{\delta} \end{aligned}$$

показать, что

$$\delta^2 = \frac{2x\nu_\infty}{(4 - \pi)u_e}.$$

Следовательно,

$$\theta_c = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2xv_\infty}{u_e} \right)^{1/2} \left[0,463 + \frac{\gamma-1}{6} M_\infty^2 \right].$$

- 10.8 Решить предыдущую задачу при условии, что температура стенки поддерживается постоянной и равной T_w .
Указание. Воспользоваться уравнением (10.36).
- 10.9. Заменить уравнения (10.58) на

$$\begin{aligned} y &= \beta_1 z, & x &= x_0 + \beta_2 X, \\ u &= \beta_3 \tilde{u}, & v &= \beta_4 \tilde{v}, \\ A &= \beta_5 \tilde{A}, & p &= p_e(x_0) + \beta_6 P, \end{aligned}$$

где β_1, \dots, β_6 — постоянные. Показать, что уравнения (10.53)—(10.57) сводятся к уравнениям (10.60)—(10.62) лишь при одном наборе коэффициентов β , определяемом уравнениями (10.58) и (10.59).

- 10.10 Принять в уравнениях (10.60)—(10.62)

$$\tilde{u} = \frac{1}{X_s - X} F(\eta), \quad \eta = \frac{z}{X_s - X},$$

где X_s — постоянная, $X < X_s$, а F — искомая функция одного аргумента η . С помощью уравнения (10.60) вывести соответствующее выражение для \tilde{v} . Доказать, что в пределе при $X \rightarrow X_s$ эти выражения удовлетворяют уравнениям (10.61) и (10.62), если

$$F = 3 \operatorname{th}^2(\eta + \beta) - 2, \quad \operatorname{th}^2 \beta = \frac{2}{3}$$

и выписать соответствующее выражение для давления. Дополнительную информацию можно найти в работе [21].

ЛИТЕРАТУРА

1. Illingworth C. R., Steady flow in the laminar boundary layer of a gas, *Proc. Roy. Soc.*, **A199**, 533 (1949).
2. Stewartson K., Correlated compressible and incompressible boundary layers, *Proc. Roy. Soc.*, **A200**, 84 (1949).
3. Liepmann H. W., Roshko A., *Elements of Gas Dynamics*, Wiley, N. Y., 1957. [Имеется перевод: Липман Г., Рошко А. *Элементы газовой динамики*. — М.: ИЛ, 1960.]
4. Sneddon J., The flow produced by interaction of a turbulent boundary layer with a normal shock wave of sufficient strength to cause separation, *Aero Res. Council R&M 3502* (London), 1960.
5. Oswatitsch K., Wieghardt K., Theoretical investigations on steady potential flows and boundary layers at high speed, *Aero Res. Council Rept 10356* (London), 1946.
6. Lighthill M. J., On boundary layers and upstream influence, II. Supersonic flows without separation, *Proc. Roy. Soc.*, **A217**, 478 (1953).
7. Stewartson K., Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies, *Adv. Appl. Mech.*, **14**, 145 (1974).

8. Smith F. T., On the high Reynolds number theory of laminar flows, *IMA J. Appl. Math.*, **28**, 207 (1982).
9. Chapman D. R., Kuehn D. M., Larson H. K., Investigation of separated flows in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition, NACA Rept 1356, 1958.
10. Carter J. E., Numerical solution of the Navier—Stokes equations for the supersonic laminar flow over a two-dimensional compression corner, NASA Rept TR-R-385, 1972.
11. Werle M. J., Vatsa V. N., A new method for supersonic boundary-layer separation, *AIAA J.*, **12**, 1491 (1974). [Имеется перевод: Уэрл, Ватса. Новый метод расчета отрыва сверхзвуковых пограничных слоев. — Ракетная техника и космонавтика, 1974, № 11, с. 45.]
12. Lewis J. E., Kubota T., Lees L., Experimental investigation of supersonic laminar two-dimensional boundary-layer separation in a compression corner with and without cooling, *AIAA J.*, **6**, 7—14 (1968). [Имеется перевод: Льюис, Кубота, Лиз. Экспериментальное исследование отрыва ламинарного двумерного пограничного слоя при обтекании тупого угла на охлаждаемой и неохлаждаемой поверхностях. — Ракетная техника и космонавтика, 1968, № 1, с. 7.]
13. Reyhner T. A., Flügge-Lotz I., The interaction of a shock wave with a laminar boundary layer, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **3** (2), 173 (1968).
14. Veldman A. E. P., A numerical method for the calculation of laminar incompressible boundary layers with strong-inviscid interaction, NLR TR 79023L, 1979.
15. Cebeci T., Stewartson K., Williams P. G., Separation and reattachment near the leading edge of a thin airfoil at incidence, AGARD Symposium on Computation of Viscous-Inviscid Interaction Flows, Colorado Springs, 1980.
16. Cebeci T., Schimke S. M., The calculation of separation bubbles in interactive turbulent boundary layers, *J. Fluid Mech.*, **131**, 305 (1983).
17. LeBalleur J. C., Couplage visqueux-non visqueux: analyse du problème incluant décollements et ondes de choc, *La Rech. Aérop.*, n° 1977-6, 349. Перевод на англ. язык ESA TT476, 1977.
18. LeBalleur J. C., Couplage visqueux-non visqueux: méthode numérique et applications aux écoulements bidimensionnels transsoniques et supersoniques. *La Rech. Aérop.*, n° 1978-2, 67—76. Перевод на англ. язык ESA TT496, 1978.
19. Carter J., Wornom S. F., Solutions for incompressible separated boundary layers including viscous-inviscid interaction in Aerodynamic Analysis Requiring Advanced Computers, NASA SP-347, 1975, p. 125.
20. Rott N. J., Compressible laminar boundary layer on a heat-insulated body, *J. Aero. Sci.*, **20**, 67 (1953).
21. Cohen C. B., Reshotko E., The compressible laminar boundary layer with heat transfer and arbitrary pressure gradient, NACA Rept 1294, 1956.
22. Monaghan R. J., Effects of heat transfer on laminar boundary-layer development under pressure gradients in compressible flow, Aero. Res. Council R&M 3218, 1961.
23. Stewartson K., On supersonic laminar boundary layers near convex corners, *Proc. Roy. Soc.*, **A319**, 289 (1970).

В начале гл. 6 отмечалось, что турбулентные течения отличаются от ламинарных главным образом тем, что для них неизвестны значения эффективных коэффициентов переноса. В указанной главе рассматривались течения, в которых разности температур и (или) концентраций достаточно малы и не влияют на поле осредненных скоростей, и неявно предполагалось, что поле *пульсационной* составляющей скорости, определяющей турбулентный перенос количества движения, тепла и массы, также остается неизменным.

В разд. 3.3 указывалось, что влияние пульсаций плотности на поле пульсационной составляющей скорости мало в большинстве практически важных случаев (за исключением течений с выталкивающими силами), так как пульсации плотности обычно составляют лишь малую долю ее среднего значения. Влияние градиентов *средней* плотности на турбулентность плохо изучено, но в некоторых случаях может быть значительным. При решении ряда задач модели турбулентности, разработанные для несопряженных течений, могут оказаться адекватными и для течений с переменной плотностью, относящихся к тому же общему классу; однако для этого в дифференциальные уравнения или алгебраические формулы, связывающие турбулентные напряжения и скорости изменения потока энтальпии с полями осредненных скоростей и температур, надо подставить среднюю локальную плотность. В уравнения для осредненных по времени количества движения и энергии, конечно, тоже надо подставлять среднюю локальную плотность, как это делалось в случае ламинарных течений, рассмотренных в предыдущей главе.

Как и соответствующий материал, изложенный в гл. 10, два первых абзаца данного введения и большая часть анализа, излагаемого ниже, в равной мере относятся и к медленным течениям (в которых изменение плотности в широких пределах достигается за счет интенсивного нагрева или смешения разнородных жидкостей), и к высокоскоростным течениям (в которых большие перепады температур создаются за счет вязкой диссипации кинетической энергии, превращающейся в тепло, или за счет сильного сжатия,

при котором повышение давления составляет значительную долю его исходной величины). Конечно, и сам характер медленных и высокоскоростных течений, и конфигурация проточных частей устройств, в которых они реализуются, весьма различны; кроме того, медленные сопряженные течения изучены гораздо в меньшей степени, чем высокоскоростные. Это означает, что поскольку все современные модели турбулентности являются эмпирическими и разработаны на основе данных для ограниченных диапазонов параметров течений, то коэффициенты, входящие в формулы и дифференциальные уравнения для турбулентного переноса, в двух указанных случаях могут несколько отличаться. Поэтому результаты, полученные для высокоскоростных течений, применяются ниже для исследования медленных сопряженных течений главным образом на основе физических соображений, а не на экспериментальных данных. Для простоты ограничимся рассмотрением течений газов. Течения жидкостей с большими относительными изменениями плотности встречаются редко и относятся к разряду сопряженных в основном потому, что их вязкость зависит от температуры. Это лишь немного усложняет анализ турбулентных течений и приводит к тому, что постоянные A^+ и c в законе стенки (разд. 6.2) становятся функциями температуры.

В разд. 11.1 рассматриваются понятия внутрислойной автосимметричности в течениях сжимаемой жидкости (аналогичные вопросы обсуждались в разд. 6.1). В разд. 11.2 дан обзор попыток найти математическое преобразование координат и переменных, позволяющее свести турбулентные течения сжимаемой жидкости к наблюдаемым (или расчетным) течениям с малыми скоростями. Точка зрения авторов на такие преобразования сводится к тому, что поскольку они в отличие от преобразований для ламинарных течений, рассмотренных в гл. 10, лишены строгого обоснования, то могут быть столь же произвольными, как и модели турбулентности, с той только разницей, что их эффективность труднее проверить путем сравнения с экспериментальными данными. Исключением является преобразование, используемое при внутрислойном анализе сопряженных турбулентных течений, которое оказывается полезным для *корреляции экспериментальных данных* для профилей скоростей и коэффициентов поверхностного трения.

Вообще говоря, для решения уравнений сопряженных турбулентных пограничных слоев целесообразно пользоваться дифференциальными соотношениями. Если форма плоского или осесимметричного тела задана и, следовательно, известны граничные условия на его поверхности и распределение скоростей во внешнем потоке,

то характеристики тепло- и массообмена в течении около такого тела можно найти, решая уравнения движения и энергии с точностью, достаточной для большинства инженерных приложений. Универсальная программа для решения таких задач на ЭВМ приведена в разд. 13.5. В ней используется понятие турбулентной вязкости, введенное Себиси — Смитом, и так называемая численная схема «прямоугольник». Этот и другие подобные методы позволяют рассчитывать турбулентные пограничные слои при самых разных граничных условиях, но с привлечением сверхмощных ЭВМ. Поэтому, как и в случае несопряженных турбулентных пограничных слоев, иногда бывает желательно и полезно иметь более простые методы или формулы. Корреляционные формулы обычно обеспечивают *более высокую* точность, чем универсальные методы, однако лишь для ограниченного диапазона значений переменных. Недостаток экспериментальных данных часто заставляет ограничивать область их применения течениями с пренебрежимо малыми градиентами давления. Тем не менее они оказываются очень полезными при решении многих технических задач и рассматриваются в разд. 11.3.

11.1. Анализ внутрислойной автомоделности для профилей скорости и температуры

В сопряженных турбулентных течениях профили скорости и температуры внутреннего слоя зависят от всех переменных, определяющих профили скорости и температуры в несопряженных течениях (разд. 6.1), а также от абсолютной температуры жидкости (например, на стенке), поскольку разность температур между разными точками сопряженного течения по определению может составлять значительную долю абсолютной температуры жидкости. Кроме того, если число Маха течения не слишком мало по сравнению с единицей, то профили скорости и температуры будут также зависеть от скорости звука a и отношения удельных теплоемкостей γ . Для совершенного газа $a = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{(\gamma - 1)c_p T}$, поэтому в качестве переменных можно использовать либо a , либо T , либо обе эти величины одновременно. Дополнив ими список независимых переменных, приведенный в разд. 6.2, получим

$$u = f_1(\tau_w, y, \rho_w, \nu_w, \dot{q}_w, c_p, T_w, k_w, \gamma), \quad (11.1)$$

$$T_w - T = f_2(\tau_w, y, \rho_w, \nu_w, \dot{q}_w, c_p, T_w, k_w, \gamma). \quad (11.2)$$

Тогда анализ размерностей с учетом того, что $\sqrt{\tau_w/\rho_w} = u_\tau$, дает

$$\frac{u}{u_\tau} = f_3 \left(\frac{u_\tau y}{\nu_w}, \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p u_\tau T_w}, \frac{u_\tau}{a_w}, \gamma, \text{Pr}_w \right), \quad (11.3)$$

$$\frac{T}{T_w} = f_4 \left(\frac{u_\tau y}{\nu_w}, \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p u_\tau T_w}, \frac{u_\tau}{a_w}, \gamma, \text{Pr}_w \right), \quad (11.4)$$

где для удобства вместо $(T_w - T)/T_w$ применяется T/T_w , а вместо имеющей правильную размерность, но меньший физический смысл величины $\sqrt{c_p T_w}$ используется скорость звука на стенке a_w . Величина u_τ/a_w обозначается через M_τ . Оценка физических свойств жидкости на стенке адекватна, если, например, ν/ν_w можно выразить только через T/T_w (давление в любом случае не зависит от y). Так будет в том случае, если справедлива зависимость $\nu \propto T^\omega$ (где ω — некоторая постоянная), являющаяся хорошим приближением для обычных газов, если температура в поле течения меняется не более чем вдвое. Если ν или k — более сложные функции T , то в число переменных, стоящих в правых частях выражений (11.27) и (11.28), надо включить абсолютную температуру.

Соображениями, которые позволили получить формулы для скорости и температуры во внутреннем слое несопряженных течений (гл. 6), можно воспользоваться и в случае сопряженных течений, если, как и ранее, предположить, что при $u_\tau y/\nu_w \gg 1$ влияние вязкости мало, так же как и влияние теплопроводности при $(u_\tau y/\nu_w)\text{Pr} \gg 1$. Если пульсации вязкости и теплопроводности также мало влияют на течение, а значения кинематической вязкости и плотности не слишком сильно отличаются от их значений на стенке, так что $u_\tau y/\nu_w$ сохраняет смысл характерного числа Рейнольдса, то при больших значениях $u_\tau y/\nu_w$ молекулярной диффузией заведомо можно пренебречь по сравнению с турбулентной диффузией. Однако и в этом случае надо внимательно относиться к представлению формул в наиболее удобном виде, поскольку зависимость ρ от y сохраняется. В гл. 6 было обосновано утверждение, что если напряжение сдвига τ зависит от y , то в качестве характерной скорости вместо ее значения на стенке u_τ следует использовать $(\tau/\rho)^{1/2}$. Поэтому представляется правильным пользоваться локальным значением скорости и при анализе сопряженных течений, причем в простейшем случае, когда ρ зависит от y , а τ от него не зависит, определять характерную скорость выражением $(\tau_w/\rho)^{1/2}$. По аналогичным причинам в формулу длины смещения для температуры вместо \dot{q}_w/ρ_w будем подставлять \dot{q}/ρ и ниже покажем, что в высокоскоростных течениях \dot{q} всегда зависит от y . Тогда, исключив ν_w и

Пр из числа переменных и применяя анализ размерностей к производным $\partial u/\partial y$ и $\partial T/\partial y$, а не к самим функциям u и T , вместо уравнений (11.3) и (11.4) получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(\tau/\rho)^{1/2}}{\kappa y} f_u \left[\frac{\dot{q}}{\rho c_p T (\tau/\rho)^{1/2}}, \frac{(\tau/\rho)^{1/2}}{a}, \gamma \right]; \quad (11.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{\dot{q}/\rho c_p}{(\tau/\rho)^{1/2} \kappa_h y} f_T \left[\frac{\dot{q}}{\rho c_p T (\tau/\rho)^{1/2}}, \frac{(\tau/\rho)^{1/2}}{a}, \gamma \right], \quad (11.6)$$

где во всех случаях (даже для τ) в качестве аргументов функций f используются *локальные* переменные, как и в уравнениях (6.13) и (6.14). В дальнейшем ограничимся рассмотрением слоя постоянных сдвиговых напряжений $\tau = \tau_w$, который, как показано в разд. 6.1, при малых градиентах давления является хорошим приближением для внутренних 20% толщины пограничного слоя.

Чтобы можно было приравнять функции f единице и вновь получить формулы для длины смешения в несжимаемой жидкости, нам придется пренебречь влиянием пульсаций плотности, рассмотренных в разд. 3.2. При этом предположении параметр теплового потока $\dot{q}/\rho c_p (\tau/\rho)^{1/2} T$ и число Маха $M_\tau = (\tau/\rho)^{1/2}/a$, т. е. оба параметра, определяющие пульсации плотности (или температуры), не входят в выражения для производных $\partial u/\partial y$ и $\partial T/\partial y$ (уравнения (11.5) и (11.6)). Однако они остаются в полных выражениях для u и T (уравнения (11.3) и (11.4)), так как оказывают влияние на градиент температуры в вязком подслое. Номинально формулы для $\partial u/\partial y$ и $\partial T/\partial y$ в вязком подслое должны содержать все переменные, стоящие в правых частях уравнений (11.3) и (11.4). Предположение, что турбулентность слабо зависит от пульсаций плотности, означает, что влиянием отношения удельных теплоемкостей γ , характеризующего различие между адиабатными и изотермическими процессами, можно пренебречь даже в случае вязкого подслоя, однако имеющиеся экспериментальные данные не позволяют проверить справедливость этого утверждения. Предполагая, что за пределами вязкого подслоя f_u и f_T постоянны, можно записать

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(\tau/\rho)^{1/2}}{\kappa y}, \quad (11.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{-\dot{q}/\rho c_p}{(\tau/\rho)^{1/2} \kappa_h y}. \quad (11.8)$$

Эти уравнения имеют такой же вид, как и уравнения (6.13) и (6.14). В уравнении (11.8) все же остается локальное значение \dot{q} , которое при высоких скоростях течения отличается от его значения на стенке (даже при $\tau = \tau_w$) за счет вязкой диссипации кинетической энергии осредненного течения и турбулентных пульсаций. Скорость, с которой кинетическая энергия единичного объема жидкости осредненного течения превращается в тепло в результате работы против сил вязкости и турбулентных напряжений (равной в случае тонкого сдвигового слоя произведению полного напряжения сдвига на скорость деформации сдвига), определяется выражением $\tau(\partial u/\partial y)$, причем ее часть, соответствующая вязким напряжениям сдвига, описывает непосредственное превращение кинетической энергии в тепло в результате вязкой диссипации, а часть, соответствующая турбулентным напряжениям сдвига, описывает производство кинетической энергии турбулентного движения. Последнее нельзя непосредственно приравнять количеству тепла, выделяющегося в результате вязкой диссипации кинетической энергии при турбулентном движении, так как процессы, происходящие при турбулентных течениях, сопровождаются переносом кинетической энергии турбулентного движения из одних частей потока в другие. Однако во внутреннем слое (за пределами вязкого подслоя) перенос пренебрежимо мал, и здесь можно пользоваться вырожденной формой уравнения энтальпии (3.46), отбросив члены, описывающие перенос, и удержав только производные по y :

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial y} = \tau_w \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (11.9)$$

Это уравнение показывает, что суммарный тепловой поток из контрольного объема, выделенного во внутреннем слое, в направлении оси y равен работе в единицу времени жидкости в контрольном объеме против напряжений сдвига. Интегрируя уравнение (11.9), получаем

$$\dot{q} = \dot{q}_w + u\tau_w. \quad (11.10)$$

При медленных течениях совершаемая работа пренебрежимо мала и $\dot{q} \approx \dot{q}_w$, что соответствует $\tau \approx \tau_w$. Поделив (11.8) на (11.7), получим

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{-(\kappa/\kappa_h)\dot{q}}{c_p\tau_w}, \quad (11.11)$$

где κ/κ_h — турбулентное число Прандтля. Подставив сюда \dot{q} из (11.10) и выполнив интегрирование по u , получим

$$T = -\frac{(\kappa/\kappa_h)\dot{q}_w u}{c_p\tau_w} - \frac{(\kappa/\kappa_h)u^2}{2c_p} + \text{const}. \quad (11.12)$$

В отличие от соответствующего уравнения для ламинарных течений (10.23b) (при $Pr = 1$) здесь постоянная интегрирования не равна в точности T_w , так как уравнения (11.7) и (11.8) не справедливы для вязких и теплопроводных слоев, однако ее удобно представить в виде $c_1 T_w$, где постоянная c_1 довольно близка к единице и зависит от $\dot{q}_w/\rho_w c_p u_\tau T_w$, u_τ/a_w и молекулярного числа Прандтля. Таким образом,

$$T = c_1 T_w - \frac{(\kappa/\kappa_h)\dot{q}_w u}{c_p \tau_w} - \frac{(\kappa/\kappa_h)u^2}{2c_p}. \quad (11.13)$$

Замечая, что $\rho = \rho_w(T_w/T)$, можно с помощью последнего уравнения исключить ρ из уравнения (11.7). Тогда интеграл, необходимый для получения зависимости u от y из уравнения (11.7), приобретает вид

$$\int \frac{dy}{\kappa y} = \int \frac{du/u_\tau}{\left[c_1 - (\kappa/\kappa_h)\dot{q}_w u/c_p T_w \tau_w - (\kappa/\kappa_h)u^2/2c_p T_w \right]^{1/2}}. \quad (11.14)$$

Заменяя $c_p T_w$ на $a_w^2/(\gamma - 1)$ и выполняя интегрирование, получаем закон стенки для сопряженных турбулентных течений

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{\sqrt{c_1}}{R} \sin\left(R \frac{u^*}{u_\tau}\right) - H \left[1 - \cos\left(R \frac{u^*}{u_\tau}\right) \right], \quad (11.15)$$

где

$$R = \frac{u_\tau}{a_w} \left[\frac{(\gamma - 1)\kappa}{2\kappa_h} \right]^{1/2}, \quad H = \frac{\dot{q}_w}{\tau_w u_\tau} \equiv \frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{\dot{q}_w}{\rho_w c_p u_\tau T_w} \left(\frac{a_w}{u_\tau} \right)^2, \quad (11.16a)$$

$$u^* = \frac{1}{\kappa} \ln y + \text{const.} \quad (11.16b)$$

Поскольку в уравнение (11.3) величина y входит в комбинации $u_\tau y/\nu_w$, можно записать

$$\frac{u^*}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_\tau y}{\nu_w} + c. \quad (11.16c)$$

Если $\dot{q}_w = 0$, а $u_\tau/a_w \rightarrow 0$, то $H = 0$, $R \rightarrow 0$ и

$$\frac{u}{u_\tau} = \sqrt{c_1} \frac{u^*}{u_\tau}. \quad (11.17)$$

Можно показать, что если отношение u_τ/a_w мало, то из условия сопряжения с логарифмическим законом для температуры в несопря-

женных течениях (уравнение (6.12a)) получаем $c_1 = 1 - O(\dot{q}_w)$ и, следовательно, $u = u^*$ при малых значениях \dot{q}_w . Поэтому постоянная c в уравнении (11.16с) оказывается равной аддитивной постоянной c в логарифмическом законе для пристенных слоев с постоянными свойствами. В общем случае c , как и c_1 , является функцией M_τ и B_q

$$B_q = \frac{\dot{q}_w}{\rho_w c_p u_\tau T_w}. \quad (11.18)$$

Изложенные выше результаты были впервые получены Ротта [1] и являются развитием работ Ван Дрифта [2].

Преобразование Ван Дрифта для внутреннего слоя

Упрощенные формы уравнения (11.15) и уравнения (11.13) для соответствующего профиля температур предлагались многими авторами. Ван Дрифт полагал $c_1 = 1$ и $\kappa/\kappa_h = 1$. (Напомним, что из (6.23) следует, что κ/κ_h — турбулентное число Прандтля для части течения с полностью развитой турбулентностью, а $c_1 = 1$ означает, что эффективное число Прандтля для вязкого и теплопроводного подслоев равно единице.) Ван Дрифт преобразовал уравнение (11.5), выразив u^* через u . В принятых нами обозначениях оно имеет вид

$$\frac{u^*}{u_\tau} = \frac{1}{R} \left(\arcsin \frac{R(u/u_\tau + H)}{(c_1 + R^2 H^2)^{1/2}} - \arcsin \frac{RH}{(c_1 + R^2 H^2)^{1/2}} \right). \quad (11.19)$$

Эта формула называется *преобразованием Ван Дрифта*. Ее можно рассматривать как преобразование внутрислойной части профиля скорости в пограничном слое сжимаемой жидкости $u(y)$ в профиль скорости несжимаемой жидкости $u^*(y)$, описываемый логарифмическим законом (11.16с). Однако проще считать уравнение (11.15) с учетом уравнений (11.16) следствием автомодельной теории внутреннего слоя для пограничного слоя в сжимаемой жидкости.

Если стенка теплоизолированная, то $H = 0$, и второй член в правой части уравнения (11.15) исчезает, а уравнение (11.19) принимает вид

$$\frac{u^*}{u_\tau} = \frac{1}{R} \arcsin \left(\frac{R}{\sqrt{c_1}} \frac{u}{u_\tau} \right), \quad (11.20)$$

т. е. вид уравнения (11.15) (без второго члена в правой части), разрешенного относительно u^*/u_τ . Из уравнения (11.20) непосредственно следует, что $u^* = u$ при $R \rightarrow 0$ и $c_1 \rightarrow 1$.

Из основных допущений следует, что, как и в случае течений несжимаемой жидкости, $\kappa = \kappa_h$. Выше было показано, что постоянные интегрирования c_1 и c , входящие соответственно в уравнения (11.11) и (11.14), являются функциями числа Маха M_7 и параметра теплового потока. (Тот факт, что постоянная c не обязательно равна своему значению для медленных течений, уменьшает роль уравнения (11.19) как преобразования, позволяющего перейти к внутренней части пограничного слоя в реальных медленных течениях.) Тщательный анализ экспериментальных данных [3] подтверждает, что внутрислойная автомодельность имеет место и в течениях сжимаемой жидкости, однако он не позволяет сделать определенный вывод о переменности c и c_1 . Значения $c = 5,0$ и $c_1 = 1$ для медленных течений в целом соответствуют экспериментальным данным, имеющим довольно большой разброс, однако Брэдшоу [4] приводит формулы для переменных c и c_1 , основанные, как будет показано ниже, на отборе более надежных данных.

Подставив вместо H его значение, определяемое вторым из уравнений (11.16а) с учетом (11.13), используя определение числа Маха $M_e = u_e/a_e$, полагая, подобно Ван Дристу, $c_1 = 1$ и $\kappa/\kappa_h = 1$ и замечая, что $\rho_w/\rho_e = T_e/T_w$, приведем уравнение (11.19) к виду

$$\frac{u^*}{u_\tau} = \frac{1}{A\sqrt{(c_f/2)(T_w/T_e)}} \left(\arcsin \frac{A\sqrt{(c_f/2)(T_w/T_e)}(u/u_\tau) + B/2A}{\sqrt{1+(B/2A)^2}} - \arcsin \frac{B/2A}{\sqrt{1+(B/2A)^2}} \right), \quad (11.21)$$

или

$$u^* = \frac{u_e}{A} \left(\arcsin \frac{2A^2(u/u_e) - B}{(B^2 + 4A^2)^{1/2}} + \arcsin \frac{B}{(B^2 + 4A^2)^{1/2}} \right), \quad (11.22)$$

где

$$A^2 = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{M_e^2}{T_w/T_e}, \quad B = \frac{1 + [(\gamma - 1)/2]M_e^2}{T_w/T_e} - 1. \quad (11.23)$$

Отметим, что выше предполагалось, что коэффициент восстановления r , определяемый как $(T_{aw}/T_e - 1)/[(\gamma - 1)/2]M_e^2$, где T_{aw} — температура адиабатной стенки, равен 1. Поскольку в действительности r несколько меньше единицы ($\sim 0,89$), перепишем выражения для A и B в виде

$$A^2 = \frac{[(\gamma - 1)/2]M_e^2 r}{T_w/T_e}, \quad B = \frac{1 + [(\gamma - 1)/2]M_e^2 r}{T_w/T_e} - 1. \quad (11.24)$$

11.2. Преобразования для сопряженных турбулентных течений

Преобразование Ван Дриста для слоя в целом

Если в случае сжимаемой жидкости применить преобразование Ван Дриста к внутренней части пограничного слоя, в которой турбулентность полностью развита, а сдвиговые напряжения постоянны, то будет получен логарифмический профиль (11.16с). Применяя то же преобразование к внешней части пограничного слоя в сжимаемой жидкости при постоянном давлении в слое, получим профиль, имеющий примерно такой же вид, что и профиль скорости в пограничном слое несжимаемой жидкости при постоянном давлении в слое. В частности, преобразованный профиль $u^*(y)$ можно описать более или менее точно, как и профиль скорости в несжимаемой жидкости, законами для стенки и следа, представленными формулами (6.39) и (6.41), а именно

$$\frac{u^*}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_\tau y}{\nu_w} + c + \frac{\Pi}{\kappa} \left(1 - \cos \pi \frac{y}{\delta} \right). \quad (11.25)$$

Однако это удобная для корреляции экспериментальных данных формула получена ценой сильного ограничения формы профиля скорости в следе, который должен иметь нулевой наклон и выходить из нуля при $y = 0$, в то время как профиль в целом имеет нулевой наклон при $y = \delta$ (весьма приближенная формула (11.25) не удовлетворяет этому требованию). Кроме того, «параметр следа» Π и толщина пограничного слоя δ представляют собой константы, которые можно подобрать так, чтобы уравнение (11.25) наилучшим образом описывало реальный или преобразованный профиль. Поэтому удачное применение уравнения (11.25) еще не позволяет сделать вывод о применимости внутрислойного анализа Ван Дриста для исследования *внешнего* слоя.

В разд. 6.4 было показано, что в случае течений несжимаемой жидкости при постоянном давлении и больших числах Рейнольдса параметр Π имеет постоянное значение $\sim 0,55$. Оптимальное значение Π , при котором уравнение (11.25) лучше всего описывает преобразованный профиль скорости, должно зависеть от числа Маха $M_\tau (\equiv u_\tau/a_w)$ и параметра теплового потока $B_q (\equiv \dot{q}_w/\rho_w c_p u_\tau T_w)$. Определение вида этой функциональной зависимости затрудняется тем, что большая часть экспериментальных данных для течений сжимаемой жидкости получена при малых числах Рейнольдса, а также отсутствием ясности в вопросе о том, по каким параметрам надо рассчитывать число Рейнольдса, чтобы им можно было пользоваться при анализе влияния малого числа Рейнольдса на профиль

дефекта скорости. Если предположить, что это влияние возникает на нерегулярной поверхности раздела между турбулентным и неламинарным «безвихревым» течениями жидкости, то число Рейнольдса следует рассчитывать по параметрам набегающего потока. Наиболее крупные нерегулярности, обнаруживаемые на поверхности раздела при визуализации течения, имеют длину порядка δ и образуются под действием самых крупных вихрей, характерный размер которых равен толщине сдвигового слоя. Поэтому характерный размер нерегулярностей поверхности раздела равен δ , а поскольку оказывается, что профиль напряжений сдвига, построенный в виде $\tau/\tau_w = f(y/\delta)$, почти не зависит от числа Рейнольдса, то можно использовать τ_w как характерное напряжение сдвига, а $(\tau_w/\rho_e)^{1/2}$ как характерную скорость, вычисленную по плотности *набегающего потока*. Поэтому число Рейнольдса следует представлять не в том виде, в котором оно естественным образом получается в преобразовании Ван Дриста ($R = u_\tau \delta / \nu_w$), а в виде $R =$

$$= \left(\frac{\tau_w}{\rho_e} \right)^{1/2} \frac{\delta}{\nu_e} \left(\equiv \frac{u_\tau \delta}{\nu_e} \left(\frac{\rho_w}{\rho_e} \right)^{1/2} \right). \text{ В то же время, в работе [5] показано, что представление числа Рейнольдса в виде } \rho_e u_e \theta / \mu_w \text{ также обеспечивает превосходную корреляцию экспериментальных данных в широком диапазоне чисел Рейнольдса и Маха.}$$

Если физическая природа явлений, происходящих при малых числах Рейнольдса в течениях сжимаемой и несжимаемой жидкости, одна и та же, то параметр следа Π для преобразованного профиля не должен зависеть от числа Рейнольдса при $(\tau_w/\rho_e)^{1/2} \delta / \nu_e > 2000$, что в случае пограничного слоя в медленных течениях соответствует $u_e \theta / \nu > 5000$. Так как параметр Π номинально является функцией M_τ и B_q , то нельзя определенно сказать, как он меняется в зависимости от числа Рейнольдса; однако можно с некоторым основанием предположить, что отношение Π к его асимптотическому значению при больших числах Рейнольдса зависит от выбранного числа Рейнольдса так же, как и в случае течений несжимаемой жидкости. Действительно, хотя по сравнению со случаем малых скоростей разброс экспериментальных данных довольно велик, в пограничных слоях на адиабатной стенке ($\dot{q}_w = 0$) Π , по всей вероятности, весьма медленно убывает с ростом числа Маха [6]. Поэтому при больших числах Рейнольдса Π можно считать равным 0,55 во всем диапазоне значений числа Маха M_τ .

Если c и c_1 — известные функции M_τ и B_q , а Π — известная функция M_τ , B_q и числа Рейнольдса, то приняв в уравнении (11.19) $y = \delta$ и $u = u_e$ и подставив u^* из уравнения (11.25), получим u_e/u_τ в зависимости от $u_\tau \delta / \nu_w$. На практике надо знать величину коэффици-

ента поверхностного трения $2\tau_w/\rho_e u_e^2$ в зависимости от $u_e\theta/\nu_e$ или переменной Фернхольца $\rho_e u_e \theta/\mu_w$ при известных M_e (и T_e) и либо \dot{q}_w , либо T_w . Чтобы получить указанную зависимость, приходится прибегать к итерационной процедуре, задав исходное значение τ_w . Кроме того, при каждой итерации приходится интегрировать профиль скорости сжимаемого течения, чтобы получить θ/δ для перехода от числа Рейнольдса $u_e\theta/\nu_e$; задаваемого на входе, к числу Рейнольдса $u_e\delta/\nu_w$, которое входит в рассматриваемое преобразование [4]. Формулы для поверхностного трения приведены в разд. 11.3.

Преобразование Ван Дриста можно рассматривать как *решение* задачи о течении сжимаемой жидкости лишь в том случае, если коэффициенты s , s_1 и Π не зависят от числа Маха и параметра теплового потока. Однако его можно использовать (совместно с данными о значениях s , s_1 и Π для течения сжимаемой жидкости) для корреляции осредненных значений физических параметров течения в пограничном слое сжимаемой жидкости при постоянном давлении. Как отмечалось выше, диапазон изменения указанных коэффициентов почти полностью лежит в области разброса экспериментальных данных, который довольно велик.

Преобразованный профиль пограничного слоя в течении с ненулевым градиентом давления удовлетворяет уравнению (11.25), равно как и соответствующий ему реальный профиль при медленном течении, однако, как и при малых скоростях, не существует простой формулы, которая связывала бы параметр формы Π с локальным градиентом давления. Более того, зависимости u_e , Π и δ от x , как правило, не соответствуют какому-либо реальному низкоскоростному пограничному слою. Иначе говоря, нельзя подобрать такое распределение давления $p(x)$ в низкоскоростном потоке, при котором каждому значению x соответствовал бы тот же профиль скорости, что и в потоке сжимаемой жидкости. Общая идея преобразования Ван Дриста (но не его детали) будет сохранена, если рассчитывать пограничные слои сжимаемой жидкости, пользуясь для определения напряжений сдвига формулой длины смешения, а для расчета теплового потока использовать предположение о постоянстве турбулентного числа Прандтля. Такие методы расчета рассматриваются в разд. 11.4.

Другие преобразования

В гл. 10 рассматривались строгие методы преобразования для ламинарных пограничных слоев в сжимаемой жидкости и ламинарных пограничных слоев в несжимаемой жидкости, однако область при-

менимости этих преобразований ограничена. Для турбулентных течений возможны лишь приближенные преобразования, так как наши представления об осредненных по времени свойствах турбулентных течений недостаточно полные. Как и в случае ламинарных течений, потребность в преобразовании уменьшилась благодаря нашей способности выполнять большие объемы вычислений, а предположение, что пульсации плотности оказывают пренебрежимо слабое влияние на турбулентность, позволило с некоторой осторожностью расширить область применения моделей для медленных течений, включив в нее течения сжимаемой жидкости. Преобразование Ван Дриста основано на применении этого допущения для получения формулы (длины смещения) для внутреннего слоя. Во внешнем слое, где длина смещения не равна ее внутрислойному значению $\kappa\delta$, метод Ван Дриста не позволяет получить точные результаты, а его преобразование не исключает влияние сжимаемости, хотя, конечно, и *уменьшает* его в пределах разброса имеющихся экспериментальных данных.

Преобразования, устанавливающие соответствие между течениями сжимаемой и несжимаемой жидкости, можно разделить на две группы: к первой относятся преобразования для полного профиля скоростей (и, следовательно, для профиля напряжений сдвига), ко второй — преобразования, применимые только для интегральных характеристик (в первую очередь формулы для поверхностного трения). Общее мнение исследователей сводится к тому, что применяя указанные преобразования к градиентным течениям, в результате можно получить низкоскоростные течения, не реализуемые на практике. Поэтому ограничимся только рассмотрением течений при постоянном давлении.

В работе [7] дан содержательный обзор выполненных ранее исследований и приведено одно из наиболее общих известных преобразований, которое получено при следующих двух основных допущениях: 1) подходящая величина отношения линейных размеров в исходном (высокоскоростном) и преобразованном (медленном) течениях зависит только от x (и не зависит от y); 2) отношение функций тока преобразованного и исходного течений равно отношению (постоянной) вязкости в преобразованном течении к вязкости сжимаемой жидкости, соответствующей «промежуточной температуре», заключенной в интервале значений между T_w и T_e . Последнее допущение тщательно обосновано Коулзом [7], однако выбор промежуточной температуры несколько произволен. В качестве таковой выбрана температура на внешней границе вязкого подслоя, однако, чтобы избежать рассогласования с экспериментальными дан-

ными по поверхностному трению, границу подслоя в преобразованном течении приходится размещать при $u_\tau y/\nu = 430$, в то время как толщина реального подслоя примерно в 10 раз меньше. Коулз [7] предполагает, что на самом деле важен не вязкий подслей как таковой, а весь турбулентный пограничный слой при наименьшем числе Рейнольдса, при котором еще существует турбулентность; для такого пограничного слоя $u_\tau \delta/\nu$ действительно равно примерно 430. Преобразование Коулза не следует путать с более простым предположением об использовании промежуточной температуры, сущность которого сводится к тому, что любую формулу для трения при малых скоростях течения можно применять и для высокоскоростных течений, если физические характеристики жидкости определены при температуре T_i , заключенной в интервале между температурами T_w и T_e (см. работу [8]).

11.3. Плоский пограничный слой с нулевым градиентом давления

Формулы для расчета поверхностного трения на гладкой стенке

Для расчета пограничного слоя в сжимаемой жидкости на плоской пластине был предложен ряд эмпирических формул, обладающих разной степенью точности. Формулы Ван Дрифта [2] и Сполдинга — Чи [9] дают более высокую точность, чем остальные (см. работы [10, 11]). Кроме того, они позволяют производить расчеты в более широком диапазоне чисел Маха и отношений температуры стенки к полной температуре. Обе формулы обеспечивают примерно одинаковую точность, хотя получены неодинаковыми способами. В обоих случаях используются следующие соотношения между характеристиками сжимаемой и несжимаемой жидкостей:

$$c_{f_i} = F_c c_f, \quad (11.26a)$$

$$R_{\theta_i} = F_{R_\theta} R_\theta, \quad (11.26b)$$

$$R_{x_i} = \int_0^{R_x} \frac{F_{R_\theta}}{F_c} dR_x = F_{R_x} R_x. \quad (11.26c)$$

Индексом i здесь обозначены значения величин для несжимаемой жидкости; множители F_c , F_{R_θ} и $F_{R_x} (\equiv F_{R_\theta}/F_c)$, определяемые уравнениями (11.26), зависят от числа Маха, отношения температуры стенки к полной температуре и коэффициента восстановления. Формула Сполдинга — Чи получена в предположении, что $c_f F_c$ и $F_{R_x} R_x$

связаны однозначным образом. Величина F_c получена из теории длины смешения, а величина F_R найдена полуэмпирическим путем. Согласно Сполдингу и Чи,

$$F_c = \frac{T_{aw}/T_e - 1}{(\arcsin \alpha + \arcsin \beta)^2}, \quad F_{R\theta} = \left(\frac{T_{aw}}{T_e}\right)^{0,772} \left(\frac{T_w}{T_e}\right)^{-1,474}, \quad (11.27)$$

где при $r = (T_{aw} - T_e)/(T_{oe} - T_e)$ — коэффициенте восстановления,

$$\alpha = \frac{T_{aw}/T_e + T_w/T_e - 2}{\left[(T_{aw}/T_e + T_w/T_e)^2 - 4(T_w/T_e)\right]^{1/2}}, \quad (11.28a)$$

$$\beta = \frac{T_{aw}/T_e - T_w/T_e}{\left[(T_{aw}/T_e + T_w/T_e)^2 - 4(T_w/T_e)\right]^{1/2}},$$

$$\frac{T_{aw}}{T_e} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} r M_e^2. \quad (11.28b)$$

В соответствии с методом Ван Дриста, который целиком основан на теории длины смешения, F_c , как и прежде, определяется уравнениями (11.27) и (11.28). Однако теперь параметр $F_{R\theta}$ определяется выражением

$$F_{R\theta} = \frac{\mu_e}{\mu_w}. \quad (11.29)$$

Формула Ван Дриста для поверхностного трения выводится аналогично формуле для несопряженных течений (разд. 6.5), однако в данном случае вывод оказывается более трудоемким. Приходится разлагать интеграл в ряд методом интегрирования по частям; затем, отбросив члены высших порядков, вновь получают простое выражение. Применяя этот способ, а также пользуясь степенной зависимостью вязкости от температуры

$$\mu \propto T^\omega,$$

из которой следует, что $F_{R\theta} = (T_e/T_w)^\omega$, можно получить выражение, связывающее c_f и R_x для турбулентных пограничных слоев сжимаемой жидкости при наличии и отсутствии теплообмена

$$\frac{0,242(\arcsin \alpha + \arcsin \beta)}{A\sqrt{c_f}(T_w/T_e)} = 0,41 + \lg R_x c_f - \left(\frac{1}{2} + \omega\right) \lg \frac{T_w}{T_e}. \quad (11.30)$$

Здесь x — продольная координата, отсчитываемая от эффективного начала турбулентного течения, а A определяется первым из уравнений (11.23). При выводе формулы (11.30) использована формула

Прандтля для длины смешения $l = \kappa u$. Если же при выводе указанного уравнения воспользоваться выражением для длины смешения, вытекающим из закона подобия фон Кармана

$$l = \kappa \left| \frac{\partial u / \partial y}{\partial^2 u / \partial y^2} \right|,$$

то будет получена формула, аналогичная (11.30), однако вместо $\frac{1}{2} + \omega$ в ней будет стоять просто ω . Эта формула известна как вторая формула Ван Дриста и названа так, чтобы не путать ее с первой формулой Ван Дриста (11.30). Вторую формулу Ван Дриста можно представить в виде

$$\frac{0,242(\arcsin \alpha + \arcsin \beta)}{A\sqrt{c_f}(T_w/T_e)} = 0,41 + \lg R_x c_f - \omega \lg \frac{T_w}{T_e}. \quad (11.31)$$

Результаты расчета по этой формуле лучше согласуются с экспериментальными данными, чем результаты расчета по формуле (11.30), и поэтому предпочтение следует отдавать второй формуле Ван Дриста.

Формулы (11.30) и (11.31) представляют собой аналог уравнения фон Кармана (6.52), рассмотренного в разд. 6.5, и в случае несжимаемой жидкости сводятся к нему. Для несжимаемого адиабатного течения $T_w/T_e \rightarrow 1$, а $B = 0$, и, следовательно, с учетом (11.28а) можно переписать уравнение (11.31) в виде

$$\frac{0,242 \arcsin A}{A\sqrt{c_f}} = 0,41 + \lg R_x c_f.$$

Кроме того, величина A имеет порядок величины M_e , и поскольку она мала, то $\arcsin A \approx A$. Получаемое при этом уравнение идентично уравнению (6.52).

Из второй формулы Ван Дриста следует, что среднее значение коэффициента поверхностного трения \bar{c}_f определяется выражением

$$\frac{0,242(\arcsin \alpha + \arcsin \beta)}{A\sqrt{\bar{c}_f}(T_w/T_e)} = \lg R_x \bar{c}_f - \omega \lg \frac{T_w}{T_e}. \quad (11.32)$$

На рис. 11.1 и 11.2 показаны зависимости локального и среднего коэффициентов поверхностного трения для плоской теплоизолированной пластины при разных значениях числа Маха, рассчитанные соответственно по формулам (11.31) и (11.32). Коэффициент восстановления был принят равным 0,88.

На рис. 11.3 показано влияние сжимаемости на локальный и средний коэффициенты трения. В этом случае коэффициенты по-

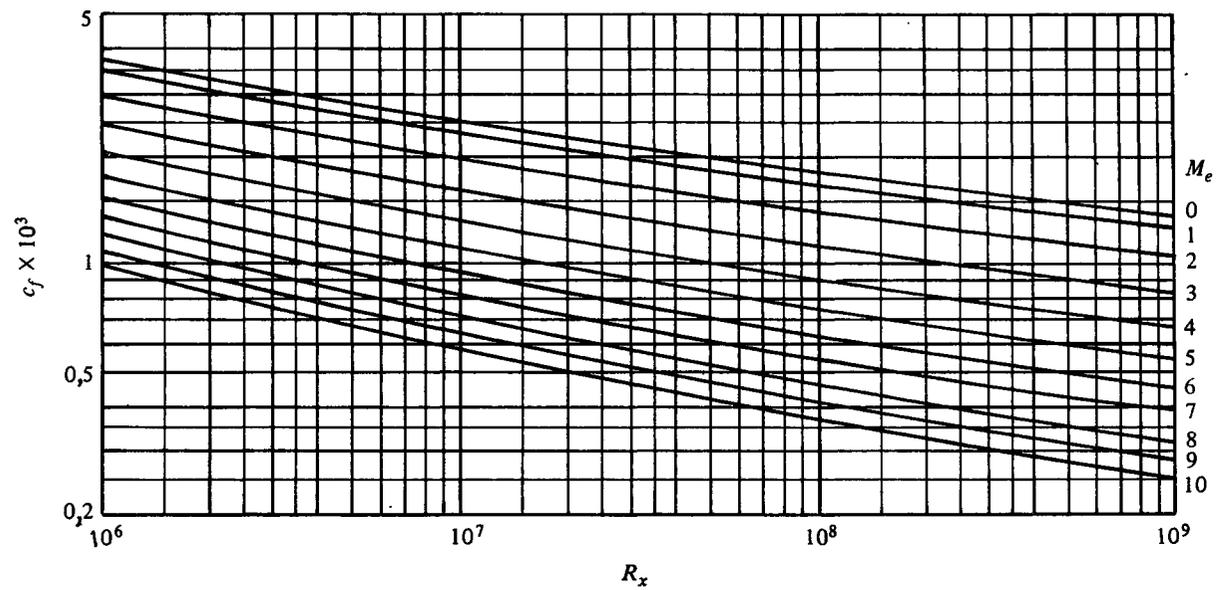


Рис. 11.1. Локальный коэффициент поверхностного трения для гладкой теплоизолированной плоской пластины, рассчитанный по второй формуле Ван Дриста.

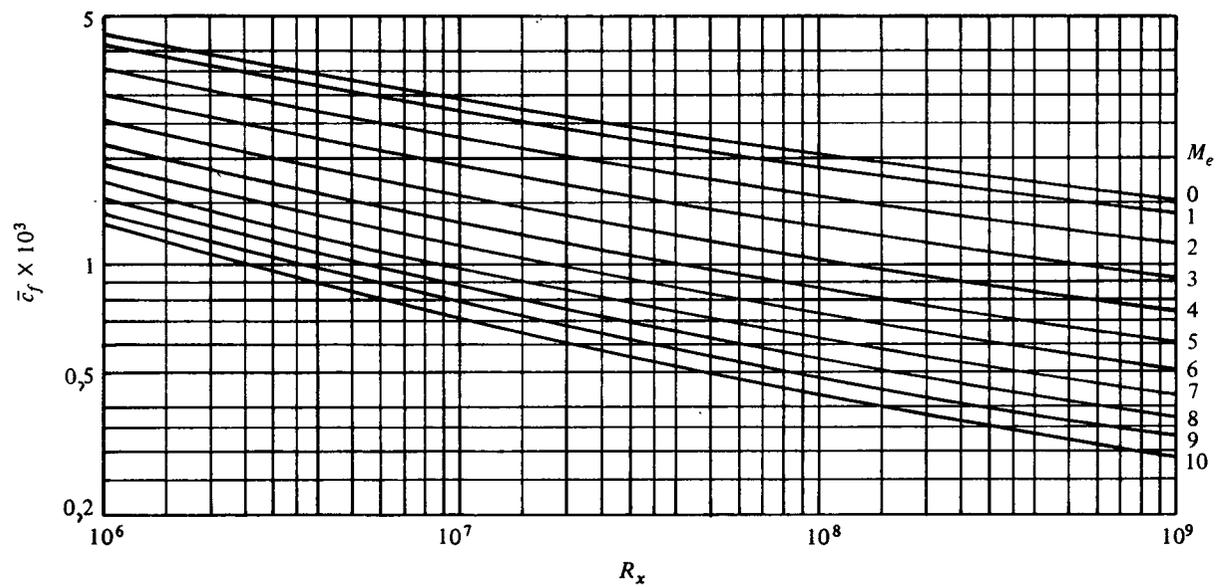


Рис. 11.2. Средний коэффициент поверхностного трения для гладкой теплоизолированной плоской пластины, рассчитанный по второй формуле Ван Дрифта.

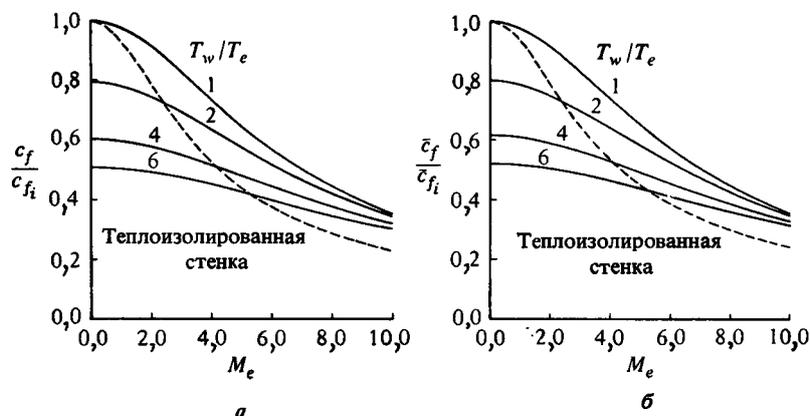


Рис. 11.3. Влияние сжимаемости на (а) локальный коэффициент поверхностного трения и (б) средний коэффициент поверхностного трения для гладкой плоской пластины, рассчитанные по второй формуле Ван Дрифта при $R_x = 10^7$.

верхностного трения вычислялись в зависимости от числа Маха при заданных значениях числа Рейнольдса ($R_x = 10^7$) и отношения температур T_w/T_e . Представленные на рис. 11.1 результаты для локального коэффициента поверхностного трения в случае несжимаемой жидкости и при наличии теплообмена получены из предельной формулы (11.31). Заметим, что при $M_e \rightarrow 0$ и $T_w/T_e = 1$, $A \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow -1$, а $\beta \rightarrow 1$, и, следовательно, значение выражения

$$\frac{\arcsin \alpha + \arcsin \beta}{A}$$

становится неопределенным. Применяя правило Лопиталья и вспоминая, что $B = (T_e/T_w) - 1$, после ряда алгебраических преобразований можно представить уравнение (11.31) для турбулентных течений несжимаемой жидкости при наличии теплообмена в виде

$$\frac{2}{\sqrt{T_w/T_e + 1}} \frac{0,242}{\sqrt{c_f}} = 0,41 + \lg R_x c_f - \omega \lg \frac{T_w}{T_e}. \quad (11.33)$$

Аналогичным образом в случае несжимаемой жидкости формулу (11.32) для среднего коэффициента трения можно привести к виду

$$\frac{2}{\sqrt{T_w/T_e + 1}} \frac{0,242}{\sqrt{\bar{c}_f}} = \lg R_x \bar{c}_f - \omega \lg \frac{T_w}{T_e}. \quad (11.34)$$

Более общей формой преобразования Ван Дрифта, рассмотренной в разд. 11.1, можно пользоваться и в том случае, когда молеку-



Рис. 11.4. Зависимость коэффициента поверхностного трения от температуры стенки [4].

лярное и турбулентное числа Прандтля не равны единице, иначе говоря, когда не равно единице отношение κ/κ_h в уравнении (11.11) и постоянная интегрирования c_1 в его интегральной форме (11.13). Кроме того, допускается существование составляющей следа, причем параметр следа Π считается функцией числа Маха и теплового потока. В такой форме преобразование Ван Дрифта можно использовать также для вывода формулы поверхностного трения, которая, в принципе должна превосходить по точности и первую и вторую формулы Ван Дрифта. Брэдшоу [4] называет ее третьей формулой Ван Дрифта и приводит графики для 1) предпочтительного закона поверхностного трения при малых скоростях потока, 2) отношения коэффициента поверхностного трения на теплоизолированной стенке к его значению при малых скоростях в зависимости от чисел Маха и Рейнольдса и 3) отношения коэффициента поверхностного трения к его значению на теплоизолированной стенке в функции отношения температур на стенке в некотором диапазоне чисел Маха и Рейнольдса. График (3) воспроизведен на рис. 11.4; для сравнения на нем приведены результаты расчета по второй формуле Ван Дрифта и по формуле Сполдинга — Чи. Падение c_f в случае сильно охлажденной стенки обусловлено тем, что, как можно судить по весьма ограниченному экспериментальным данным, значение аддитивной постоянной c в логарифмическом законе (11.25) с ростом теплообмена изменяется. Таким образом, различие между второй формулой Ван Дрифта (в которой c считается постоянной) и его третьей формулой отражает реальную неопределенность и недостаточность экспериментальных данных.

Коэффициент аналогии Рейнольдса

Результаты исследований, проведенных авторами работ [9, 12], показывают, что при числах Маха $M_e \leq 5$ и почти теплоизолированной стенке коэффициент аналогии Рейнольдса

$$\frac{St}{c_f/2} = 1,16 \quad (11.35)$$

позволяет адекватно описать имеющиеся экспериментальные данные. Однако в случае турбулентных течений на сильно охлажденных поверхностях и числе Маха $M_e > 5$ при любом значении отношения температуры стенки к полной температуре значение коэффициента аналогии Рейнольдса довольно неопределенно. Недавно полученные данные [11] показывают, что при локальных числах Маха $M_e > 6$ и $T_w/T_0 \leq 0,3$ значения коэффициента аналогии Рейнольдса группируются вблизи единицы. Типичные данные, полученные при $M_e = 11,3$, приведены на рис. 11.5 и показывают, что экспериментальные значения коэффициента аналогии Рейнольдса имеют разброс в пределах 0,8—1,4 и не обнаруживают определенной зависимости от T_w/T_0 .

Формулы для расчета поверхностного трения на шероховатой стенке

Предполагая, что коэффициенты поверхностного трения для сжимаемой и несжимаемой жидкостей связаны соотношением (11.26а), можно использовать формулы для поверхностного трения на гладких плоских пластинах, (11.32) и (11.33), для вывода аналогичных формул для пластин с песочной шероховатостью. Согласно

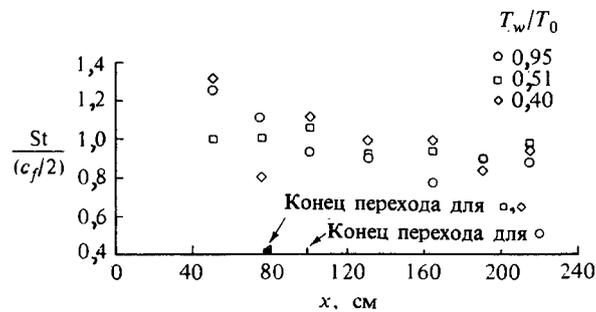


Рис. 11.5. Значения коэффициента аналогии Рейнольдса при $M_e = 11,3$, $R_e/m = 54 \times 10^6$ [12].

экспериментальным данным Годдарда [13], в случае плоских теплоизолированных пластин с полностью развитой шероховатостью

$$F_c = \frac{T_{aw}}{T_e}. \quad (11.36)$$

Экспериментальные значения c_f подтвердили справедливость этого соотношения при принятом Годдардом значении коэффициента восстановления при турбулентном течении $r = 0,86$. Следует подчеркнуть, что уравнение (11.36) получено для течений на поверхностях с полностью развитой шероховатостью, при которых скорость потока на вершинах элементов шероховатости остается дозвуковой. Этот вывод согласуется с результатами опытов, выполненных впервые Никурадзе для течений несжимаемой жидкости и показавших, что сопротивление поверхностного трения на поверхностях с полностью развитой шероховатостью равно суммарному сопротивлению формы элементов шероховатости.

Влияние сжимаемости на величину поверхностного трения при турбулентном течении на поверхности шероховатой теплоизолированной пластины рассмотрено также Фентером [14]. Полученные им результаты согласуются с соотношением (11.36) только при числах Маха, близких к единице, и отсутствии теплообмена. При $T_w = T_e$ эта теория дает значения c_f , заниженные по сравнению с результатами Годдарда на 14% при $M_e = 2,0$ и на 45% при $M_e = 4,0$. Приведенные Фентером [14] экспериментальные данные для $M_e = 1,0$ и $2,0$ хорошо согласуются с развитой им теорией в случае теплоизолированной стенки. Различие экспериментальных значений c_f , полученных в работах [13, 14], по-видимому, объясняется недостаточной точностью измерения высоты элементов шероховатости. Теория Фентера [14] основана на допущениях, справедливость которых при больших числах Маха сомнительна. Именно в этом может заключаться причина различия в значениях c_f , полученных в работах [13, 14] при $T_w = T_e$.

На рис. 11.6 и 11.7 показано распределение среднего коэффициента поверхностного трения \bar{c}_f для теплоизолированной пластины с песочной шероховатостью, а на рис. 11.8 и 11.9 — результаты для пластины с песочной шероховатостью при температуре стенки, равной температуре набегающего потока. Во всех случаях предполагалось, что переход к турбулентному течению происходит непосредственно на передней кромке пластины.

На рис. 11.10 показана зависимость отношения значений коэффициента поверхностного трения для сжимаемой и несжимаемой жидкостей от числа Маха для разных типов течения на поверхно-

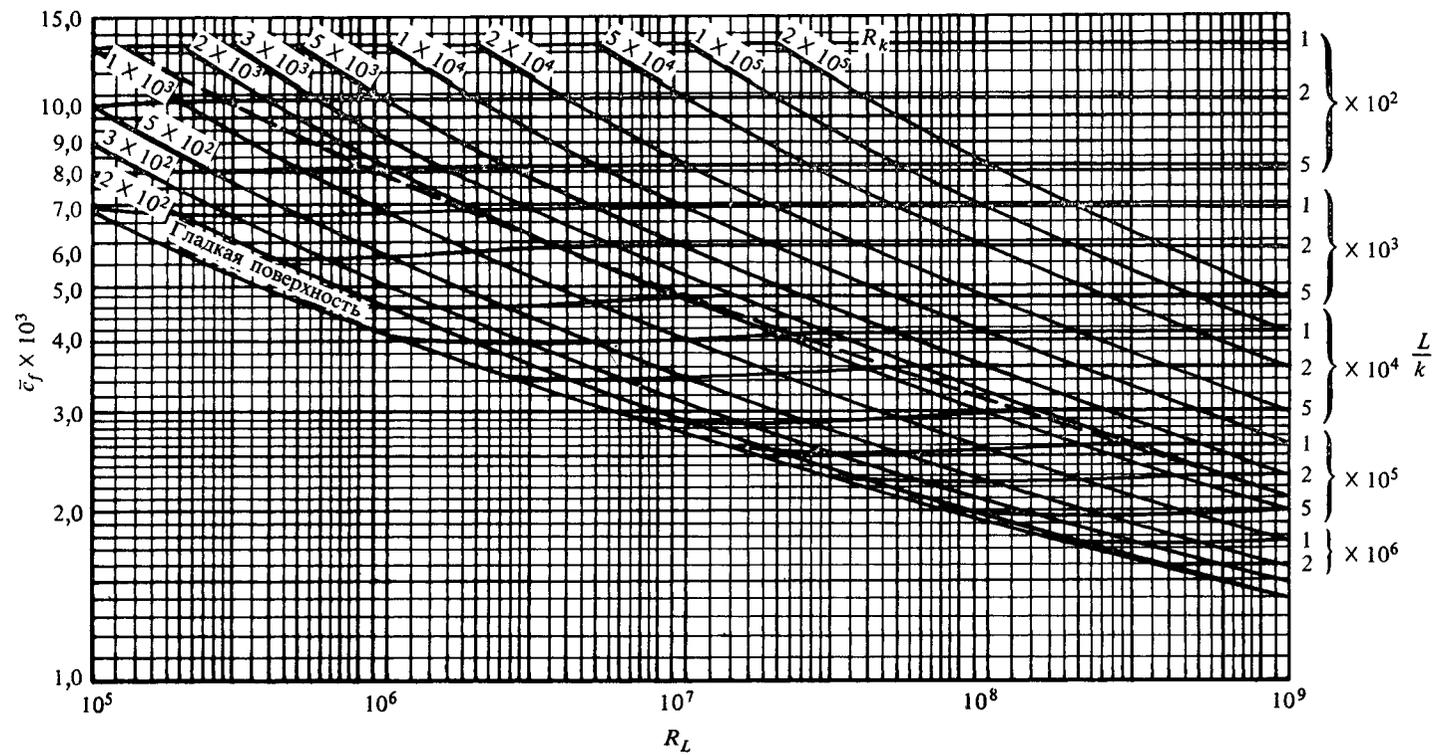


Рис. 11.6. Средний коэффициент поверхностного трения для плоской теплоизолированной пластины с песочной шероховатостью при $M_e = 1$.

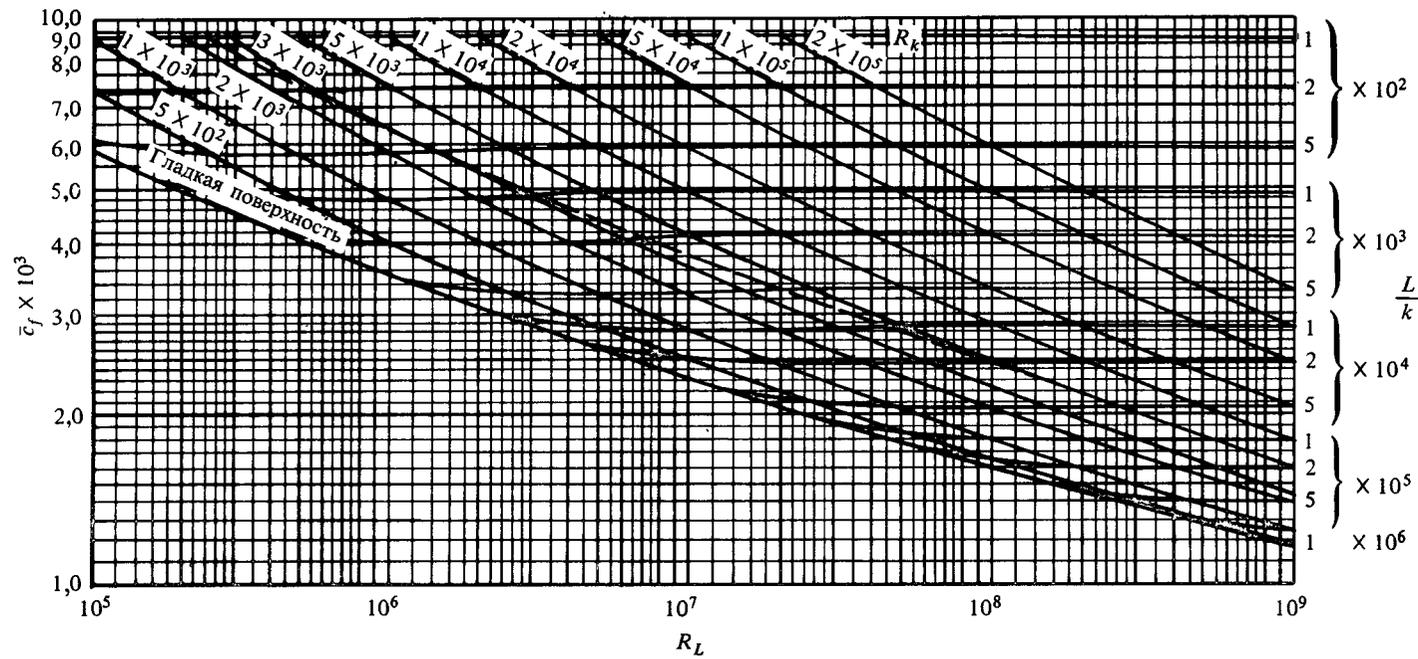


Рис. 11.7. Средний коэффициент поверхностного трения для плоской теплоизолированной пластины с песочной шероховатостью при $M_e = 2$.

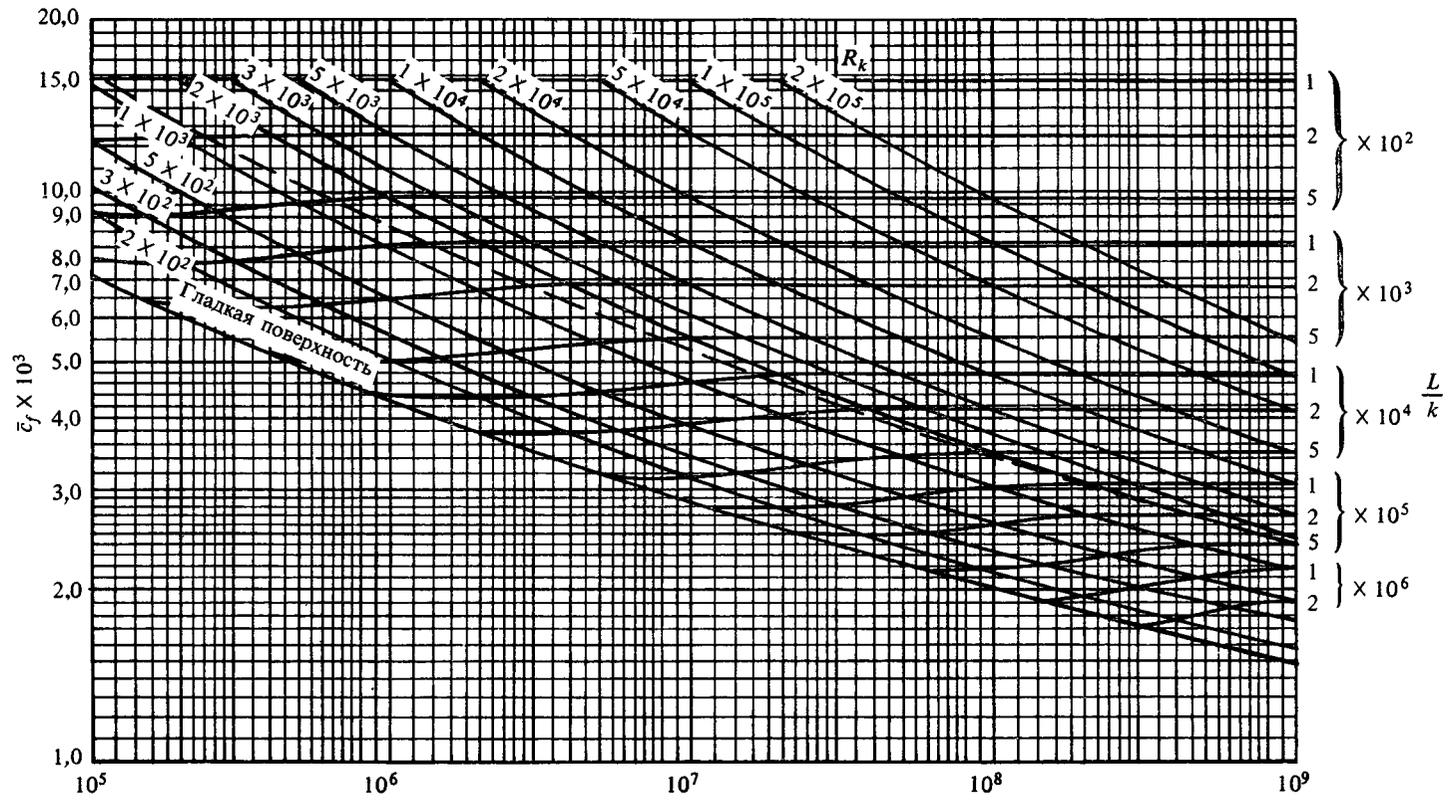


Рис. 11.8. Средний коэффициент поверхностного трения для плоской пластины с песочной шероховатостью при $T_w/T_e = 1$ и $M_e = 1$.

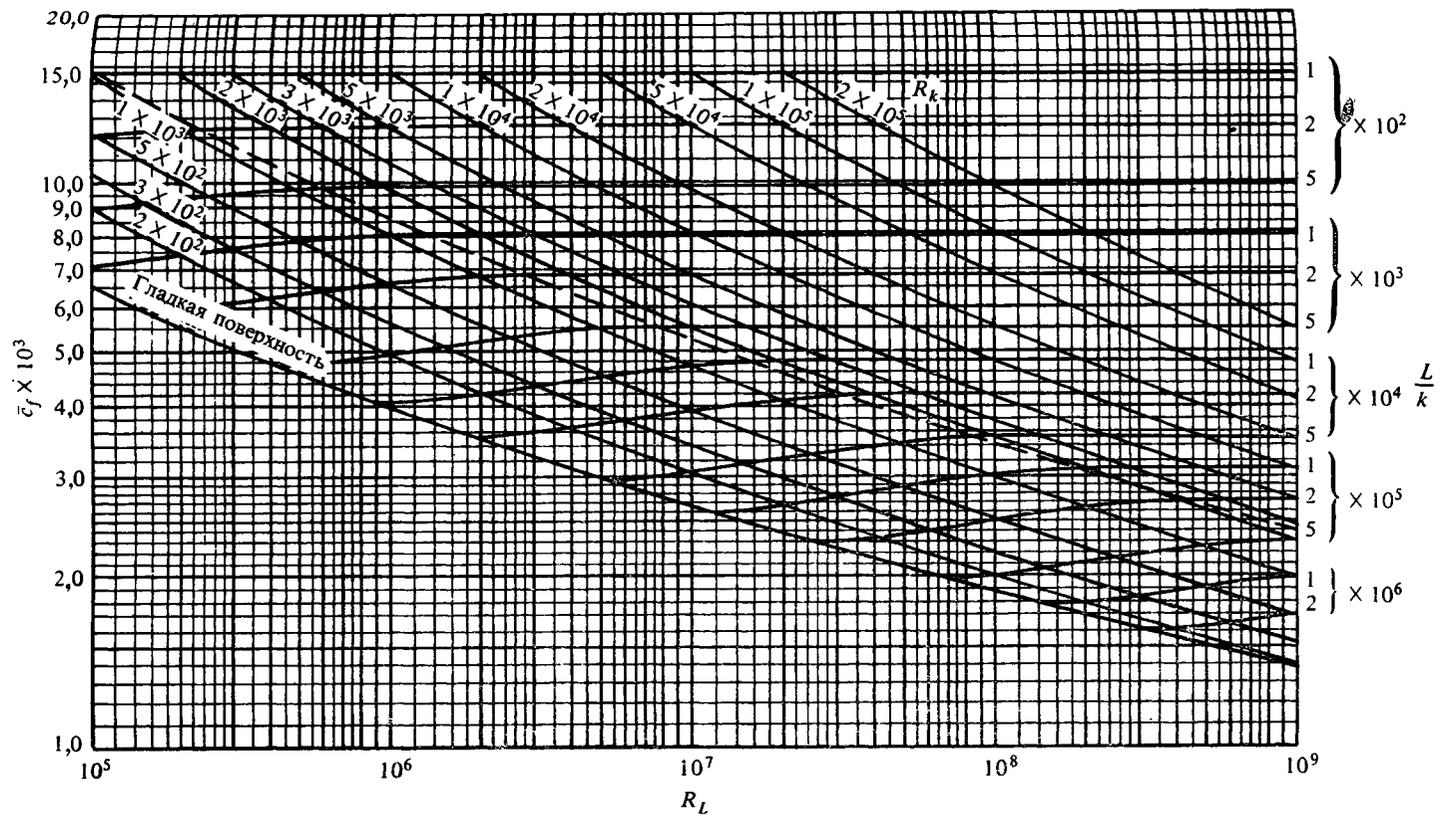
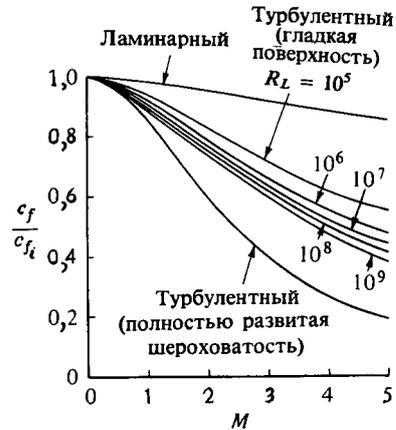


Рис. 11.9. Средний коэффициент поверхностного трения для плоской пластины с песочной шероховатостью при $T_w/T_e = 1$ и $M_e = 2$.

Рис. 11.10. Зависимость от числа Маха отношения локальных коэффициентов поверхностного трения для сжимаемой и несжимаемой жидкостей и разных режимов течений воздуха на поверхности плоской теплоизолированной пластины при заданных значениях числа Рейнольдса $u_e L / \nu_e$.



сти теплоизолированной (адиабатной) пластины. При турбулентном течении зависимость гораздо сильнее, чем при ламинарном, и эта тенденция с ростом числа Рейнольдса становится все более выраженной, достигая максимума для стенки с полностью развитой шероховатостью, когда влияние вязкости становится пренебрежимо малым. Это объясняется тем, что влияние вязкости сильнее всего проявляется вблизи стенки (в вязком подслое), и поэтому величина поверхностного трения определяется числом Рейнольдса, рассчитанным по значению вязкости на стенке. С ростом M_e отношение вязкости жидкости на стенке к ее вязкости в набегающем потоке увеличивается; поэтому данное значение $u_e L / \nu_e$ соответствует меньшему значению $u_e L / \nu_w$ и, следовательно, большему значению c_f . С ростом $u_e L / \nu_e$ влияние на c_f уменьшается, поскольку зависимость c_f от R_L становится более слабой. На поверхностях с полностью развитой шероховатостью этот эффект отсутствует.

11.4. Плоское течение с градиентом давления

Теперь обратимся к расчету плоского течения дифференциальным методом, в котором используется понятие турбулентной вязкости, введенное в разд. 6.6 и приспособленное для исследования течений сжимаемой жидкости.

Если в уравнениях (3.38) и (3.46) пренебречь объемными силами и отбросить члены $\rho' u' v'$ и $\rho' T' v'$, содержащие пульсационную составляющую плотности, то основные уравнения пограничного

слоя в двумерном турбулентном потоке можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0, \quad (11.37)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \overline{\rho v} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right), \quad (11.38)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \overline{\rho v} \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[k \frac{\partial T}{\partial y} - c_p \rho \overline{T'v'} + u \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right) \right], \quad (11.39)$$

где, как и ранее, $\overline{\rho v} = \rho v + \overline{\rho'v'}$. Определив турбулентную вязкость и турбулентное число Прандтля в виде

$$-\overline{u'v'} = \epsilon_m \frac{\partial u}{\partial y}, \quad -\overline{T'v'} = \frac{\epsilon_m}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (11.40)$$

и воспользовавшись уравнением Бернулли $-dp/dx = \rho_e u_e (du_e/dx)$, можно привести уравнения (11.38) и (11.39) к виду

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \overline{\rho v} \frac{\partial u}{\partial y} = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \rho \epsilon_m) \frac{\partial u}{\partial y} \right], \quad (11.41)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \overline{\rho v} \frac{\partial H}{\partial y} = \left[\left(k + c_p \rho \frac{\epsilon_m}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + u (\mu + \rho \epsilon_m) \frac{\partial u}{\partial y} \right]. \quad (11.42)$$

Затем, вспомнив определения числа Прандтля $Pr = \mu c_p/k$ и полной энтальпии совершенного газа, можно записать

$$\left(k + c_p \rho \frac{\epsilon_m}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial y} = \left(\frac{\mu}{Pr} + \rho \frac{\epsilon_m}{Pr_t} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial y} - u \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Тогда уравнение (11.42) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \overline{\rho v} \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\mu}{Pr} + \rho \frac{\epsilon_m}{Pr_t} \right) \frac{\partial H}{\partial y} + \right. \\ \left. + \left[\mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) + \rho \epsilon_m \left(1 - \frac{1}{Pr_t} \right) \right] u \frac{\partial u}{\partial y} \right\}. \end{aligned} \quad (11.43)$$

Как и в гл. 10, воспользуемся преобразованием Фолкнера — Скэн

$$d\eta = \sqrt{\frac{u_e}{\nu_e x}} \frac{\rho}{\rho_e} dy, \quad \psi(x, y) = \sqrt{\rho_e \mu_e u_e x} f(x, \eta). \quad (10.1)$$

Функцию тока введем в таком виде, чтобы она удовлетворяла уравнению неразрывности (11.37):

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \overline{\rho v} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (11.44)$$

Теперь уравнения движения и энергии, (11.41) и (11.43), можно записать в виде, аналогичном уравнениям (10.3) и (10.4),

$$(bf'')' + m_1 ff'' + m_2 [c - (f')^2] = x \left(f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (11.45)$$

$$(eS' + df'f'')' + m_1 fS' = x \left(f' \frac{\partial S}{\partial x} - S' \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (11.46)$$

однако в данном случае

$$b = C(1 + \epsilon_m^+), \quad e = \frac{C}{Pr} \left(1 + \epsilon_m^+ \frac{Pr}{Pr_t} \right),$$

$$d = \frac{Cu_e^2}{H_e} \left[1 - \frac{1}{Pr} + \epsilon_m^+ \left(1 - \frac{1}{Pr_t} \right) \right], \quad \epsilon_m^+ = \frac{\epsilon_m}{\nu}. \quad (11.47)$$

Если ввести скорость вдува на стенке v_w , то граничные условия $y = 0$, $v = v_w(x)$, $u = 0$, $H = H_w(x)$ или $\left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_w = -\frac{c_{p_w}}{k_w} \dot{q}_w$,

$$(11.48a)$$

$y = \delta$, $u = u_e(x)$, $H = H_e$ (11.48b)

можно представить в преобразованных переменных в виде

$$\eta = 0, \quad f' = 0, \quad f_w = \frac{-1}{(u_e \mu_e \rho_e x)^{1/2}} \int_0^x \rho_w v_w dx,$$

$$S = S_w(x) \text{ или } S'_w = -\frac{c_{p_w}}{k_w} \frac{c_w}{H_e} \frac{x \dot{q}_w}{\sqrt{R_x}}, \quad (11.49a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad f' = 1, \quad S = 1. \quad (11.49b)$$

Отметим, что в отсутствие массообмена уравнения (11.49) совпадают с уравнениями (10.6).

Как и в разд. 6.6, принимается, что $Pr_t = 0,9$ и используется понятие турбулентной вязкости, введенное Себиси — Смитом, которое в случае течений сжимаемой жидкости аналогично определяемому уравнениями (6.102) и (6.109), однако теперь параметр длины демпфирования выражается через локальные значения плотности и вязкости, так что

$$A = 26 \frac{\nu}{N} u_\tau^{-1} \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)^{1/2}, \quad u_\tau = \left(\frac{\tau_w}{\rho_w} \right)^{1/2}, \quad P^+ = \frac{\nu_e u_e}{u_\tau^3} \frac{du_e}{dx}, \quad v_w^+ = \frac{v_w}{u_\tau},$$

$$(11.50a)$$

$$N = \left\{ \frac{\mu}{\mu_e} \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^2 \left(\frac{p^+}{v_w^+} \right) \left[1 - \exp \left(11,8 \frac{\mu_w}{\mu} v_w^+ \right) \right] + \exp \left(11,8 \frac{\mu_w}{\mu} v_w^+ \right) \right\}^{1/2}. \quad (11.50b)$$

В случае непроницаемой стенки N можно записать в виде

$$N = \left[1 - 11,8 \left(\frac{\mu_w}{\mu_e} \right) \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^2 p^+ \right]^{1/2}. \quad (11.50c)$$

Пример расчета

В качестве примера плоского сопряженного турбулентного течения с теплообменом (но без массообмена) рассмотрим турбулентное течение Хоурта, о котором уже шла речь в разд. 10.2. Предположим, что на участке $0 \leq x \leq x_0$ градиент давления равен нулю, а за ним следует участок $x \geq x_0$, на котором скорость внешнего течения пропорциональна x ; иначе говоря,

$$u_e = \begin{cases} u_\infty & 0 \leq x \leq x_0, \\ u_\infty \left[1 - \frac{1}{8}(x - x_0) \right] & x \geq x_0. \end{cases} \quad (11.51)$$

Влияние теплообмена на положение точки отрыва при разных значениях числа Маха изучалось путем численного решения уравнений (11.45), (11.46) и (11.49). Уравнения решались с помощью программы на языке Фортран, описанной в разд. 13.4 и 13.5, при $S_w (\equiv H_w/H_e)$ 0,25, 1 и 2. Полученные результаты, как и в случае ламинарных течений, рассмотренных в разд. 10.2, соответствуют охлажденной ($S_w = 0,25$), теплоизолированной ($S_w = 1$) и нагретой ($S_w = 2$) стенкам при трех значениях числа Маха M_∞ , равных 0,05; 1 и 2. Расчеты были выполнены при заданных значениях давления и температуры набегающего потока и разных значениях числа Маха M_∞ ; число Рейнольдса, отнесенное к единице длины, было представлено в виде $u_\infty/\nu_\infty = 23,46 \times 10^6 M_\infty \text{ м}^{-1}$, так как для воздуха

$$\frac{u_\infty}{\nu_\infty} = \frac{20,04 M_\infty \sqrt{T_\infty}}{\nu_\infty},$$

где T_∞ в кельвинах. На передней кромке пластины (при $x = 0$) течение считалось ламинарным, однако точка перехода располагалась очень близко к ней (при $x = 0,001$) и, следовательно, можно было считать, что турбулентное течение начинается непосредственно от передней кромки. Точка, начиная с которой в течении возникал обратный градиент давления, располагалась при $x = x_0 = 1,525 \text{ м}$.

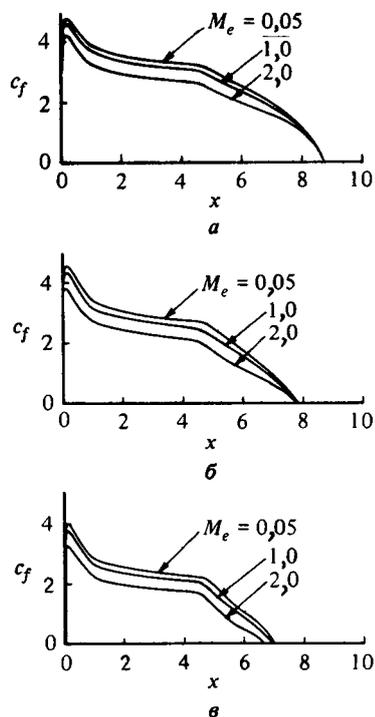


Рис. 11.11. Влияние числа Маха на локальный коэффициент поверхностного трения c_f .

а — $S_w = 0,25$; б — $S_w = 1,0$; в — $S_w = 2,0$.

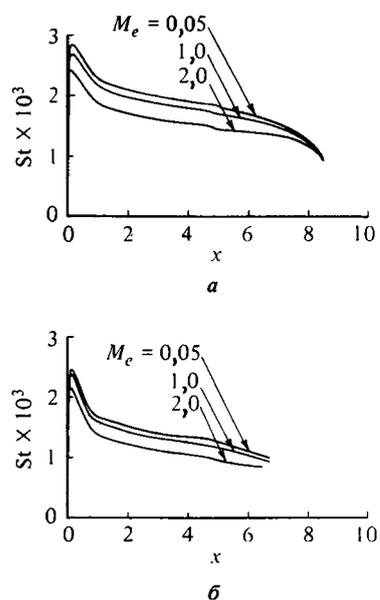


Рис. 11.12. Влияние числа Маха на число Стантона.

а — $S_w = 0,25$; б — $S_w = 2,0$.

На рис. 11.11 показано влияние числа Маха на локальный коэффициент поверхностного трения $c_f (= 2\tau_w/\rho_e u_e^2)$ при трех значениях S_w . При $x < 1,525$ м, т. е. в зоне течения с постоянной скоростью u_e , полученные результаты соответствуют представленным на рис. 11.10 (напомним, что в этой серии расчетов число Рейнольдса пропорционально числу Маха). В случаях теплоизолированной и охлажденной стенок ($S_w = 1$ и $0,25$ соответственно) положение точки отрыва практически не зависит от числа Маха, однако при охлаждении отрыв несколько затягивается, так как при этом плотность жидкости вблизи стенки увеличивается. На нагретой стенке ($S_w = 2,0$) точка отрыва, наоборот, смещается вперед, причем это смещение с ростом числа Маха возрастает. На рис. 11.12 показано

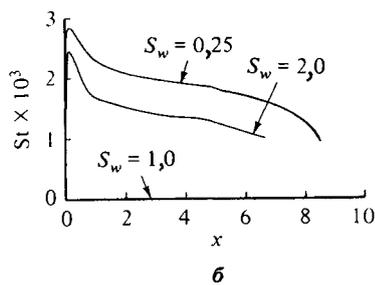
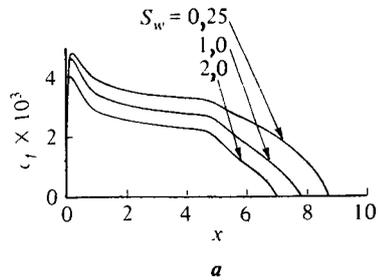


Рис. 11.13. Влияние теплового режима стенки на локальный коэффициент поверхностного трения (а), число Стантона при $M_e = 0,05$ (б).

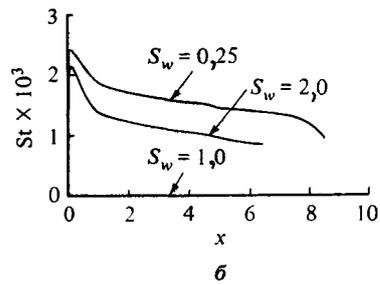
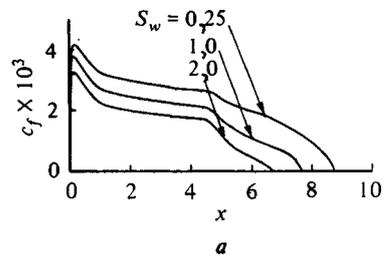


Рис. 11.14. Влияние теплового режима стенки на локальный коэффициент поверхностного трения (а); число Стантона при $M_e = 2,0$ (б).

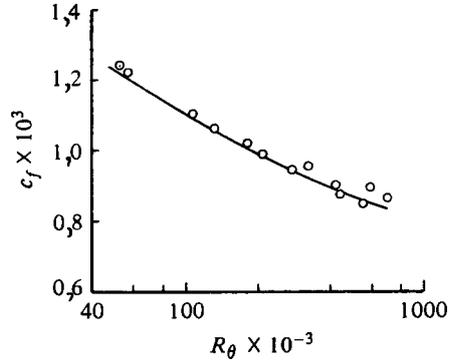
влияние числа Маха на число Стантона

$$St = \frac{\dot{q}_w}{\rho_e u_e (H_w - H_e)} \quad (11.52)$$

при двух значениях S_w и трех значениях числа Маха M_e . Заметим, что при малых числах Маха тепловой поток почти пропорционален напряжению сдвига на стенке всюду, за исключением непосредственной окрестности точки отрыва (там, где на графиках кривые обрываются), в которой c_f обращается в нуль, а число Стантона St не равно нулю. Иначе говоря, аналогия Рейнольдса ($St/0,5 c_f \approx \text{const}$) действительно выполняется. При наибольшем из рассмотренных значений числа Маха расчетный тепловой поток при замедлении течения *увеличивается*. Особенно это заметно в случае холодной стенки, так как при торможении температура жидкости повышается.

На рис. 11.13 и 11.14 показано влияние температуры стенки на величину локального коэффициента поверхностного трения и число

Рис. 11.15. Сравнение расчетных и экспериментальных значений локального коэффициента поверхностного трения для течения на поверхности плоской теплоизолированной пластины. Экспериментальные данные заимствованы из работы [15]. Поверхностное трение измерялось плавающим элементом при $M_e = 2,8$.



Стантона при двух разных значениях Маха (графики перестроены с рис. 11.11 и 11.12).

Пример результатов дополнительных расчетов приведен на рис. 11.15—11.21, на которых сравниваются экспериментальные и расчетные значения переменных при разных граничных условиях, в том числе при нулевом и отрицательном градиентах давления. В первом случае полученные результаты соответствуют теплоизолированной стенке при наличии и отсутствии массообмена, а также непроницаемой стенке при наличии теплообмена; во втором случае они соответствуют непроницаемой и теплоизолированной стенке.

На рис. 11.15 и 11.16 показаны распределения локального коэффициента поверхностного трения и скорости для течений на поверх-

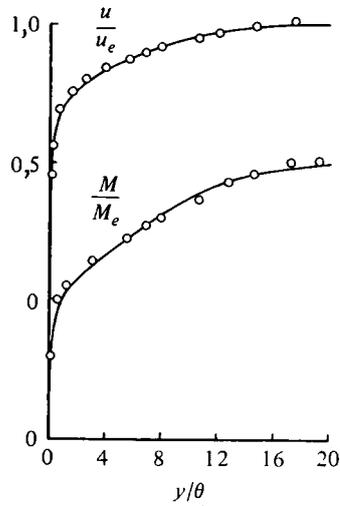


Рис. 11.16. Сравнение расчетных и экспериментальных данных для течения на поверхности плоской теплоизолированной пластины. Экспериментальные данные заимствованы из работы [16]. Измерения поверхностного трения выполнены с помощью плавающего элемента; $c_{f_{\text{exp}}} = 0,00129$; $c_{f_{\text{calc}}} = 0,00131$; $M_e = 2,95$; $R_x = 3,1 \times 10^7$.

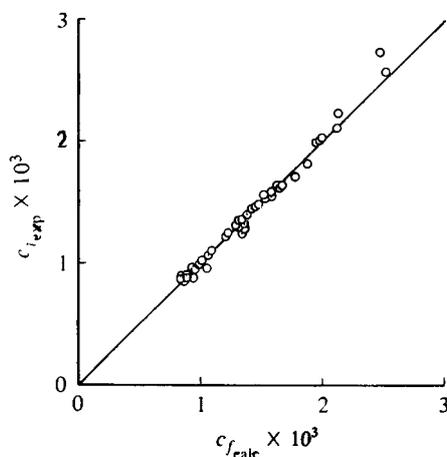


Рис. 11.17. Сравнение расчетных $c_{f,calc}$ и экспериментальных $c_{f,exp}$ значений коэффициента поверхностного трения на плоской теплоизолированной пластине [17].

Среднеквадратичная ошибка для 43 экспериментальных значений, полученных с помощью плавающего элемента, равна 3,5%.

ности теплоизолированных плоских пластин при числах Маха 2,8 и 2,95 соответственно. Видно, что результаты измерений и расчетов хорошо согласуются между собой, и представленные на рис. 11.17 экспериментальные и расчетные значения локального коэффициента трения для турбулентных течений на поверхности плоской теплоизолированной пластины, собранные Себиси и др. [17], подтверждают это в широком диапазоне значений коэффициента c_f . Эти данные соответствуют диапазонам числа Маха 0,4—5 и числа Рейнольдса, рассчитанного по толщине потери импульса, $1,6 \times 10^3 - 702 \times 10^3$. Среднеквадратичное отклонение результатов измерений от прямой составляет 3,5%, т. е. не выходит за пределы точности измерений.

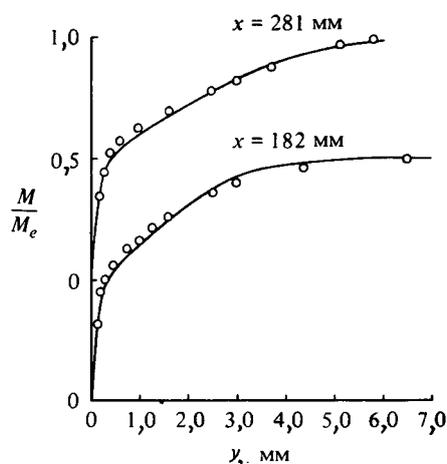


Рис. 11.18. Сравнение расчетных и экспериментальных данных для течения на поверхности плоской пластины при наличии теплообмена; $T_w/T_e = 1,95$, $M_e = 2,57$. Экспериментальные данные заимствованы из работы [18].

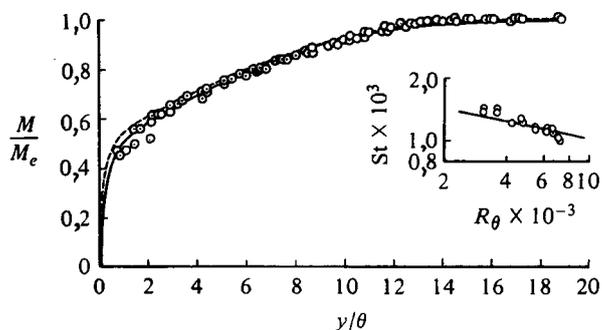


Рис. 11.19. Сравнение расчетных и экспериментальных данных для течения на поверхности плоской пластины при наличии теплообмена; $T_w/T_e = 2,16$, $M_e = 2,27$. Экспериментальные данные заимствованы из работы [19].

— расчетная кривая при $R_\theta = 3500$; --- расчетная кривая при $R_\theta = 9500$.

Сравнение расчетных и экспериментальных данных при наличии теплообмена, приведенных на рис. 11.18 и 11.19, также показывает, что описанный выше метод расчета позволяет получить удовлетворительные результаты для сверхзвуковых течений с большими числами Маха по крайней мере при нулевом градиенте давления. Приведенные на рис. 11.18 и 11.19 данные были получены соответственно при $T_w/T_e = 1,95$, $M_e = 2,57$ и $T_w/T_e = 2,16$ и $M_e = 2,27$. В обоих случаях течение на передней кромке пластины считалось ламинарным, а переход к турбулентному течению происходил в первом же узле расчетной сетки ниже по потоку. В случае течения Паппаса полученные данные охватывали диапазон числа Рейнольдса, рассчитанного по толщине потери импульса, 3500—9500, причем форма профиля на соответствующей части длины пластины менялась незначительно. Профили скорости, полученные в работе [20] для проницаемой теплоизолированной стенки и показанные на рис. 11.20, подобны профилям для непроницаемой нагретой стенки, и, как и в других случаях, расчет хорошо согласуется с экспериментом.

На рис. 11.21 представлены профили скорости и температуры, полученные в работе [21] путем измерений в ускоряющемся потоке при постоянной плотности теплового потока. Число Маха набегающего потока изменялось от 1,69 на расстоянии 0,287 м от передней кромки пластинки до 2,97 на расстоянии 0,906 м от нее. В начале расчета плотность теплового потока полагалась постоянной, а градиент давления — нулевым; на расстоянии 0,287 м задавалось зна-

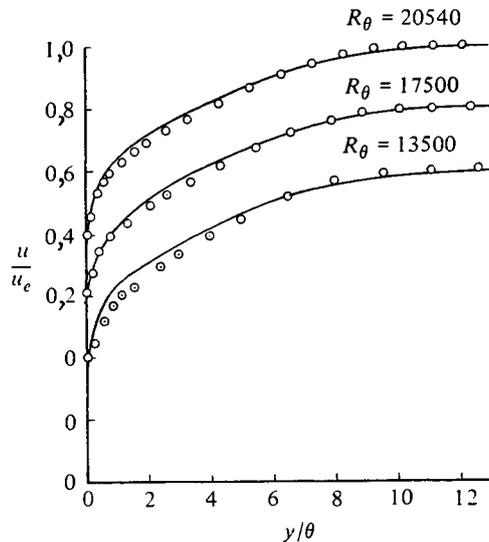


Рис. 11.20. Сравнение расчетных и экспериментальных данных для течения на поверхности плоской теплоизолированной пластины при наличии массообмена; $(\rho v)_w / \rho_e u_e = 0,0013$, $M_e = 1,8$. Экспериментальные данные заимствованы из работы [20].

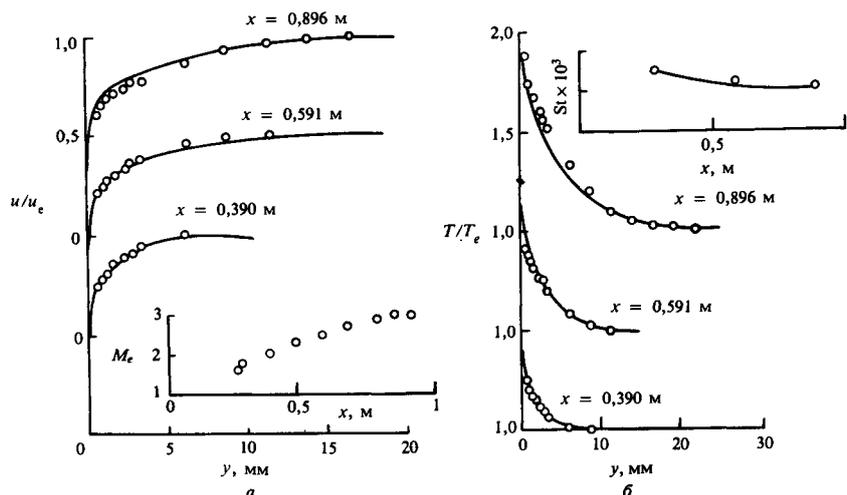


Рис. 11.21. Сравнение расчетных и экспериментальных данных для ускоряющегося течения при постоянной плотности теплового потока. Экспериментальные данные заимствованы из работы [21].

a — профили скорости; *b* — профили температуры и распределение числа Стантона.

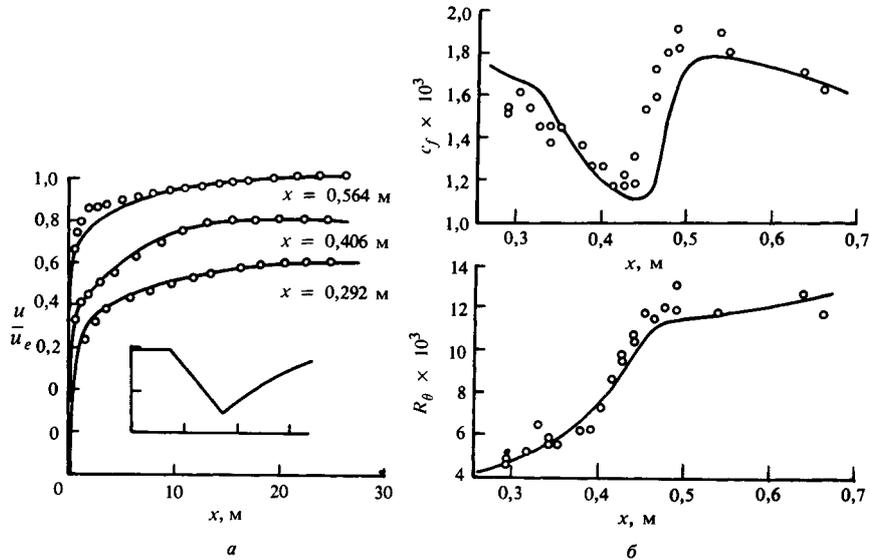


Рис. 11.22. Сравнение расчетных и экспериментальных данных для турбулентного пограничного слоя сжимаемой жидкости на теплоизолированной стенке при положительном и отрицательном градиентах давления. Экспериментальные данные заимствованы из работы [22].

a — профили скорости; *b* — распределения c_f и R_θ . Значения c_f были измерены с помощью трубки Стантона при $M_\infty = 4$; — расчет; \circ эксперимент.

чение толщины потери импульса, полученное в эксперименте. Остальная часть течения рассчитывалась при постоянной плотности теплового потока и распределении числа Маха, полученном в эксперименте.

На рис. 11.22 сравниваются экспериментальные и расчетные данные для турбулентного пограничного слоя сжимаемой жидкости на теплоизолированной стенке при отрицательном и положительном градиентах давления. Измерения были выполнены Льюисом и др. [22]. Экспериментальные значения поверхностного трения были получены с помощью трубки Стантона. Расчет начинался с задания на расстоянии $x = 0,282$ м вниз по течению от передней кромки (при $R_\theta = 4870$) профиля скорости при нулевом градиенте давления. Остальная часть течения рассчитывалась с помощью распределения числа Маха, полученного в экспериментах (рис. 11.22, *a*). Как и прежде, экспериментальные данные достаточно хорошо согласуются с результатами расчета.

11.5. Взаимодействие скачков уплотнения с пограничным слоем

Теперь рассмотрим один из наиболее важных и сложных вопросов теории пограничного слоя — взаимодействие турбулентного пограничного слоя со скачком уплотнения, падающим на пластину извне или возникающим при течении сжатия на поверхности с изломом. Обычно структура пограничного слоя не оказывает заметного влияния на внешнее течение (за исключением случаев образования развитых зон отрыва). Однако при появлении скачков уплотнения ситуация резко меняется. Подъемная сила крыла при трансзвуковых скоростях полета может уменьшиться вдвое, а скачок под действием сил вязкости может сместиться на 20% длины хорды даже при больших значениях числа Рейнольдса и отсутствии отрыва пограничного слоя. Структура пограничного слоя в таких течениях находится в стадии развития и еще не оформилась окончательно. Здесь мы не пытаемся дать обзор огромного количества исследований, выполненных в этой области, и лишь сошлемся на работы [23—25], в которых освещается современное состояние проблемы. Поэтому ограничимся лишь некоторыми комментариями, которые помогут читателю составить представление о достижениях в указанной области.

Взаимодействие скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем имеет общие особенности с его взаимодействием с ламинарным пограничным слоем, главная из которых — образование перед точкой падения скачка зоны постоянного давления; имеются, однако, и существенные различия. Например, малая протяженность зоны взаимодействия вверх по потоку, составляющая, даже при большом перепаде давления на скачке, лишь несколько толщин пограничного слоя, т. е. гораздо меньше, чем в случае ламинарного пограничного слоя. Кроме того, отрыв в турбулентном пограничном слое происходит при большем повышении давления, чем в ламинарном пограничном слое, так как при турбулентном течении скорость течения и скоростной напор вблизи стенки больше, чем при ламинарном. Чтобы турбулентный пограничный слой, проходящий через прямой скачок уплотнения, оторвался от стенки, число Маха перед скачком должно превышать 1,3 (это соответствует повышению давления на 68% скоростного напора в набегающем потоке, т. е. примерно такому же, какое необходимо для отрыва низкоскоростного пограничного слоя при большом положительном градиенте давления). В случае косоугольного скачка уплотнения отрыв пограничного слоя происходит примерно при том же повышении давления, что и в случае прямого скачка.



Простейшей конфигурацией, позволяющей экспериментально изучать взаимодействие турбулентного пограничного слоя со скачком уплотнения, является излом на поверхности тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком газа. Изучением таких течений занимались многие исследователи на протяжении последних 30 лет. На рис. 11.23 измеренное распределение давления на пластине, наклоненной к обтекаемой поверхности под углом 25° при $M_\infty = 2,96$, сравнивается с результатами расчета для невязкого газа [26]. На рис. 11.24 представлены фотографии обтекания рассматриваемой конфигурации гиперзвуковым потоком газа. Было выполнено большое число экспериментов по определению угла α_i , при котором начинается отрыв; обзор полученных результатов дан в работе [27] и представлен в обобщенном виде на рис. 11.25. Согласно теории невязких течений, угол наклона пластины к обтекаемой поверхности, при котором образуется отошедший скачок уплотнения, увеличивается с ростом числа Маха; поэтому естественно, что критический угол наклона α_i , при котором начинается отрыв, с ростом числа Маха также увеличивается от $\sim 15^\circ$ при $M_\infty = 2$ до $\sim 30^\circ$ при $M_\infty = 8$. Бóльший интерес представляет зависимость угла α_i от числа Рейнольдса R . При малых значениях R угол α_i с ростом R убывает, по видимому, из-за изменения профиля скоростей внешнего течения (закон следа, обсуждавшийся выше в разд. 11.2). Однако при бóльших значениях R преобладает обратная тенденция, так как профиль скоростей становится полнее и соответственно уменьшаются формпараметр H и коэффициент поверхностного трения c_f . Последние результаты, полученные в этой области, приведены в работе [28].

Одна из первых попыток детального исследования взаимодействия скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем была

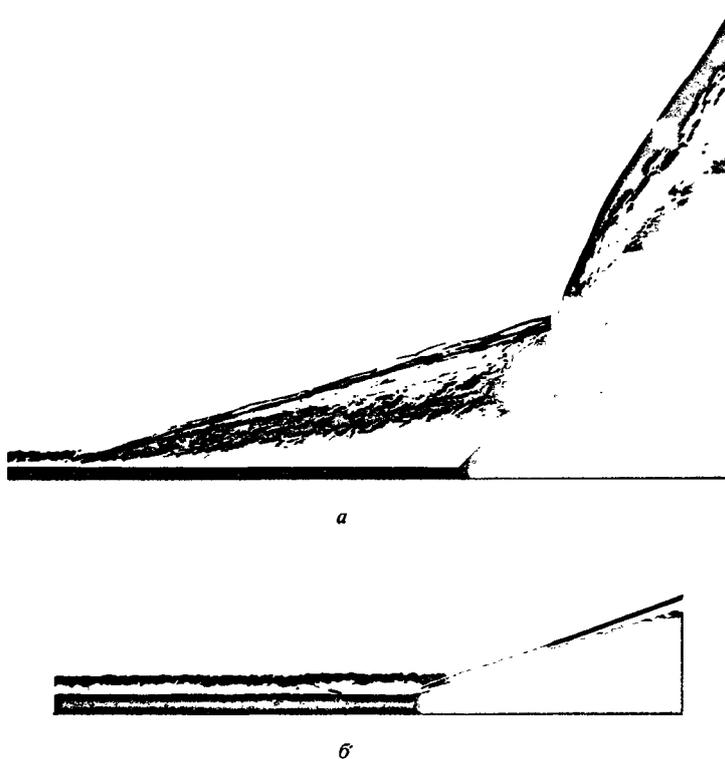


Рис. 11.24. Турбулентное гиперзвуковое течение сжатия на поверхности с изломом. (С разрешения д-ра Г.М. Элфстрома, работавшего ранее в Имперском колледже.)
a — течение с отрывом; *b* — присоединенное течение.

предпринята Лайтхиллом [29], который использовал аргументы, аналогичные лежащим в основе трехслойной теории свободных ламинарных взаимодействий (разд. 10.3). Главное отличие заключается в использовании в качестве исходного профиля скорости не ламинарного, а типичного турбулентного профиля, однако Лайтхилл сразу же заметил, что получаемые при этом законы подобия (сравните с уравнением (10.58)) являются противоречивыми, так как зона взаимодействия тоньше пограничного слоя. В последних наиболее подробных исследованиях взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем пренебрегают существованием подслоя (сравните с уравнениями (10.55)—(10.57)) и представляют профиль ско-

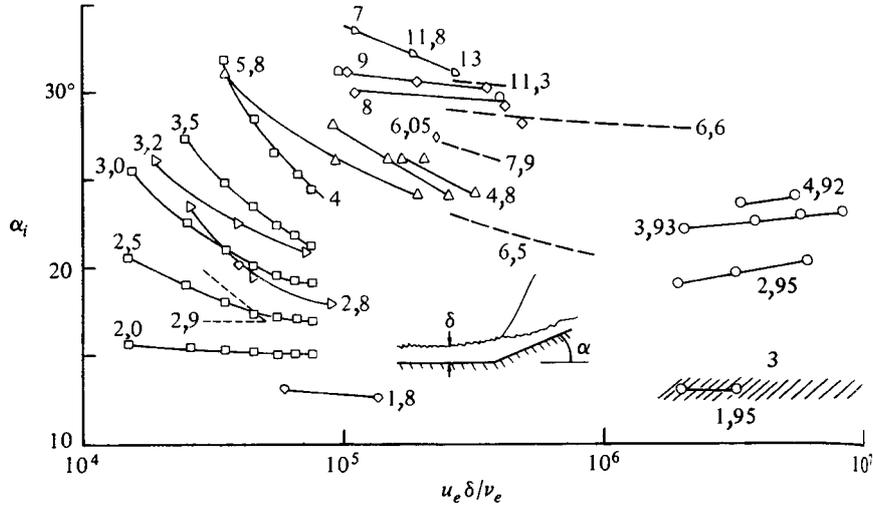


Рис. 11.25. Угол излома поверхности, при котором начинается отрыв турбулентного пограничного слоя [27].

Цифрами у кривых обозначено число Маха.

ростей вверх по потоку от зоны взаимодействия в виде

$$u_0(y) = u_e \left[1 + \varepsilon u_0 \left(\frac{y}{\delta} \right) \right], \quad (11.53)$$

где u_e — скорость внешнего течения, ε — малый параметр порядка $(\lg R)^{-1}$, а δ — толщина пограничного слоя. Это уравнение не удовлетворяет условию прилипания на стенке, однако достаточно хорошо описывает внешнюю часть профиля скорости, аналогичную профилю скорости в следе. Поэтому взаимодействие пограничного слоя со скачком уплотнения при аппроксимации исходного профиля скорости выражением $u_0(y)$ исследуется главным образом с позиций теории невязких течений. На рис. 11.26 схематически показана структура зоны взаимодействия. Отметим два следующих обстоятельства. Во-первых, напрашивается вывод, что при численном исследовании слабых взаимодействий не так уж важна конкретная форма закона стенки или вид формулы для турбулентной вязкости. Этот вывод подтверждается результатами ряда численных исследований таких взаимодействий, и, по-видимому, по общему мнению, алгебраические модели турбулентной вязкости и длины смешения, аналогичные рассматриваемым в этой книге, при безотрывном течении дают хорошие результаты. Во-вторых, схема взаимодейст-

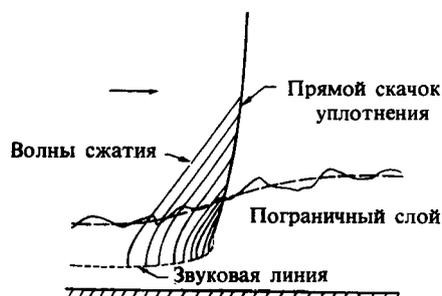


Рис. 11.26. Структура зоны взаимодействия падающего прямого скачка уплотнения с присоединенным турбулентным пограничным слоем.

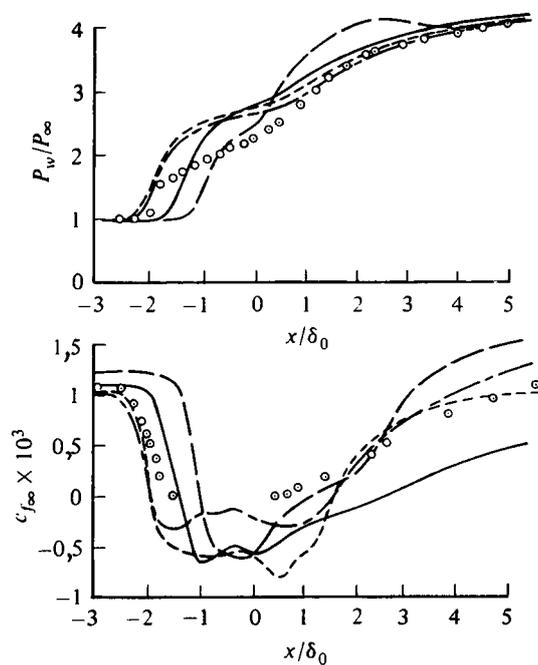


Рис. 11.27. Сравнение расчетных и измеренных значений параметров для сверхзвукового течения сжатия на поверхности с изломом при взаимодействии скачка уплотнения с пограничным слоем. Угол излома поверхности 24° , число Рейнольдса, рассчитанное по толщине пограничного слоя, $1,33 \times 10^6$, $M_\infty = 2,8$ [30].

○ экспериментальные данные; — расчет с помощью алгебраической модели турбулентной вязкости; — расчет по модели турбулентности, описываемой одним уравнением; --- расчет по модели турбулентности, описываемой двумя уравнениями (модель A); -.-.- расчет по модели турбулентности, описываемой двумя уравнениями (модель B).

вия, представленная на рис. 11.26, не позволяет исследовать течения с отрывом, так как основное допущение состоит в том, что наиболее значительные процессы происходят во внешней части пограничного слоя.

В ряде работ (особенно интересна в этом отношении работа [30]) предпринимались попытки найти рациональный способ учета вязкого подслоя. Они основывались на идеях Лайтхилла и, следовательно, обладали всеми присущими им недостатками. Например, применение уравнений ламинарного течения для описания вязкого подслоя означает, что рейнольдсовы напряжения считаются несущественными. На самом деле они играют важную роль в пристенном слое, где действует закон стенки, и для объяснения поведения напряжений сдвига на стенке τ_w приходится пользоваться уравнением

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{\rho u'v'} .$$

Поэтому даже в зоне взаимодействия наличие градиента давления и инерционных членов обуславливает появление в τ_w поправок более высоких порядков. По той же причине в настоящее время наши представления о механизмах, определяющих характер течения в протяженных зонах отрыва, все еще не полны, и эта неопределенность находит отражение в процедуре численного решения задачи о расчете отрывных течений с взаимодействием, представляющих практический интерес. Использование простых алгебраических моделей турбулентной вязкости, подобных рассмотренным в данной главе и в гл. 6, позволяет получить общую картину течения даже в случае образования зон отрыва, однако не позволяет рассчитать такое течение во всех деталях. Предлагались и более сложные модели, которые, казалось бы, должны обеспечить получение более точных результатов. Адамсон и Месситер, авторы обзора [23], пишут: «... до сих пор эти надежды не оправдались в том смысле, что мы не можем выбрать усложненную модель с соответствующим набором констант, которая давала бы более точные по сравнению с простой моделью результаты решения той или иной задачи взаимодействия». На рис. 11.27 представлены типичные графики для давления и коэффициента поверхностного трения, на которых результаты расчета по моделям разной степени сложности сравниваются с данными экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rotta J.C., Turbulent boundary layers with heat transfer in compressible flow, *AGARD Rept*, **281** (1960).
2. Van Driest E.R., Turbulent boundary layer in compressible fluids, *J. Aeronaut. Sci.*, **18**, 145 (1951).
3. Fernholz H.H., Finley P.J., A critical compilation of compressible turbulent boundary-layer data, *AGARDographs* 223, 253, 263, 1977.
4. Bradshaw P., An improved Van Driest skin-friction formula for compressible turbulent boundary layers, *AIAA J.*, **15**, 212 (1977). [Имеется перевод: Брэдшоу. Уточнение формулы Ван Дриеста для коэффициента поверхностного трения в сжимаемом турбулентном пограничном слое. — Ракетная техника и космонавтика, 1977, № 2, с. 101.]
5. Fernholz H.H., Ein halbempirisches Gesetz für die Wandreibung in kompressiblen turbulenten Grenzschichten bei isothermer und adiabater Wand, *Z. Angew. Math. u. Mech.*, **51**, T146 (1971).
6. Mabey D.G., Some observations on the wake component of the velocity profiles of turbulent boundary layers at subsonic and supersonic speeds, *Aero. Quart.*, **30**, 590 (1979).
7. Coles D., The turbulent boundary layer in a compressible fluid, *Phys. Fluids*, **7**, 1403 (1964).
8. Hopkins E.J., Inouye M., An evaluation of theories for predicting turbulent skin friction and heat transfer on flat plates at supersonic and hypersonic Mach numbers, *AIAA J.*, **9**, 993 (1971). [Имеется перевод: Хопкинс, Инуе. Оценка методов расчета турбулентного поверхностного трения и теплопередачи на плоской пластине при сверхзвуковых и гиперзвуковых числах Маха. — Ракетная техника и космонавтика, 1971, № 6, с. 3.]
9. Spalding D.B., Chi S.W., The drag of a compressible turbulent boundary layer on a smooth flat plate with and without heat transfer, *J. Fluid Mech.*, **18**, 117 (1964).
10. Hopkins E.J., Keener E.R., Pressure gradient effects on hypersonic turbulent skin-friction and boundary-layer profiles, *AIAA J.*, **10**, 1141 (1972). [Имеется перевод: Гопкинс, Кинер. Влияние градиента давления на поверхностное трение и профили скоростей и температур в гиперзвуковом турбулентном пограничном слое. — Ракетная техника и космонавтика, 1972, № 9, с. 8.]
11. Cary A.M., Bertram M.H., Engineering prediction of turbulent skin friction and heat transfer in high-speed flow, *NASA TN D-7507*, 1974.
12. Cary A.M., Summary of available information on Reynolds analogy for zero-pressure gradient, compressible turbulent-boundary-layer flow, *NASA TN D-5560*, 1970.
13. Goddard F.E., Jr., Effect of uniformly distributed roughness on turbulent skin-friction drag at supersonic speeds, *J. Aero/Space Sci.*, **26**, 1—15 (1959).
14. Fenter F.W., The effect of heat transfer on the turbulent skin-friction of uniformly rough surfaces in compressible flow, The University of Texas, Defense Research Lab. Rept DLR-368, CM-839, April 1956.
15. Moore D.R., Harkness J., Experimental investigation of the compressible turbulent boundary layer at very high Reynolds numbers, $M = 2.8$, Rept No. 0.71000/4R-9, LTV Res. Center, 1964.
16. Matting F.W., Chapman D.R., Nyholm J.R., Thomas A.G., Turbulent skin friction at high Mach numbers and Reynolds numbers in air and helium, *NASA TR R-82*, 1961.
17. Cebeci T., Smith A.M.O., Mosinskis G.J., Calculation of compressible adiabatic turbulent boundary layers, *AIAA J.*, **8**, 1973 (1970). [Имеется перевод: Чебеки, Смит,

- Мосинскис. Расчет сжимаемого адиабатического турбулентного пограничного слоя. — Ракетная техника и космонавтика, 1970, № 11, с. 66.]
18. Michel R., Etude de la transition sur les profils d'aile; établissement d'un critère de détermination de point de transition et calcul de la traînée de profile incompressible, ONERA Rept 1/578A, 1951.
 19. Pappas C. S., Measurement of heat transfer in the turbulent boundary layer on a flat plate in supersonic flow and comparison with skin-friction results, NACA Tech. Note No. 3222, 1954.
 20. Squire L. C., Further experimental investigations of compressible turbulent boundary layers with air injection, ARC R&M 3627, 1970.
 21. Pasiuk L., Hastings S. M., Chatham R., Experimental Reynolds analogy factor for a compressible turbulent boundary layer with a pressure gradient, Naval Ordnance Rept NOLTR 64-200, White Oak, Maryland, 1965.
 22. Lewis J. E., Gran R. L., Kubota T., An experiment in the adiabatic compressible turbulent boundary layer in adverse and favorable pressure gradients, *J. Fluid Mech.*, **51**, 657 (1972).
 23. Adamson T. C., Messiter A. F., Analysis of two-dimensional interactions between shock waves and boundary layers, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **12**, 103—138, Annual Reviews, Palo Alto, 1980.
 24. Computation of Viscous-Inviscid Interactions, AGARD Conf. Proceedings No. 291, 1981.
 25. Melnik R. E., Turbulent interactions on airfoils at transonic speeds — Recent developments, AGARD CP 291, Paper 10, 1981.
 26. Law C. H., Supersonic turbulent boundary-layer separation, *AIAA J.*, **12**, 1974. [Имеется перевод: Лоу. Отрыв сверхзвукового турбулентного пограничного слоя. — Ракетная техника и космонавтика, 1974, № 6, с. 73.]
 27. Roshko A., Thomke G. J., Supersonic turbulent boundary-layer interaction with a compression corner at very high Reynolds number, Proc. Symposium on Viscous Interaction Phenomena in Supersonic Hypersonic Flow, USAF Aerospace Research Labs., Wright-Patterson AFB, Ohio, Univ. of Dayton Press, May 1969.
 28. Hayakawa K., Squire L. C., The effect of the unstream boundary-layer state on the shock interaction at a compression corner, *J. Fluid Mech.*, **122**, 369 (1982).
 29. Lighthill M. J., On boundary layers and upstream influence, II. Supersonic flow without separation, *Proc. Royal Soc.*, **A217**, 1953.
 30. Inger G. R., Nonasymptotic theory of unseparated turbulent boundary-layer-shock-wave interaction with application to transonic flows, in Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows, T. Cebeci (ed.), Springer-Verlag, N. Y., 1982, p. 159.
 31. Viegas J. R., Horstmann C. C., Comparison of multiequation turbulence models for several shock boundary-layer interaction flows, *AIAA J.*, **17**, 811—820, 1979. [Имеется перевод: Вигас, Хорстман. Сравнительный анализ применимости различных моделей турбулентности для расчета течений с взаимодействием пограничного слоя с ударной волной. — Ракетная техника и космонавтика, 1979, № 8, с. 17.]

Как и в гл. 5 и 6, перенос количества движения и тепла в сопряженных ламинарных и турбулентных течениях в плоских и осесимметричных каналах можно изучать, рассматривая течения с полностью развитыми профилями скорости и температуры или течения, в которых эти профили еще находятся в процессе развития. При этом надо иметь в виду, что при подводе тепла, сопровождающемся уменьшением плотности, развитие сопряженных течений в каналах может продолжаться неограниченно долго. Поэтому здесь будет рассмотрен только случай развивающихся течений, так как он является более общим и позволяет использовать подход к расчету переноса количества движения и тепла, описанный в разд. 5.3 и 7.3. Чтобы учесть сжимаемость, придется несколько модифицировать применяемые преобразования и процедуру решения.

Ламинарные и турбулентные плоские течения описываются основными уравнениями (11.37)—(11.39), а с учетом понятия турбулентной вязкости и турбулентного числа Прандтля — уравнениями (11.41) и (11.43), которые легко обобщаются на случай осесимметричных течений. Добавив к указанным уравнениям уравнение неразрывности (3.48), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}(r^K \rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(r^K \bar{\rho} v) = 0, \quad (12.1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{\rho} v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{r^K} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^K (\mu + \rho \epsilon_m) \frac{\partial u}{\partial y} \right], \quad (12.2)$$

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \bar{\rho} v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{r^K} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ r^K \left(\frac{\mu}{Pr} + \rho \frac{\epsilon_m}{Pr_t} \right) \frac{\partial H}{\partial y} + \right. \\ \left. + r^K \left[\mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) + \rho \epsilon_m \left(1 - \frac{1}{Pr_t} \right) \right] u \frac{\partial u}{\partial y} \right\}. \quad (12.3) \end{aligned}$$

Как и в случае несопряженных течений, начнем с решения основных уравнений, записанных в преобразованных переменных. Затем, когда толщина сдвигового слоя станет сравнимой с шириной канала, перейдем к исходным переменным.

Чтобы учесть сжимаемость, представим автомодельную переменную η и безразмерную функцию тока $f(x, \eta)$, определяемые уравнениями (5.45), в несколько измененном виде

$$d\eta = \left(\frac{u_0}{\nu_0 x} \right)^{1/2} \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{r}{L} \right)^K dy, \quad \psi(x, y) = L^K (u_0 \nu_0 x)^{1/2} \rho_0 f(x, \eta). \quad (12.4)$$

Здесь и в дальнейшем через u_0 , ν_0 , ρ_0 и H_0 обозначены соответственно эталонные значения скорости, кинематической вязкости, плотности и полной энтальпии. Как и в случае несопряженных течений, в качестве эталонных выбирают значения переменных на входе в канал. Через L по-прежнему обозначена характерная длина, равная в случае плоских течений половине ширины канала, а в случае осесимметричных течений — его радиусу.

Используя модифицированные соотношения (12.4), можно повторить процедуру вывода преобразованных уравнений движения и энергии, а также соответствующих граничных условий для сопряженных течений в пограничных слоях, описанную в разд. 11.4. Однако на этот раз функцию тока представим в виде

$$\rho u r^K = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \overline{\rho v r^K} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (12.5)$$

в котором она тождественно удовлетворяет уравнению (12.1), а полную безразмерную энтальпию H обозначим через $S = H/H_0$. Тогда уравнения плоских и осесимметричных течений можно записать в виде

$$(bf'')' + \frac{1}{2}ff'' = cx \frac{dp^*}{dx} + x \left(f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (12.6)$$

$$(eS' + df'f'')' + \frac{1}{2}fS' = x \left(f' \frac{\partial S}{\partial x} - S' \frac{\partial f}{\partial x} \right). \quad (12.7)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по η , а безразмерные параметры b , c , p^* , e и d определяются выражениями

$$b = C(1-t)^{2K}(1+\epsilon_m^+), \quad c = \frac{\rho_0}{\rho}, \quad p^* = \frac{p}{\rho_0 u_0^2},$$

$$e = \frac{C}{\text{Pr}}(1-t)^{2K} \left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \epsilon_m^+ \right), \quad d = \frac{C u_0^2}{H_0} \left[1 - \frac{1}{\text{Pr}} + \epsilon_m^+ \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}_t} \right) \right] (1-t)^{2K}, \quad (12.8)$$

в которых

$$C = \frac{\rho \mu}{\rho_0 \mu_0}, \quad t = 1 - \left[1 - 2 \left(\frac{\xi}{R_L} \right) \int_0^\eta c d\eta \right]^{1/2}, \quad R_L = \frac{u_0 L}{\nu}. \quad (12.9)$$

До момента слияния сдвиговых слоев, образующихся на противоположных стенках канала, граничные условия уравнений (12.1)—(12.3) совпадают с условиями (11.48). Используя уравнение Бернулли, в случае отсутствия массопереноса их можно представить в виде

$$\eta = 0, \quad f = f' = 0, \\ S = S_w(x) \text{ или } S'_w(x) = -\frac{L}{k_0} \frac{c_{pw} \dot{q}_w}{H_0} \left(\frac{k_0}{k_w} \right) \frac{c_w}{\sqrt{R_L}} \sqrt{\frac{x}{L}}. \quad (12.10a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad \frac{d}{dx} \frac{(f')^2}{2} = -c \frac{dp^*}{dx}, \quad S = 1. \quad (12.10b)$$

Чтобы получить дополнительное граничное условие, обусловленное наличием градиента давления, воспользуемся законом сохранения массы. Для течения между двумя параллельными пластинами можно записать

$$\rho_0 u_0 L = \int_0^L \rho u dy, \quad (12.11)$$

или в преобразованных переменных —

$$f(x, \eta_{sp}) = \sqrt{R_L \left(\frac{L}{x} \right)}, \quad (12.12)$$

где η_{sp} — значение η на оси потока при $y = L$, определяемое выражением

$$\eta_{sp} = \sqrt{R_L \left(\frac{L}{x} \right)} \int_0^1 \frac{d\zeta}{c}, \quad (12.13)$$

в котором $\zeta = y/L$. Так как при заданном значении x безразмерное отношение плотностей неизвестно и находится из решения уравнений движения и энергии, то безразмерное расстояние в противоположном случае несопряженных течений также неизвестно и его следует находить путем итераций; однако это не вызывает серьезных вычислительных трудностей.

Для течения в круглой трубе аналогичным образом получаем

$$f(x, \eta_{sp}) = \frac{1}{2} \sqrt{R_L \left(\frac{L}{x} \right)}, \quad (12.14)$$

где L — радиус трубы, а

$$\eta_{sp} = \sqrt{R_L \left(\frac{L}{x} \right)} \int_0^1 \frac{1-\zeta}{c} d\zeta. \quad (12.15)$$

Исходные переменные

Пользуясь исходными переменными, определим безразмерное расстояние Y и безразмерную функцию тока $F(x, Y)$ выражениями

$$dY = \left(\frac{u_0}{\nu_0 L} \right)^{1/2} \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{r}{L} \right)^K dy, \quad \psi = L^K (u_0 \nu_0 L)^{1/2} \rho_0 F(x, Y). \quad (12.16)$$

В этих переменных уравнения движения и энергии приобретают вид

$$(bF'')' = c \frac{dp^*}{dx} + F' \frac{\partial F'}{\partial \xi} - F'' \frac{\partial F}{\partial \xi}, \quad (12.17)$$

$$(eS' + dF'F'')' = F' \frac{\partial S}{\partial \xi} - S' \frac{\partial F}{\partial \xi}. \quad (12.18)$$

где $\xi = x/L$, а штрихом обозначено дифференцирование по Y . И здесь и в дальнейшем b, c, p^*, e и d определяются выражениями (12.8) и (12.9), а

$$t = 1 - \left(1 - \frac{2}{\sqrt{R_L}} \int_0^Y c dY \right)^{1/2} \quad (12.19)$$

Граничные условия на стенке при заданной энтальпии на стенке или плотности теплового потока имеют вид

$$Y = 0, \quad F = F' = 0, \\ S = S_w(\xi) \text{ или } S'_w(\xi) = - \left(\frac{L}{k_0} \frac{c_{p_w} \dot{q}_w}{H_0} \right) \left(\frac{k_0}{k_w} \right) \frac{c_w}{\sqrt{R_L}}. \quad (12.20a)$$

На оси плоского канала они определяются выражениями

$$Y = Y_c, \quad F'' = 0, \quad S' = 0, \quad (12.20b)$$

а на оси круглой трубы при $L = r_0$ — выражениями

$$Y = Y_c, \quad F'' = - \frac{1}{2} \sqrt{R_L} \frac{1}{Cc} \left[c \frac{dp^*}{d\xi} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} (F')^2 \right], \\ S' = - \frac{1}{2} \sqrt{R_L} \frac{\text{Pr}}{Cc} \left[\frac{u_0^2}{H_0} (1 - \text{Pr}) F'F'' + F' \frac{\partial S}{\partial \xi} \right]. \quad (12.20c)$$

Из условия сохранения массы находим для течения между двумя параллельными пластинами

$$F(\xi, Y_c) = \sqrt{R_L}, \quad (12.21)$$

где расстояние вдоль оси течения Y_c в преобразованном виде равно

$$Y_c = \sqrt{R_L} \int_0^1 \frac{d\xi}{c}. \quad (12.22)$$

Аналогичным образом для течения в трубе круглого сечения

$$F(\xi, Y_c) = \frac{1}{2} \sqrt{R_L}, \quad (12.23)$$

где

$$Y_c = \sqrt{R_L} \int_0^1 \frac{1-\xi}{c} d\xi. \quad (12.24)$$

12.1. Ламинарное течение в трубе с постоянной плотностью теплового потока

В качестве первого примера применения описанного выше алгоритма рассмотрим ламинарное течение гелия в равномерно нагреваемой трубе круглого сечения. Термодинамические свойства и свойства переноса зададим соотношениями

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{k}{k_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{0,68}, \quad \frac{c_p}{c_{p0}} = 1, \quad \text{Pr} = \frac{2}{3}, \quad \gamma = \frac{5}{3},$$

$$c_{p0} = 5,231 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)} \quad R = 645,8 \text{ Н} \cdot \text{м/(кг} \cdot \text{К)}. \quad (12.25)$$

Предполагая, что давление по толщине сдвигового слоя постоянно, и обозначая через T абсолютную статическую температуру, получим следующее выражение для отношения плотностей:

$$c \equiv \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{T}{T_0} \frac{p_0^*}{p^*}. \quad (12.26)$$

Физические свойства гелия в сдвиговом слое будем определять по распределению статической температуры в поперечном сечении трубы. Для этого воспользуемся выражением для полной энтальпии

$$T = \frac{H - u^2/2}{c_p}, \quad (12.27)$$

которое с учетом определений S и f' перепишем в виде

$$\frac{T}{T_0} = \frac{S - (u_0^2/2H_0)(f')^2}{1 - u_0^2/2H_0}. \quad (12.28)$$

Полную энтальпию во входном сечении трубы H_0 найдем по формуле

$$H_0 = c_{p0} T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \right). \quad (12.29)$$

Расчеты были выполнены при числе Маха во входном сечении трубы $M_0 = 0,06$, числе Рейнольдса $R_d = 2500$ и четырех значениях параметра плотности теплового потока $Q^+ = (\dot{q}_w / T_0)(r_0 / k_0)$ 0,135; 1,35; 13,5 и 27,0. На рис. 12.1 показано развитие профилей скорости в нескольких сечениях трубы при разных значениях

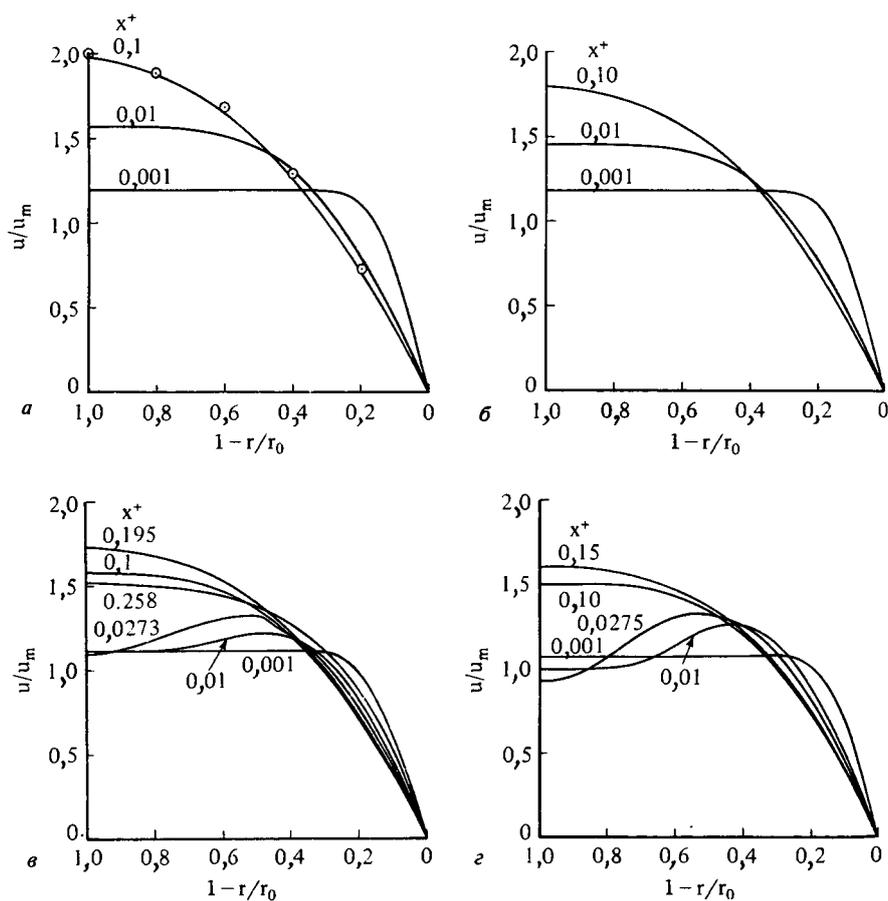


Рис. 12.1. Влияние плотности теплового потока на стенке на развитие профилей скорости.

$a - Q^+ = 0,135$; \odot профиль скорости в полностью развитом течении Пуазейля; $б - Q^+ = 1,35$; $в - Q^+ = 13,5$; $г - Q^+ = 27,0$.

$x^+ = x/dR_m^{-1}$ и четырех указанных значениях Q^+ . Здесь $R_m = u_m d / \nu_m$ — число Рейнольдса, рассчитанное по скорости течения и вязкости при среднemasсовой температуре T_m . На рис. 12.1, *a* показаны расчетные профили скорости при $Q^+ = 0,135$, а также профиль скорости для полностью развитого течения несжимаемой жидкости в трубе, т. е. для течения Пуазейля. Как и следовало ожидать, при $x^+ \approx 0,1$ расчетный профиль практически совпадает с профилем скорости в течении Пуазейля (уравнение (5.20)). В случае течений сжимаемой жидкости с ускорением этот параболический профиль искажается (рис. 12.1, *б—г*). Во входной части трубы его искажение обусловлено резким ускорением жидкости вблизи стенки, в результате которого подвод тепла к ней увеличивается, а на профилях скорости образуются «забросы», так как вблизи стенки скорость жидкости становится больше, чем на оси трубы. Как отмечалось в работе [1], сравнение профилей скорости, представленных на рис. 12.1, показывает, что «заброс» скорости, вызванный ускорением течения, чуть заметный при малом $Q^+ (= 0,135)$, при большом $Q^+ (= 27,0)$ становится значительным вблизи $x^+ \approx 0,03$. Далее ниже по течению в трубе профиль скорости сглаживается, однако ускорение жидкости вблизи стенки продолжает оказывать влияние и профиль скорости не становится параболическим, как в течении Пуазейля (рис. 12.1, *г*).

Влияние подвода тепла на скорость течения вблизи стенки в несколько ином виде показано на рис. 12.2, где представлены зависимости скорости от отношения скорости на оси течения к средней скорости от безразмерного расстояния вдоль оси при разных значениях Q^+ . Как и ожидалось, при малых $Q^+ (= 0,135)$ отношение скоростей u_c/u_m по мере развития течения стремится к 2. При $Q^+ = 1,35$ кривая зависимости u_c/u_m от x^+ совпадает с аналогичной кривой для несжимаемой жидкости до $x^+ \approx 0,001$, а затем «заброс» скорости в пристенной области приводит к уменьшению расхода через центральную часть трубы, в результате чего u_c/u_m убывает и профиль течения Пуазейля формируется на большем расстоянии от входа в трубу. При $Q^+ = 13,5$ и $27,0$ отличия проявляются гораздо сильнее и «заброс» возникает гораздо раньше. При двух наибольших значениях Q^+ отношение скоростей достигает минимума при $x^+ \approx 0,035$. Это означает, что, хотя скорость на оси течения и средняя скорость при нагревании увеличиваются, расход жидкости в пристенной области при $0,001 < x^+ < 0,005$ растет быстрее, чем ее расход через центральную часть трубы.

На рис. 12.3 показаны профили температуры в нескольких поперечных сечениях трубы при четырех значениях Q^+ . Профили при

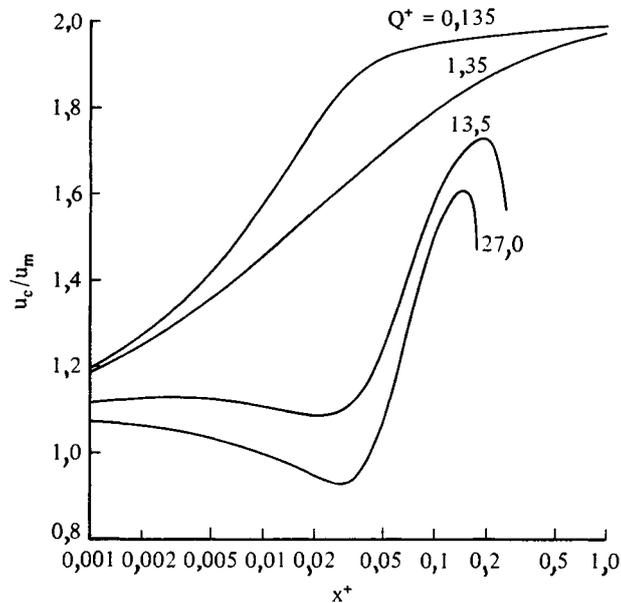


Рис. 12.2. Влияние плотности теплового потока на стенке на изменение скорости течения на оси трубы.

$Q^+ = 0,135$, а также профиль течения Пуазейля

$$\frac{T_w - T}{T_w - T_m} = \frac{24}{11} \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{r_0} \right)^4 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \quad (12.30)$$

представлены на рис. 12.3, а (см. также уравнения (5.21) и (5.22)). Как можно видеть, влияние сжимаемости, приводящее к изменениям профилей скорости, вызывает аналогичные изменения профилей температуры, которые искажаются по тем же причинам. Во входной части трубы ускоряющийся газ в пристенной области уносит большую часть тепла, поступающего от стенок. При этом температура в центральной части течения остается неизменной до $x^+ \approx 0,01$. Далее вниз по течению прогревается и центральная часть потока.

Изменение числа Нуссельта

$$\text{Nu} = \frac{\dot{q}_w}{T_w - T_m} \frac{d}{k_m} \quad (12.31)$$

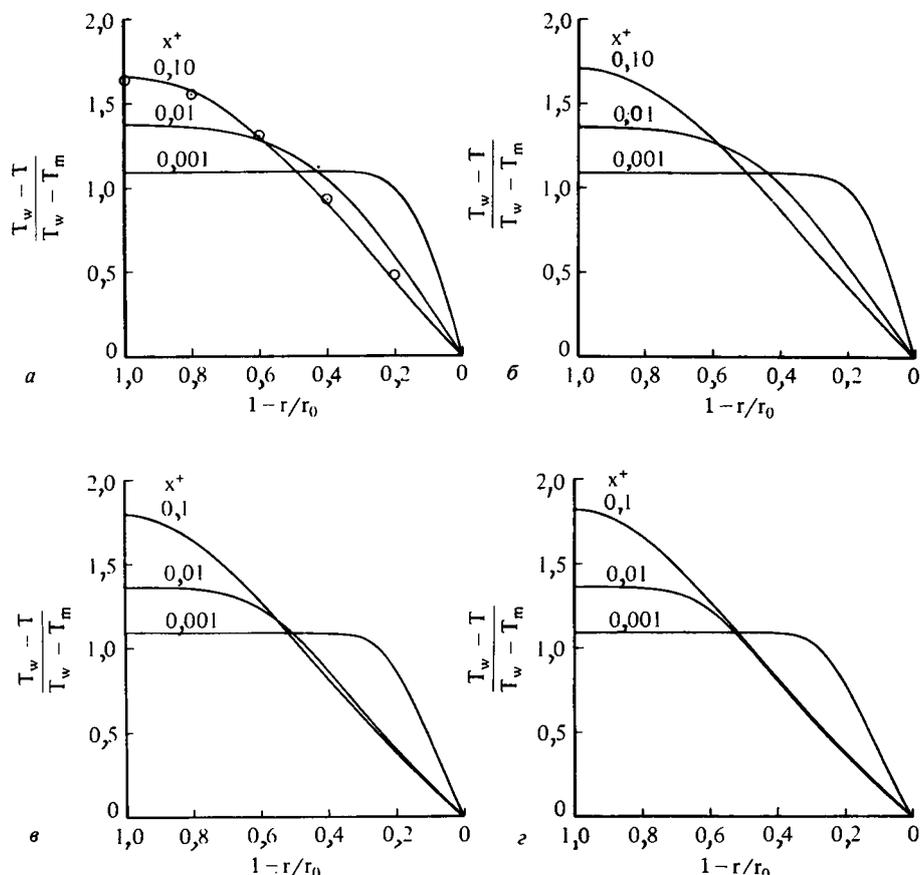


Рис. 12.3. Влияние плотности теплового потока на стенке на развитие профилей температуры.

а — $Q^+ = 0,135$; \odot профиль температуры в полностью развитом течении Пуазейля; б — $Q^+ = 1,35$; в — $Q^+ = 13,5$; г — $Q^+ = 27,0$.

по длине трубы показано на рис. 12.4. Поскольку начальное число Маха мало, то эффекты записания не сказываются на характере течения. Интересным результатом этих расчетов является то, что число Нуссельта для полностью развитого течения не зависит от плотности теплового потока, подводимого через стенку. С другой стороны, при $Q^+ = 13,5$ и $27,0$ значения числа Нуссельта начинают отклоняться от его классического значения при постоянной плотности теплового потока $Nu = 48/11 = 4,364$ при $x^+ \rightarrow \infty$ (см. уравнение (5.25)).

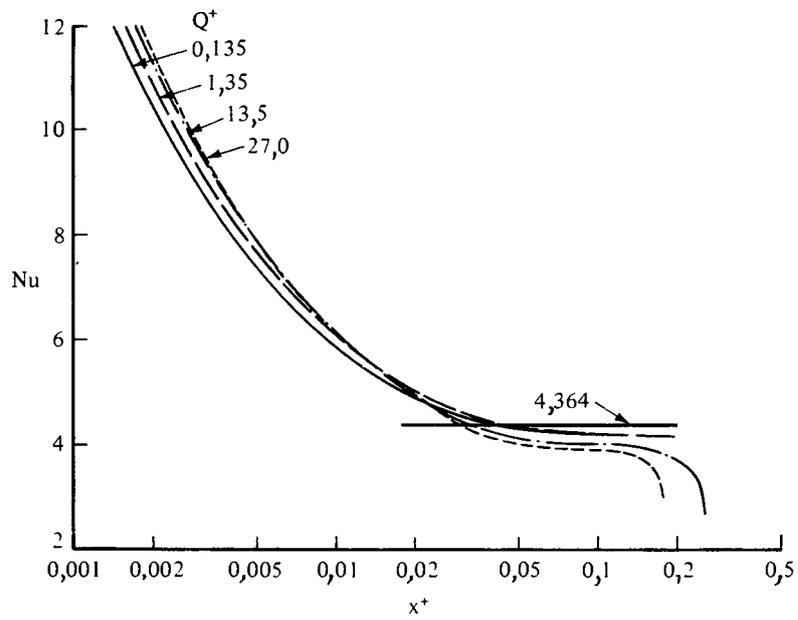


Рис. 12.4. Влияние плотности теплового потока на стенке на число Нуссельта Nu .

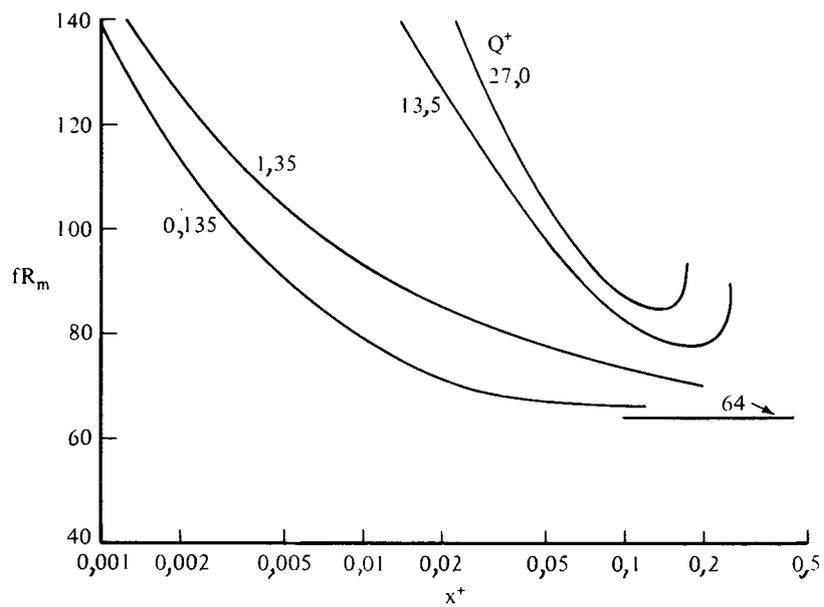


Рис. 12.5. Влияние плотности теплового потока на стенке на параметр трения fR_m .

На рис. 12.5 показано изменение параметра трения fR_m вдоль оси трубы при разных значениях плотности теплового потока в стенку. Коэффициент трения f здесь определяется выражением

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{8}\rho_m u_m^2}, \quad (12.32)$$

в котором ρ и u соответствуют среднемассовой температуре T_m . Из рис. 12.5 следует, что во входной части трубы коэффициент трения сильно зависит от величины параметра теплового потока Q^+ . Это также является результатом «заброса» скорости вблизи стенки трубы, показанного на рис. 12.1. Большие градиенты скоростей вблизи стенки во входной части трубы естественно вызывает большие напряжения сдвига на самой стенке. Из рис. 12.5 также видно, что при малых значениях Q^+ значения fR_m с ростом x^+ стремятся к соответствующему значению для течения Пуазейля $fR_d = 64$ (см. уравнение (5.11)). Наоборот, при больших значениях Q^+ кривые зависимости fR_m от x^+ достигают более высоких асимптотических значений ~ 85 , а затем из-за большого ускорения потока резко поднимаются вверх (рис. 12.2).

12.2. Ламинарные, переходные и турбулентные течения в охлажденной трубе

В качестве второго примера рассмотрим задачу предыдущего раздела, включив в число исследуемых переходные и турбулентные течения в трубе с заданной температурой стенки. Расчеты были выполнены на основе алгоритма, описанного в начале этой главы, модифицированного варианта программы для ЭВМ, приведенной в разд. 13.5, понятия турбулентной вязкости, введенного Себиси — Смитом (гл. 6 и 11). В точке $x = 0$ течение считалось ламинарным с заданными значениями T_0 , p_0 , R_d , Pr и T_w/T_0 ; принималось, что переход к турбулентному течению происходит в точке x_0 .

На рис. 12.6 и 12.7 показаны зависимости коэффициента трения и числа Нуссельта от длины трубы при двух значениях температуры стенки. Как и ожидалось, коэффициент трения и число Нуссельта изменяются аналогичным образом, причем изменение температуры стенки мало сказывается в области ламинарного течения и более заметно в области турбулентного течения. При дальнейшем охлаждении или нагревании стенки это различие может стать еще сильнее; усилится и влияние сопряженности уравнений движения и энергии. Весьма вероятно, что указанные эффекты будут более выражены в случае турбулентных течений.

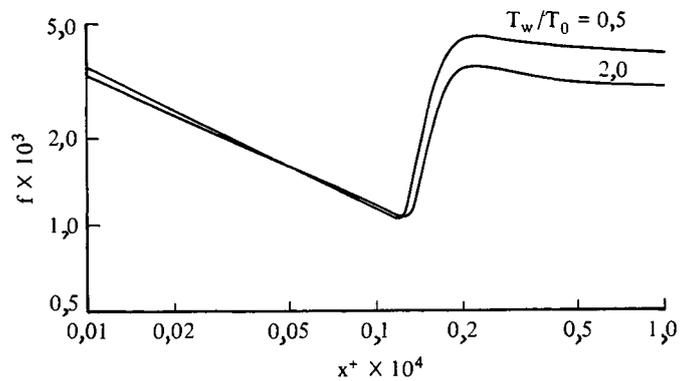


Рис. 12.6. Влияние охлаждения ($T_w/T_0 = 0,5$) и нагрева ($T_w/T_0 = 2$) на коэффициент трения при положении точки перехода, соответствующем $x_{tr}^+ = 0,125 \times 10^{-4}$.

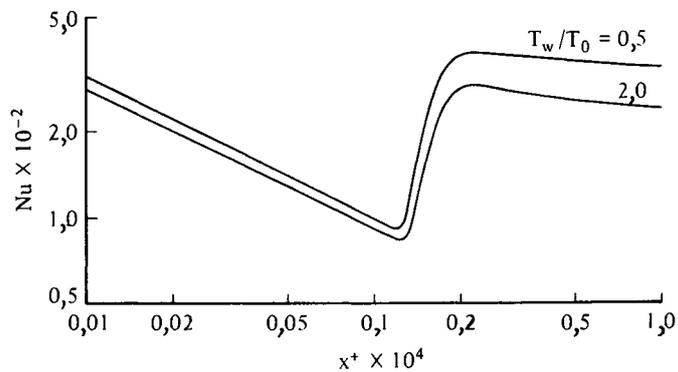


Рис. 12.7. Влияние охлаждения ($T_w/T_0 = 0,5$) и нагрева ($T_w/T_0 = 2$) на число Нуссельта при положении точки перехода, соответствующем $x_{tr}^+ = 0,125 \times 10^{-4}$.

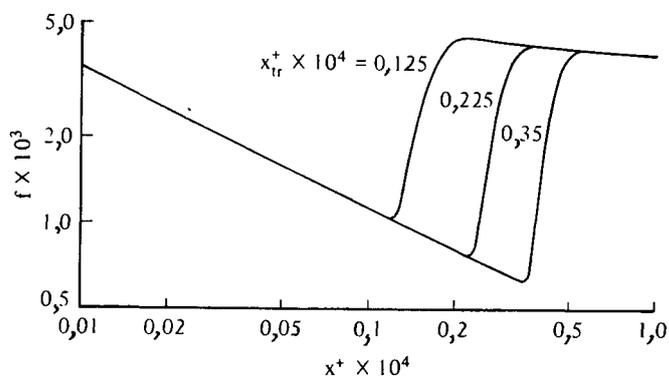


Рис. 12.8. Влияние перехода на коэффициент трения для охлажденной стенки ($T_w/T_0 = 0,5$).

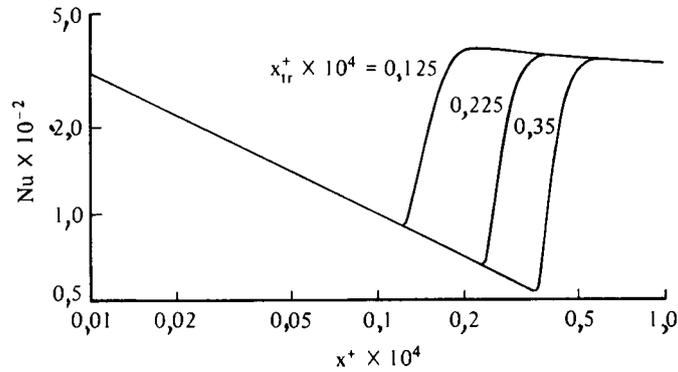


Рис. 12.9. Влияние перехода на число Нуссельта для охлажденной стенки ($T_w/T_0 = 0,5$).

Результаты, представленные на рис. 12.6 и 12.7, подтверждают, что выражение для зоны переходного течения, введенное в модель турбулентности, предложенную Себиси — Смитом, обеспечивает удовлетворительное представление переменных в этой зоне гладкими кривыми. На рис. 12.8 и 12.9 показаны результаты вычислений с использованием указанной модели, демонстрирующие влияние смещения точки перехода по длине трубы, которое на практике можно осуществить, турбулизируя пограничный слой путем изменения шероховатости поверхности трубы или изменяя конфигурацию ее входной части. Как и ранее, есть основания считать, что

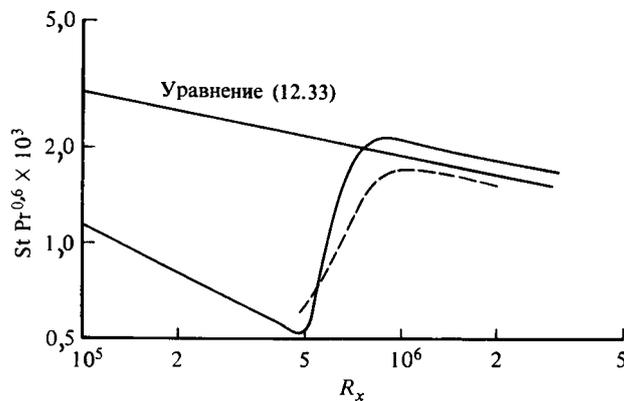


Рис. 12.10. Сравнение результатов расчета и экспериментальных данных [2].
расчет; --- эксперимент; $R_x = u_e x / \nu_e$.

модель Себиси — Смита удовлетворительно описывает рассматриваемое течение и что в случае охлаждаемой стенки коэффициент трения приобретает значение, характерное для турбулентного течения несколько выше по течению, чем число Нуссельта.

Есть все основания ожидать, что результаты расчета, основанного в нашем случае на уравнениях сохранения, будут хорошо согласовываться с экспериментальными данными. Экспериментов, которыми можно было бы подтвердить этот вывод, немного. К их числу относятся опыты Бэка и др. [2], которые позволяют сравнить результаты измерений и расчета теплового потока на стенке входной части охлаждаемой трубы, по которой течет горячий воздух. Результаты сравнения представлены на рис. 12.10 для трубы диаметром 12,7 мм с постоянной температурой стенки (менее 100 °С), по которой течет газ с начальной температурой около 560 °С. Результаты измерений, показанные пунктирной линией, типичны для опубликованных указанными авторами и хорошо согласуются с результатами расчетов, выполненных при условии, что переход к турбулентному течению происходит именно в том месте, где он наблюдается в экспериментах. В области полностью развитого турбулентного течения измеренные значения примерно на 15% меньше расчетных. Следует также отметить, что эталонная кривая, предложенная в работе [2] для области турбулентного течения, дает значения, заниженные на 10% по сравнению с результатами расчета. Эталонная кривая описывается уравнением

$$\text{St Pr}^{0,6} = 0,03 R_x^{-0,2}, \quad (12.33)$$

полученным с помощью аналогии Рейнольдса и закона степени 1/5 для коэффициента трения, причем значения физических характеристик жидкости взяты при температуре в ядре потока. Экспериментальные данные были опубликованы именно в такой форме, и этим объясняется выбор ординаты на рис. 12.10. Следует также обратить внимание на то, что уравнения (12.33) и (6.70) имеют много общего.

ЛИТЕРАТУРА

1. Presler A.F., Analytical and experimental study of compressible laminar-flow heat transfer and pressure drop of a gas in a uniformly heated tube, NASA TN D-6333, 1971.
2. Back L.H., Cuffel R.F., Massier P.F., Laminar, transitional and turbulent boundary-layer heat-transfer measurements with wall cooling in turbulent airflow through a tube, *J. Heat Transfer*, **91**, 477, 1969. [Имеется перевод: Бэк, Каффель, Массье. Измерение теплоотдачи в ламинарном, переходном и турбулентном режимах в пограничном слое у охлаждаемой стенки в турбулентном потоке в трубе. — Труды Амер.-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1969, № 4, с. 63.]

Конечно-разностные методы решения уравнений пограничного слоя

13

В этой главе рассматриваются методы численного решения уравнений тонкого сдвигового слоя, выписанных в предыдущих главах. В разд. 13.1 дан краткий обзор конечно-разностных методов и обсуждаются относительные достоинства и недостатки явных и неявных методов. Предпочтение отдается неявной схеме «прямоугольник», а ее применение для исследования внутренних и внешних течений подробно рассматривается в разд. 13.2—13.5.

В разд. 13.2 обсуждается решение уравнения энергии для развивающихся тепловых пограничных слоев в каналах с полностью развитым (несопряженным) профилем скоростей и показано, как можно решать конечно-разностные уравнения так называемым методом матричной прогонки при самых разных граничных условиях. В разд. 13.3 описана программа, составленная на алгоритмическом языке Фортран, в которой используется указанный численный метод. Эта программа позволяет решать уравнения энергии как для ламинарных, так и для турбулентных течений в осесимметричных каналах. Хотя она написана только для граничных условий, соответствующих постоянной температуре, после некоторых модификаций ее можно применять для расчета течений с разными законами изменения температуры стенки, а также для расчета плоских течений.

В разд. 13.4 описана схема «прямоугольник», используемая для решения сопряженных уравнений сохранения массы, количества движения и энергии для плоских ламинарных и турбулентных течений в пограничных слоях, а в разд. 13.5 представлена программа на языке Фортран, в которой использована эта схема. Для расчета несопряженных течений проще пользоваться программой для сопряженных течений, чем разрабатывать специальную упрощенную программу.

13.1. Обзор численных методов решения уравнений пограничного слоя

Уравнения пограничного слоя относятся к классу параболических. Известен ряд численных методов их решения, к которым относятся конечно-разностные методы, метод прямых, метод Галёркина и методы конечных элементов, которые рассматриваются, например, в работе [1]¹⁾. В настоящее время для решения уравнений пограничного слоя обычно используют конечно-разностные методы; поэтому ограничимся рассмотрением только этих методов.

Чтобы показать, как конечно-разностные методы применяются для решения уравнений пограничного слоя, рассмотрим уравнение энергии для плоского течения с постоянной плотностью в симметричном канале с полностью развитым профилем скорости

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\dot{\nu}}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (13.1)$$

Для решения этого уравнения, как и любого другого дифференциального уравнения в частных производных, необходимо задать *начальные* и *граничные условия*. Пусть граничные условия для уравнения (13.1) имеют вид

$$y = 0, \quad T = T_w, \quad (13.2a)$$

$$y = \delta, \quad T = T_e, \quad (13.2b)$$

а начальные условия — вид

$$x = x_0, \quad T = T(y). \quad (13.3)$$

Чтобы решить уравнение (13.1) конечно-разностным методом, нужно аппроксимировать производные конечно-разностными выражениями. Пользуясь теоремой Тейлора и полагая, что функция w и ее производные являются однозначными, ограниченными и непрерывными функциями ξ , получим

$$w(\xi + r) = w(\xi) + rw'(\xi) + \frac{1}{2}r^2w''(\xi) + \frac{1}{6}r^3w'''(\xi) + \dots, \quad (13.4a)$$

$$w(\xi - r) = w(\xi) - rw'(\xi) + \frac{1}{2}r^2w''(\xi) - \frac{1}{6}r^3w'''(\xi) + \dots, \quad (13.4b)$$

¹⁾ Обзор методов решения уравнений пограничного слоя, уравнений Навье — Стокса, а также описание структур пакетов прикладных программ даны в монографии [7*]. — Прим. ред.

где штрихами обозначено дифференцирование по ζ . Сложив уравнения (13.4a) и (13.4b) и отбросив члены четвертого и более высоких порядков, получим

$$w(\zeta + r) + w(\zeta - r) = 2w(\zeta) + r^2 w''(\zeta).$$

Следовательно,

$$w''(\zeta) = \frac{1}{r^2} [w(\zeta + r) - 2w(\zeta) + w(\zeta - r)], \quad (13.5)$$

где погрешность имеет порядок r^2 .

Если вычесть уравнение (13.4b) из уравнения (13.4a), то получим

$$w'(\zeta) = \frac{1}{2r} [w(\zeta + r) - w(\zeta - r)]. \quad (13.6)$$

Это уравнение аппроксимирует наклон касательной в точке P наклоном хорды AB (рис. 13.1) и называется *центрально-разностной аппроксимацией*. Наклон касательной можно аппроксимировать также наклоном хорды PB , получив формулу *разности для интерполирования вперед (правой разности)*

$$w'(\zeta) = \frac{1}{r} [w(\zeta + r) - w(\zeta)], \quad (13.7)$$

или наклоном хорды AP , получив формулу *разности для интерполирования назад (левой разности)*

$$w'(\zeta) = \frac{1}{r} [w(\zeta) - w(\zeta - r)]. \quad (13.8)$$

Отметим, что в то время, как уравнение (13.6) имеет погрешность $O(r^2)$, уравнения (13.7) и (13.8) имеют погрешность $O(r)$.

Используемые при переходе к конечным разностям обозначения поясняются рис. 13.2, где показаны узлы равномерной сетки в плоскости xu с координатами

$$\begin{aligned} x &= x_0, & x_n &= x_{n-1} + k, & n &= 1, 2, \dots, N, \\ y_0 &= 0, & y_j &= y_{j-1} + h, & j &= 1, 2, \dots, J. \end{aligned} \quad (13.9)$$

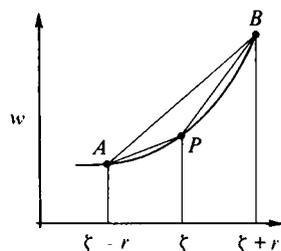


Рис. 13.1. Обозначения, используемые при аппроксимации производных.

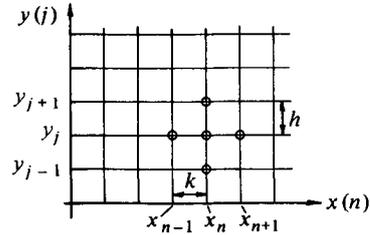


Рис. 13.2. Обозначения для произвольной конечно-разностной сетки.

При переходе к компактным обозначениям

$$T(x_n, y_j) \equiv T_j^n \tag{13.10}$$

конечно-разностные аналоги производной $\partial T/\partial x$, выраженной через центральные, правые и левые разности, в соответствии с уравнениями (13.6)—(13.8) приобретают вид

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x_n, y_j) = \begin{cases} \frac{1}{2k}(T_j^{n+1} - T_j^{n-1}), & (13.11a) \\ \frac{1}{k}(T_j^{n+1} - T_j^n), & (13.11b) \\ \frac{1}{k}(T_j^n - T_j^{n-1}). & (13.11c) \end{cases}$$

Аналогичным образом конечно-разностные выражения для $\partial^2 T/\partial y^2$ можно получить из уравнения (13.5) и представить в виде

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x_n, y_j) = \frac{1}{h^2}(T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n). \tag{13.12}$$

При заданном наборе начальных и граничных условий (рис. 13.3) решение уравнения (13.1) можно получить как явным, так и неявным методом. В первом случае значение T в сечении, расположенном ниже по течению, выражается через значения функций в сечении выше по течению, и соответствующее уравнение можно ре-

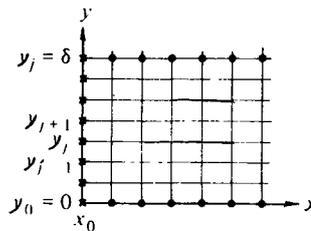


Рис. 13.3. Начальные и граничные условия для уравнения (13.1) в плоскости x, y .

значения, известные из граничных условий; \times значения, известные из начальных условий.

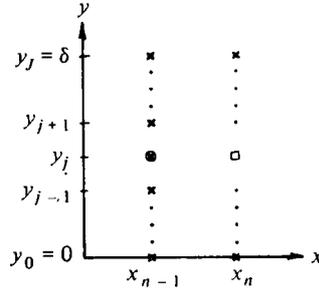


Рис. 13.4. Конечно-разностная сетка для явного метода.

□ неизвестные величины; × известные величины; ○ центр.

шить в явном виде. При неявном методе решения T в сечении, расположенном ниже по течению, выражается через значения переменных в том же сечении и известные величины.

Явную схему получим, представив $\partial T/\partial x$ формулой для правой разности (уравнение (13.11b)), а $\partial^2 T/\partial y^2$ — уравнением (13.2) и поместив обе эти величины в узле сетки «выше по течению» (x_{n-1}, y_j) (рис. 13.4), т. е.

$$u_j^{n-1} \frac{1}{k} (T_j^n - T_j^{n-1}) = \frac{\nu}{Pr} \frac{1}{h^2} (T_{j+1}^{n-1} - 2T_j^{n-1} + T_{j-1}^{n-1})$$

или

$$T_j^n = T_j^{n-1} + \frac{\nu}{Pr} \frac{1}{u_j^{n-1}} \frac{k}{h^2} (T_{j+1}^{n-1} - 2T_j^{n-1} + T_{j-1}^{n-1}), \quad j = 1, 2, \dots, J - 1. \tag{13.13}$$

Отметим, что параметр u , представляющий профиль скорости в уравнении (13.1), не зависит от x и может быть записан в виде u_j без верхнего индекса $n - 1$. Однако будем представлять его в виде u_j^{n-1} , чтобы не забыть, что в общем случае u может зависеть от x .

Из уравнения (13.13) видим, что при явной схеме значение T_j^n выражается через известные значения в сечении выше по течению и это уравнение позволяет получить значение T при значениях y , соответствующих $j = 1, 2, \dots, J - 1$. Значения T при $j = 0$ и J известны из граничных условий. Можно показать, что вычислительная погрешность этой схемы имеет порядок $k + h^2$, поэтому, чтобы обеспечить приемлемую точность, шаг по x , обозначенный через k , должен быть мал. Кроме того, хотя явные схемы просты в

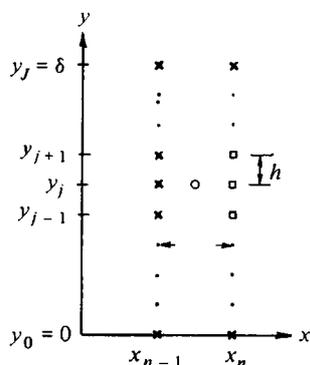


Рис. 13.5. Конечно-разностная сетка для схемы Крэнка — Николсона. Шаг h постоянен, k_n может быть переменным.

□ неизвестные величины; × известные величины; ○ центр.

вычислительном отношении, они могут привести к неустойчивости, если шаг по y также не будет малым; в этом случае необходимо, чтобы выполнялось неравенство $k < \frac{1}{2} (\text{Pr}/\nu) u^{n-1} h^2$.

В противоположность этому неявные схемы абсолютно устойчивы и позволяют вести счет с гораздо большими шагами по времени (что дает соответствующую экономию машинного времени), если обеспечивается необходимая точность. Например, в схеме Крэнка — Николсона [2] используется конечно-разностная сетка, показанная на рис. 13.5; $\partial^2 T / \partial y^2$ в узле $(x_{n-1/2}, y_j)$ заменяется средним из значений выше и ниже по течению в x_{n-1} и x_n соответственно

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x_{n-1/2}, y_j) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_j^n + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_j^{n-1} \right],$$

а $\partial T / \partial x$ заменяется центрально-разностной формулой (13.11а)

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x_{n-1/2}, y_j) = \frac{T_j^n - T_j^{n-1}}{k_n}.$$

Тогда уравнение (13.1) можно переписать в виде

$$u_j^{n-1/2} \frac{1}{k_n} (T_j^n - T_j^{n-1}) = \frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{1}{2h^2} \left[(T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n) + (T_{j+1}^{n-1} - 2T_j^{n-1} + T_{j-1}^{n-1}) \right], \quad (13.14)$$

или в общем виде

$$a_j T_{j-1}^n + b_j T_j^n + c_j T_{j+1}^n = r_j, \quad 1 \leq j \leq J-1, \quad (13.15)$$

где

$$\begin{aligned} a_j &= 1, & b_j &= -(2 + \lambda_j), & c_j &= 1, \\ r_j &= -\lambda_j T_j^{n-1} - (T_{j+1}^{n-1} - 2T_j^{n-1} + T_{j-1}^{n-1}), & 1 \leq j \leq J-1, \\ \lambda_j &= \frac{\text{Pr}}{\nu} \frac{2h^2}{k_n} u_j^{n-1/2}. \end{aligned} \quad (13.16)$$

Отметим, что в r входят только значения T^{n-1} , а значения T^n не входят. При $j = 0$ и J задаются граничные условия T_0^n и T_J^n . В результате при $j = 1$ и $J - 1$ уравнение (13.15) можно записать в виде

$$b_1 T_1^n + c_1 T_2^n = r_1 - a_1 T_0^n \equiv r_1^* \quad \text{при } j=1 \quad (13.17a)$$

и

$$a_{J-1} T_{J-2}^n + b_{J-1} T_{J-1}^n = r_{J-1} - c_{J-1} T_J^n \equiv r_{J-1}^* \quad \text{при } j=J-1. \quad (13.17b)$$

В этой тщательно сцентрированной схеме Крэнка — Николсона погрешности имеют порядок $h^2 + k_n^2$, однако чтобы обеспечить устойчивость, нет необходимости связывать k_n с h . Эта схема абсолютно устойчива: второй порядок точности можно получить при равномерной сетке по y . С другой стороны, неизвестное значение T выражено через $J - 1$ других значений T , два из которых известны. Поэтому приходится выполнять больше арифметических операций, чем при использовании явной схемы.

Тем не менее можно очень просто получить решение уравнений (13.15)—(13.17). В векторных обозначениях их можно представить в виде

$$A\mathbf{T} = \mathbf{r}, \quad (13.18)$$

где \mathbf{T} и \mathbf{r} — $(J - 1)$ -мерные векторы:

$$\mathbf{T} \equiv \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{J-2} \\ T_{J-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} \equiv \begin{bmatrix} r_1^* \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{J-2} \\ r_{J-1}^* \end{bmatrix}, \quad (13.19a)$$

а A — тридиагональная матрица порядка $(J - 1)$:

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & a_{J-2} & b_{J-2} & c_{J-2} \\ & & & a_{J-1} & b_{J-1} \end{bmatrix}. \quad (13.19b)$$

Тогда решение уравнения (13.18) можно получить двумя ходами. При так называемом прямом ходе

$$\begin{aligned} \beta_1 &= b_1, & s_1 &= r_1^*, \\ m_j &= \frac{a_j}{\beta_{j-1}}, \\ \beta_j &= b_j - m_j c_{j-1}, \\ s_j &= r_j - m_j s_{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, J-1, \end{aligned} \quad (13.20a)$$

а при обратном ходе

$$T_{j-1} = \frac{s_{j-1}}{\beta_{j-1}}, \quad T_j = \frac{s_j - c_j T_{j+1}}{\beta_j}, \quad j = J-2, J-3, \dots, 1. \quad (13.20b)$$

Перейдем теперь к описанию другого неявного метода, который предложил Келлер [3] и который обычно называют схемой «прямоугольник». Этот метод имеет ряд преимуществ, которые делают его пригодным для решения любых параболических дифференциальных уравнений в частных производных. Наиболее важными из них являются следующие:

1. Число арифметических операций, необходимых для реализации этого метода, лишь ненамного больше, чем в случае метода Крэнка — Николсона.
2. Обеспечивается второй порядок точности при произвольном (неравномерном) распределении узлов сетки по осям x и y .
3. Допустим сильно неравномерный шаг по x .
4. Можно легко программировать решение большого числа сопряженных уравнений.

Решение уравнения этим методом осуществляется в следующие четыре этапа:

1. Уравнение или система уравнений заменяется системой уравнений первого порядка.
2. Дифференциальные уравнения заменяются конечно-разностными с использованием формул центральных разностей.

3. Если полученные алгебраические уравнения являются нелинейными, их линеаризуют и записывают в векторно-матричном виде.
4. Полученную систему линейных уравнений решают методом матричной прогонки для тридиагональных матриц.

Чтобы решить этим методом уравнение (13.1), представим его сначала в виде системы двух уравнений первого порядка, приняв

$$T' = p \tag{13.21a}$$

и переписав уравнение (13.1) в виде

$$p' = \frac{\text{Pr}}{\nu} u \frac{\partial T}{\partial x}. \tag{13.21b}$$

Здесь штрихами обозначено дифференцирование по y . Обыкновенное дифференциальное уравнение (13.21a) запишем в конечно-разностной форме для центральной точки $(x_n, y_{j-1/2})$ отрезка P_1P_2 , показанного на рис. 13.6, а дифференциальное уравнение в частных производных (13.21b) — для центра $(x_{n-1/2}, y_{j-1/2})$ прямоугольника $P_1P_2P_3P_4$. В результате получим

$$\frac{T_j^n - T_{j-1}^n}{h_j} = \frac{p_j^n + p_{j-1}^n}{2} = p_{j-1/2}^n, \tag{13.22a}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{p_j^n - p_{j-1}^n}{h_j} + \frac{p_j^{n-1} - p_{j-1}^{n-1}}{h_j} \right) = \frac{\text{Pr}}{\nu} u_{j-1/2}^{n-1/2} \frac{T_{j-1/2}^n - T_{j-1/2}^{n-1}}{k_n}. \tag{13.22b}$$

После ряда преобразований два последних уравнения представим в виде

$$T_j^n - T_{j-1}^n - \frac{h_j}{2} (p_j^n + p_{j-1}^n) = 0, \tag{13.23a}$$

$$(s_1)_j p_j^n + (s_2)_j p_{j-1}^n + (s_3)_j (T_j^n + T_{j-1}^n) = R_{j-1/2}^{n-1}, \tag{13.23b}$$

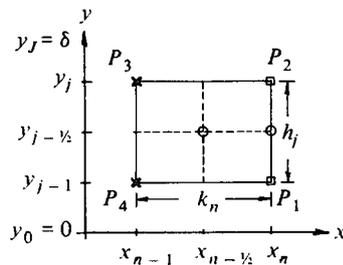


Рис. 13.6. Конечно-разностная сетка для схемы «прямоугольник».

h и k могут быть переменными; $x_{n-1/2} = 0,5(x_n + x_{n-1})$, $y_{j-1/2} = 0,5(y_j + y_{j-1})$; \square неизвестные величины; \times известные величины; \circ центр.

где

$$(s_1)_j = 1, \quad (s_2)_j = -1, \quad (s_3)_j = -\frac{\lambda_j}{2}, \quad (13.24a)$$

$$R_{j-1/2}^{n-1} = -\lambda_j T_{j-1/2}^{n-1} + p_{j-1}^{n-1} - p_j^{n-1}, \quad (13.24b)$$

$$\lambda_j = \frac{2Pr}{\nu} u_{j-1/2}^{n-1/2} \frac{h_j}{k_n}. \quad (13.24c)$$

Как и раньше, верхний индекс у $u_{j-1/2}$ можно опустить, но он оставлен для общности.

Уравнения (13.23) записываются для $j = 1, 2, \dots, J - 1$. При $j = 0$ и J имеем соответственно

$$T_0 = T_w, \quad T_J = T_e, \quad (13.25)$$

Поскольку уравнения (13.23) линейные, как и соответствующие граничные условия, определяемые уравнением (13.25), то систему уравнений можно сразу записать в векторно-матричной форме, показанной ниже. При этом нет необходимости в линеаризации, как в случае конечно-разностных уравнений для поля скоростей.

	T_0	P_0	T_j	P_j	T_J	P_J	
Граничные условия	1	0	0	0	0	0] ×
Уравнение (13.23a)	-1	$-\frac{h_1}{2}$	1	$-\frac{h_1}{2}$	0	0	
Уравнение (13.23b)	$(s_3)_j$	$(s_2)_j$	$(s_3)_j$	$(s_1)_j$	0	0	
Граничные условия	0	0	-1	$-\frac{h_{j+1}}{2}$	1	$-\frac{h_{j+1}}{2}$	
			$(s_3)_J$	$(s_2)_J$	$(s_3)_J$	$(s_1)_J$	

$$\times \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ P_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} T_j \\ P_j \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} T_J \\ P_J \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} (r_1)_0 \\ (r_2)_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (r_1)_j \\ (r_2)_j \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (r_1)_J \\ (r_2)_J \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad (13.26)$$

w_j по рекуррентным формулам

$$\Delta_0 = \mathbf{A}_0, \quad (13.31a)$$

$$\Gamma_j \Delta_{j-1} = \mathbf{B}_j, \quad (13.31b)$$

$$\Delta_j = \mathbf{A}_j - \Gamma_j \mathbf{C}_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq J, \quad (13.31c)$$

$$w_0 = r_0, \quad (13.32a)$$

$$w_j = r_j - \Gamma_j w_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq J. \quad (13.32b)$$

Здесь Γ_j имеет ту же структуру, что и B_j , т. е.

$$\Gamma_j \equiv \begin{bmatrix} (\gamma_{11})_j & (\gamma_{12})_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и хотя второй ряд Δ_j имеет ту же структуру, что и второй ряд A_j :

$$\Delta_j \equiv \begin{bmatrix} (\alpha_{11})_j & (\alpha_{12})_j \\ -1 & \frac{-h_{j+1}}{2} \end{bmatrix},$$

для общности представим его в виде

$$\Delta_j \equiv \begin{bmatrix} (\alpha_{11})_j & (\alpha_{12})_j \\ (\alpha_{21})_j & (\alpha_{22})_j \end{bmatrix}.$$

При обратном ходе δ_j вычисляются по следующим рекуррентным формулам:

$$\Delta_j \delta_j = w_j, \quad (13.33a)$$

$$\Delta_j \delta_j = w_j - \mathbf{C}_j \delta_{j+1}, \quad j = J-1, J-2, \dots, 0 \quad (13.33b)$$

13.2. Решение уравнения энергии для внутреннего течения с полностью развитым профилем скорости

Уравнение энергии для развивающихся тепловых пограничных слоев в каналах с полностью развитым профилем скорости определяется уравнением (5.5). Это уравнение или его безразмерные аналоги, уравнения (6.38) и (5.41), являются дифференциальными уравнениями в частных производных. При простых граничных условиях в случае ламинарных течений их можно решить аналитически. Однако, хотя решение удастся выписать в конечном виде, вычисление

полученных при этом медленно сходящихся рядов оказывается очень трудоемким. Более практичным оказывается решение уравнения энергии конечно-разностным методом, который позволяет не только рассчитывать ламинарные течения в сколь угодно широком диапазоне граничных условий, но и дает возможность изучать турбулентные течения при заданном законе изменения турбулентной вязкости и числа Прандтля.

Уравнение энергии будем решать численно по схеме «прямоугольник», рассмотренной в предыдущем разделе. Здесь подробнее обсудим процедуру решения и рассмотрим случай более сложных граничных условий.

Переход к конечно-разностным уравнениям

Сначала найдем решение уравнения для безразмерной температуры $g \equiv (T_w - T)/(T_w - T_e)$

$$(a_1 g')' + a_2 \frac{\eta}{2} g' - a_3 g = a_2 \hat{x} \frac{\partial g}{\partial \hat{x}} - a_3 \quad (5.38)$$

при граничных условиях

$$\eta = 0, \quad g = 0 \text{ или } g' = 1; \quad \eta = \eta_e, \quad g = 1. \quad (5.39)$$

Для удобства примем $x = \hat{x}$ и по аналогии с узлами сетки, определенными в плоскости xu , зададим координаты новых узлов в плоскости $x\eta$ в виде

$$\begin{aligned} x_0 = 0, \quad x_n = x_{n-1} + k_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ \eta_0 = 0, \quad \eta_j = \eta_{j-1} + h_j, \quad j = 1, 2, \dots, J. \end{aligned} \quad (13.34)$$

Как и ранее, заменим уравнение (5.38) двумя дифференциальными уравнениями первого порядка, приняв

$$g' = p \quad (13.35a)$$

и переписав уравнение (5.38) в виде

$$(a_1 p)' + a_2 \frac{\eta}{2} p - a_3 g = a_2 x \frac{\partial g}{\partial x} - a_3. \quad (13.35b)$$

Конечно-разностный аналог уравнения (13.35a) запишем для середины отрезка $P_1 P_2$, показанного на рис. 13.7, т. е. для точки с координатами $(x_n, \eta_{j-1/2})$, а уравнение (13.35b) в конечно-разностной форме — для центра $(x_{n-1/2}, \eta_{j-1/2})$ прямоугольника $P_1 P_2 P_3 P_4$. Тог-

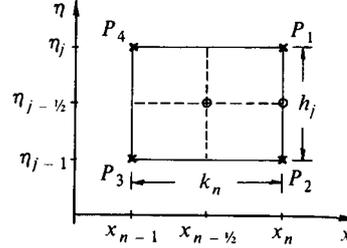


Рис. 13.7. Конечно-разностная сетка для схемы «прямоугольник».

да получим

$$g_j^n - g_{j-1}^n - \frac{h_j}{2}(p_j^n + p_{j-1}^n) = 0, \quad (13.36a)$$

$$(s_1)_j p_j^n + (s_2)_j p_{j-1}^n + (s_3)_j (g_j^n + g_{j-1}^n) = R_{j-1/2}^{n-1}, \quad (13.36b)$$

где

$$(s_1)_j = h_j^{-1}(a_1)_j^n + \frac{1}{4}(a_2)_{j-1/2}^n \eta_{j-1/2}, \quad (13.37a)$$

$$(s_2)_j = -h_j^{-1}(a_1)_{j-1}^n + \frac{1}{4}(a_2)_{j-1/2}^n \eta_{j-1/2}, \quad (13.37b)$$

$$(s_3)_j = -(a_3)_{j-1/2}^n - 2(a_2)_{j-1/2}^{n-1/2} \alpha_n, \quad (13.37c)$$

$$R_{j-1/2}^{n-1} = -2(a_2)_{j-1/2}^{n-1/2} \alpha_n g_{j-1/2}^{n-1} - 2(a_3)_{j-1/2}^{n-1/2} - \\ - \left\{ h_j^{-1} \left[(a_1 p)_j^{n-1} - (a_1 p)_{j-1}^{n-1} \right] \right\} \\ - \left[\frac{1}{2} (a_2)_{j-1/2}^{n-1} \eta_{j-1/2} p_{j-1/2}^{n-1} - (a_3)_{j-1/2}^{n-1} g_{j-1/2}^{n-1} \right], \quad (13.37d)$$

$$\alpha_n = \frac{x_{n-1/2}}{k_n}. \quad (13.37e)$$

Уравнения (13.36) записаны для $j = 1, 2, \dots, J-1$. При $j = 0$ и $j = J$ необходимо задать граничные условия. Поскольку на стенке можно задать ее температуру или плотность теплового потока, очень удобно записать граничные условия на стенке (при $j = 0$) в виде

$$\alpha_0 g_0 + \alpha_1 p_0 = \gamma_0. \quad (13.38a)$$

Если задана температура стенки, то полагаем $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$ и, следовательно, $g_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$. Если же задана плотность теплового потока, то $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$ и $\gamma_0 = p_0 \equiv 1$. Аналогичным образом можно сформулировать в общем виде граничные условия на границе пограничного слоя, записав для $j = J$

$$\beta_0 g_J + \beta_1 p_J = \gamma_1. \quad (13.38b)$$

При заданной температуре на границе пограничного слоя полагаем $\beta_0 = 1, \beta_1 = 0$; тогда $\gamma_1 = g_J$. Если же задан градиент температуры, то $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1$ и $\gamma_1 = p_J$. Очевидно, чтобы удовлетворить граничным условиям на границе пограничного слоя, в уравнении (5.39) надо принять $\beta_0 = 1, \beta_1 = 0$ и взять $\gamma_1 = 1$.

Метод матричной прогонки

Перейдем теперь к решению системы линейных уравнений (13.36) и (13.38) методом матричной прогонки, рассмотренным в разд. 13.1. В качестве граничных условий будем задавать либо температуру стенки или величину плотности теплового потока на ней, либо температуру на границе пограничного слоя или градиент температуры на оси канала. Как и ранее, представим указанную систему линейных уравнений в виде (13.28), а δ_j определим выражением

$$\delta_j = \begin{bmatrix} g_j \\ p_j \end{bmatrix}. \quad (13.39)$$

Вид всех матриц, кроме A_0 и A_J , остается прежним. С учетом граничных условий, представленных в общем виде, матрицы A_0 и A_J приобретают вид

$$A_0 = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ -1 & -\frac{h_1}{2} \end{bmatrix}, \quad A_J = \begin{bmatrix} (s_3)_J & (s_1)_J \\ \beta_0 & \beta_1 \end{bmatrix}. \quad (13.40)$$

Кроме того,

$$(r_1)_0 = \gamma_0, \quad (r_2)_J = \gamma_1. \quad (13.41)$$

При прямом ходе вычисляются Γ_j, Δ_j и w_j по рекуррентным формулам (13.31). Для этого элементы матрицы Γ_j обозначаются через $(\gamma_{ik})_j$, а элементы матрицы Δ_j — через $(\alpha_{ik})_j$, где $i, k = 1, 2$. Тогда из уравнения (13.31а) следует, что $(\alpha_{ik})_0$ имеют значения

$$\begin{aligned} (\alpha_{11})_0 &= \alpha_0, & (\alpha_{12})_0 &= \alpha_1, \\ (\alpha_{21})_0 &= -1, & (\alpha_{22})_0 &= \frac{h_1}{-2}, \end{aligned} \quad (13.42)$$

а $(\alpha_{ik})_j$ при $j = 1, 2, \dots, J - 1$ — значения

$$\begin{aligned} (\alpha_{11})_j &= (s_3)_j - (\gamma_{11})_j, & (\alpha_{12})_j &= (s_1)_j + \frac{h_j}{2} (\gamma_{12})_j, \\ (\alpha_{21})_j &= -1, & (\alpha_{22})_j &= -\frac{h_{j+1}}{2}. \end{aligned} \quad (13.43)$$

Элементы $(\gamma_{ik})_j$ матрицы Γ_j при $1 \leq j \leq J$ имеют вид

$$\begin{aligned} (\gamma_{11})_j &= \frac{(s_3)_j(\alpha_{22})_{j-1} - (s_2)_j(\alpha_{21})_{j-1}}{D_j}, \\ (\gamma_{12})_j &= \frac{(s_2)_j(\alpha_{11})_{j-1} - (s_3)_j(\alpha_{12})_{j-1}}{D_j}, \end{aligned} \quad (13.44)$$

где

$$D_j = (\alpha_{11})_{j-1}(\alpha_{22})_{j-1} - (\alpha_{21})_{j-1}(\alpha_{12})_{j-1}. \quad (13.45)$$

Компоненты вектора w_j обозначим через

$$w_j = \begin{bmatrix} (w_1)_j \\ (w_2)_j \end{bmatrix}, \quad 0 \leq j \leq J.$$

Из уравнения (13.32) следует, что при $j = 0$

$$(w_1)_0 = \gamma_0, \quad (w_2)_0 = (r_2)_0, \quad (13.46a)$$

а при $1 \leq j \leq J$

$$(w_1)_j = (r_1)_j - (\gamma_{11})_j(w_1)_{j-1} - (\gamma_{12})_j(w_2)_{j-1}, \quad (w_2)_j = (r_2)_j. \quad (13.46b)$$

При обратном ходе оба компонента δ_j находятся из уравнения (13.33) и определяются выражениями

$$\begin{aligned} g_j &= \frac{(w_1)_j(\alpha_{22})_j - e_j(\alpha_{12})_j}{D_{j+1}}, \\ p_j &= \frac{e_j(\alpha_{11})_j - (w_1)_j(\alpha_{21})_j}{D_{j+1}}, \end{aligned} \quad (13.47)$$

где

$$e_j = (w_2)_j, \quad (\alpha_{21})_j = \beta_0, \quad (\alpha_{22})_j = \beta_1 \quad \text{при } j = J,$$

а

$$e_j = (w_2)_j - g_{j+1} + \frac{h_{j+1}}{2} p_{j+1} \quad \text{при } j < J.$$

13.3. Программа на языке Фортран для расчета внутренних ламинарных и турбулентных течений с полностью развитым профилем скорости

В этом разделе описывается составленная на алгоритмическом языке Фортран программа решения уравнения энергии для внутренних течений с полностью развитым профилем скорости. Так как со-

ставление программы, пригодной для расчета и плоских, и осесимметричных течений, в широком диапазоне граничных условий требует больших затрат труда, ограничимся рассмотрением осесимметричных течений при *постоянной* температуре стенки. Используя для описания рейнولدсовых сдвиговых напряжений и тепловых потоков понятия турбулентной вязкости и турбулентного числа Прандтля, представим уравнение энергии в виде

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\nu}{Pr} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left[r \left(1 + \frac{Pr}{Pr_t} \epsilon_m^+ \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (7.1)$$

и будем использовать его для описания как ламинарных, так и турбулентных течений. Как отмечалось в гл. 5, на ранних стадиях развития течения, когда толщина теплового пограничного слоя мала, можно пользоваться преобразованными переменными и представить уравнение (7.1) в виде уравнения (5.38), а затем, до того как толщина сдвигового слоя превысит радиус трубы, перейти опять к физическим переменным и записать уравнение (7.1) в безразмерном виде (5.41). Коэффициенты, входящие в уравнения (5.38) и (5.41) и обозначаемые через a_1, a_2, a_3 (при постоянной температуре стенки $a_3 \equiv 0$), можно использовать для исследования как ламинарных, так и турбулентных течений, лишь несколько изменив вид коэффициента a_1 :

$$a_1 = r \left(1 + \frac{Pr}{Pr_t} \epsilon_m^+ \right). \quad (7.31)$$

Поскольку конечно-разностные уравнения, выписанные в предыдущем разделе, справедливы для любых течений, ими можно пользоваться для изучения как ламинарных, так и турбулентных течений.

Описываемая программа состоит из программы MAIN и трех подпрограмм: COEF, SOLV2 и OUTPUT. Ниже даны их краткие описания.

Наименования символов, используемых в программе, соответствуют, за некоторыми исключениями, обозначениям, применяемым в книге.

Программа MAIN

Эта программа позволяет определить общую логику вычислений, задать начальные профили температур (g_j и p_j) при $x = x_0$, сформировать систему координат, одна из осей которой перпендикулярна направлению течения, и учесть рост толщины погранично-

го слоя. Хотя в большинстве случаев расчета ламинарных течений равномерная сетка в пределах сдвигового слоя оказывается вполне удовлетворительной, в случае турбулентных течений это не так, поскольку их профили скорости вблизи стенки меняются быстрее, чем профили скорости ламинарных течений. Поэтому приходится вводить неравномерную сетку. В данной работе использована сетка, в которой отношение любых двух соседних расстояний между узлами постоянно, т. е. $\eta_j = \eta_{j-1} + h_j$, где $h_j = Kh_{j-1}$. Расстояние до j -й линии определяется выражением

$$\eta_j = h_1 \frac{K^j - 1}{K - 1}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, J, \quad K > 1, \quad (13.48)$$

в которое входят два параметра: h_1 — длина первого шага $\Delta\eta$ по оси η и отношение длин двух последовательных шагов K . Общее число узлов J определяется по формуле

$$J = \frac{\ln[1 + (K - 1)(\eta_e/h_1)]}{\ln K}. \quad (13.49)$$

В случае ламинарных течений обычно полагают K (\equiv VGP) = 1, η_e (\equiv ETAE) = 8 и выбирают h_1 [\equiv DETA(1)] = 0,2. Тогда по толщине пограничного слоя имеется 41 узел, и этого оказывается достаточно для расчета большинства ламинарных течений. В случае турбулентных течений можно выбрать, например, $K = 1,15$; $\eta_e = 10$ и $h_1 = 0,025$. При этом вначале имеем по толщине слоя 30 узлов. Поскольку в турбулентных течениях толщина пограничного слоя растет, при больших значениях x число узлов может увеличиться до 40—50.

Программа MAIN содержит также исходные данные, в число которых входят:

NXT	— общее число сечений по оси x ;
ITURB	— характер течения (при ламинарном течении 0, а при турбулентном 1);
IWBSCOЕ	— граничные условия на стенке (1 — при заданной температуре стенки, 0 — при заданной плотности теплового потока на стенке);
IEBSCOЕ	— граничные условия на границе пограничного слоя (1 — при заданной температуре на границе пограничного слоя, 0 — при нулевом градиенте температуры на границе пограничного слоя),

а также ETAE, DETA (1), VGP, PR, GWA, REY. В данном случае IWBSCOЕ = 1, IEBSCOЕ = 1, а GWA соответствует параметру, вхо-

дающему в плавно изменяющуюся функцию (4.90), определяющую температуру стенки. Это уравнение (см. подпрограмму COEF) используется, чтобы избежать трудностей, связанных со скачком температур на стенке (см. разд. 4.3). Параметр REY представляет собой число Рейнольдса, рассчитанное по радиусу трубы, $u_0 r_0/\nu (\equiv R_d/2)$. Отметим, что и PR, и REY нужны только при расчете турбулентных течений, так как в случае ламинарных течений они не входят в уравнения, записанные в безразмерном виде.

```

COMMON/BLCD/ NXT, IWBCOE, IEBCOE, ITURB, ICOORD, INDEX, N, NP, PR, VGP,
1      GWA, REY, CEL, ETA(51), UP(51), DELTA(51), A(51), YP(51),
2      X(101), GW(101), PW(101), GE(101), G(51,2), P(51,2)
COMMON/BLC1/ S1(51), S2(51), S3(51), R1(51), R2(51), A1(51,2), A2(51,2)
C - - - - -
C СЧИТЫВАНИЕ И ВЫДАЧА НА ПЕЧАТЬ ПАРАМЕТРОВ
READ(5,8000) NXT, IWBCOE, IEBCOE, ITURB, ETAE, DELTA(1), VGP, PR, GWA, REY
READ(5,8100) (X(I), I=1, NXT)
WRITE(6,9000) NXT, IWBCOE, IEBCOE, ITURB, ETAE, DELTA(1), VGP, PR, GWA, REY
IF((VGP-1.0) .GT. 0.0001) GO TO 20
NP = ETAE/DELTA(1)+1.0001
GO TO 30
20 NP = ALOG((ETAE/DELTA(1))*(VGP-1.0)+1.0)/ALOG(VGP)+1.0001
30 IF(NP.LE.51) GOTO 40
WRITE(6,9100)
STOP
40 ETA(1) = 0.0
YP(1) = 0
C НАЧАЛЬНЫЙ ПРОФИЛЬ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ X = X0
G(1,2) = 1.0
P(1,2) = 0.0
DO 50 J=2,51
YP(J) = 0
G(J,2) = 1.0
P(J,2) = 0.0
A1(J,2) = 1.0
A2(J,2) = 0.0
C ФОРМИРОВАНИЕ СЕТКИ
DELTA(J) = DELTA(J-1)*VGP
ETA(J) = ETA(J-1)+DELTA(J-1)
50 A(J) = 0.5*DELTA(J-1)
N = 1
ICOORD = 1
INDEX = 0
GW(1) = 1.0
60 WRITE(6,9200) N, X(N)
IF(N.EQ.1) GOTO 80
IF(ICOORD.EQ.2) CEL = 1.0/(X(N)-X(N-1))
IF(ICOORD.EQ.1) CEL = 0.5*(X(N)+X(N-1))/(X(N)-X(N-1))
IGROW = 0
70 CALL COEF
CALL SOLV2
C ПРОВЕРКА РОСТА ТОЛЩИНЫ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ
IF(ICOORD.EQ.2 .OR. NP.EQ.51) GOTO 80
IF(IGROW.GE.3 .OR. ABS(P(NP,2)) LT.1.E-04) GOTO 80
XSHTCH = 1.0/ETA(NP+1)**2
IF(X(N).GE.XSHTCH) GOTO 80
NP = NP+1
IGROW = IGROW+1
G(NP,1) = G(NP-1,1)
P(NP,1) = 0.0
GOTO 70
80 CALL OUTPUT
GOTO 60

```

```

C - - - - -
8000 FORMAT (4I5, 6F10.0)
8100 FORMAT (8F10.0)
9000 FORMAT (1H0, 7HNXT =, I3, 14X, 7HIWBCOE=, I3, 14X, 7HIEBCOE=, I3, 14X,
1      7HITURB =, I3/1H, 7HETAЕ =, E14.6, 3X, 7HDETA1 =, E14.6, 3X,
2      7HVGP =, E14.6, 3X, 7HPR =, E14.6/1H, 7HGWA =, E14.6, 3X,
3      7HREY =, E14.6)
9100 FORMAT (1H0, 34HNP EXCEEDED 51--PROGRAM TERMINATED)
9200 FORMAT (/1H0, 2HN=, I3, 5X, 3HX =, E14.6)
END

```

Подпрограмма COEF

Эта подпрограмма позволяет вычислить коэффициенты конечно-разностного уравнения энергии (13.37). При $SW = 0.0$ полученные коэффициенты соответствуют уравнению энергии в преобразованных переменных, а при $SW = 1.0$ — тому же уравнению в физических переменных. В случае турбулентных течений все коэффициенты, кроме a_1 , остаются неизменными, а a_1 определяется уравнением (7.31).

Эта подпрограмма содержит также выражения для расчета профилей скорости ламинарных и турбулентных течений. В первом случае профиль скорости определяется выражением

$$\hat{u} = 1 - (r)^2 \quad (13.50)$$

(см. также уравнение (5.20)). Профиль скорости для турбулентных течений рассчитывается по уравнению (7.13), а коэффициент трения вычисляется из уравнения (7.17).

Турбулентная вязкость и турбулентное число Прандтля определяются по уравнениям (7.9), (7.10) и (6.26) соответственно. Отметим, что при $y = 0$ последнее уравнение принимает вид

$$Pr_t = \frac{\kappa}{\kappa_h} \frac{B}{A}. \quad (13.51)$$

```

SUBROUTINE COEF
REAL K, KH
COMMON/BLCD/ NXT, IWBCOE, IEBCOE, ITURB, ICOORD, INDEX, N, NP, PR, VGP,
1      GWA, REY, CEL, ETA(51), UP(51), DETA(51), A(51), YP(51),
2      X(101), GW(101), PW(101), GE(101), G(51, 2), P(51, 2)
COMMON/BLC1/ S1(51), S2(51), S3(51), R1(51), R2(51), A1(51, 2), A2(51, 2)
DIMENSION C(5), EDV(51), DUDY(51)
DATA K, KH/D 4, D 44/
DATA IGWALL, APLUS, C/D, 26, D, 34, 96, 28, 79, 33, 95, 6, 3, -1, 186/
C - - - - -
SWITCH = 0 D
XP1 = 1 D
JJ = NP
IF (ICOORD.EQ.2) GOTO 15
SWITCH= 1 D
XP1 = SORT(X(N))
GE(N) = 1. D
DO 5 J=1, 51
YP(J) = XP1*ETA(J)
IF (YP(J).GT 1. D) GOTO 10

```

```

5 CONTINUE
  JJ = 51
  GOTO 15
10 JJ = J-1
15 IF (ITURB.EQ.1) GOTO 25
C   ПРОФИЛЬ СКОРОСТИ И КОЭФФИЦИЕНТЫ УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ
C   ДЛЯ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ
  DO 20 J=1, JJ
    YP(J) = XP1*ETA(J)
    RP = 1.0-YP(J)
    UP(J) = 2.0*(1.0-RP**2)
    A1(J,2) = RP
  20 A2(J,2) = UP(J)*RP
  GOTO 45
C   ПРОФИЛЬ СКОРОСТИ, ТУРБУЛЕНТНАЯ ВЯЗКОСТЬ И ТУРБУЛЕНТНОЕ
C   ЧИСЛО ПРАНДТЛЯ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ
25 CONTINUE
  F = 0.3164/(2.*REY)**0.25
  ALOGPR = ALOG10(PR)
  SUM = C(1)
  DO 30 I=2,5
30 SUM = SUM+C(I)*ALOGPR** (I-1)
  BPLUS = SUM/SQRT(PR)
  PRT = K/KH*BPLUS/APLUS
  UP(1) = 0.0
  CYOA = 0.5*REY/APLUS*SQRT(0.5*F)
  CYOB = CYOA*APLUS/BPLUS
  DO 40 J=1, JJ
    YP(J) = XP1*ETA(J)
    RP = 1.0-YP(J)
    YOA = YP(J)*CYOA
    YOB = YP(J)*CYOB
    EXPYOA = 0.0
    EXPYOB = 0.0
    IF (YOA.LT.50.0) EXPYOA = EXP(-YOA)
    IF (YOB.LT.50.0) EXPYOB = EXP(-YOB)
    CMIX = (0.14-RP**2*(0.08+0.06*RP**2))*(1.-EXPYOA)
    DUDY(J) = 0.25*REY*F*RP/(1.+SQRT(1.+0.5*F*RP*(REY*CMIX)**2))
    EDV(J) = CMIX**2*REY*DUDY(J)
    IF (J.EQ.1) GOTO 35
    UP(J) = UP(J-1)+0.5*(DUDY(J)+DUDY(J-1))*(YP(J)-YP(J-1))
    PRT = K/KH*(1.-EXPYOA)/(1.-EXPYOB)
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ
  35 A1(J,2) = RP*(1.0+PR/PRT*EDV(J))
    A2(J,2) = RP*UP(J)
  40 CONTINUE
  45 GW(N) = 0.0
    IF (IGWALL.EQ.1) GO TO 50
    GW(N) = 0.5*(1.0+COS(3.14159*(X(N)-X(1))/GWA))
    IF (X(N).LT.(X(1)+GWA)) GOTO 50
    GW(N) = 0.0
    IGWALL = 1
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ
50 DO 55 J=2, NP
  ETAB = 0.5*(ETA(J)+ETA(J-1))
  CGB = 0.5*(G(J,1)+G(J-1,1))
  CPB = 0.5*(P(J,1)+P(J-1,1))
  A2B = 0.5*(A2(J,2)+A2(J-1,2))
  CA2B = 0.5*(A2(J,1)+A2(J-1,1))
  DERA1P = (A1(J,1)*P(J,1)-A1(J-1,1)*P(J-1,1))/DETA(J-1)
  S1(J) = A1(J,2)/DETA(J-1)+0.25*ETAB*A2B*SWITCH
  S2(J) = -A1(J-1,2)/DETA(J-1)+0.25*ETAB*A2B*SWITCH
  S3(J) = -0.5*(CA2B+A2B)*CEL
  R1(J) = 2.0*S3(J)*CGB-DEA1P-0.5*CA2B*ETAB*CPB*SWITCH
55 R2(J-1) = 0.0
  RETURN
  END

```

Подпрограмма OUTPUT

Эта подпрограмма выдает на печать профили g , p , и по толщине сдвигового слоя. Она также позволяет вычислять безразмерную среднюю температуру перемешанной жидкости, определяемую уравнением (5.4), и число Нуссельта (см. уравнение (5.23)), которое следующим образом выражается через безразмерную температуру и ее градиент g'_w :

$$\text{Nu} = \frac{2g'_w}{g_m}. \quad (13.52)$$

(см. также уравнение (5.10)). В той части течения, где тепловые сдвиговые слои еще не успели слиться, безразмерная, осредненная по объему температура g_m вычисляется по уравнению (Р 5.8), а g'_w определяется по известному значению $(\partial g/\partial y)_w$. После слияния сдвиговых слоев указанные величины вычисляются по уравнениям (Р 5.9) и (Р 5.11) соответственно. Эта же подпрограмма позволяет определить, при каком значении x (обозначенном SW) происходит переход к физическим переменным. Это делается следующим образом: поскольку до слияния тепловых слоев используется преобразованная переменная η , значение которой на границе пограничного слоя η_e почти постоянно, можно записать

$$\eta_e = \frac{y_e}{\sqrt{\nu x/u_0}}.$$

Из этого выражения следует, что

$$\frac{x_{sw}}{r_0} < \frac{1}{\eta_e^2} \left(\frac{u_0 r_0}{\nu} \right).$$

Наконец, эта же подпрограмма допускает смещение профилей перед началом счета в следующем сечении по x .

```

SUBROUTINE OUTPUT
COMMON/BLCD/ NXT, IMBCOE, IEBCOE, ITURB, ICOORD, INDEX, N, NP, PR, VGP,
1  GMA, REV, CEL, ETA (51), UP (51), DELTA (51), A (51), YP (51),
2  X (101), GM (101), PM (101), GE (101), G (51, 2), P (51, 2)
COMMON/BLC1/ S1 (51), S2 (51), S3 (51), R1 (51), R2 (51), A1 (51, 2), A2 (51, 2)
C - - - - -
C  ВЫДАЧА НА ПЕЧАТЬ ПРОФИЛЯ БЕЗРАЗМЕРНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ
C  WRITE (6, 9100) (J, ETA (J), G (J, 2), P (J, 2), UP (J), YP (J), J=1, NP)
C  IF (N.EQ.1) GOTO 15
C  ВЫЧИСЛЕНИЕ И ВЫДАЧА НА ПЕЧАТЬ БЕЗРАЗМЕРНОЙ СРЕДНЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ
C  ПЕРЕМЕШАННОЙ ЖИДКОСТИ И ЧИСЛА НУССЕЛЬ
CNUX0 = 2.0 * P (1, 2)
C      = 0.0
C  IF (ICOORD.EQ.2) GOTO 5
C      = 1.0
CNUX0 = CNUX0 / SORT (X (N))

```

```

5 GMIX = 0.0
  F2 = 0.
  DO 10 J=2, NP
    F1 = F2
    F2 = 2. * (1. - YP(J)) * UP(J) * (G(J, 2) - C)
    GMIX = GMIX + 0.5 * (F1 + F2) * (YP(J) - YP(J-1))
10 CONTINUE
  GMIX = GMIX + C
  CNUXM = CNUX0 / GMIX
  WRITE (6, 9200) GMIX, CNUXM
15 IF (N.EQ.NXT) STOP
  IF (INDEX.EQ.1) GOTO 25
  N = N + 1
  IF (ICCOORD.EQ.2) GOTO 35
  XSWTCH = 1. / ETA(NP) ** 2
  IF (X(N) .LT. XSWTCH) GOTO 35
  DO 20 II=N, NXT
    I = NXT - II + N
    X(I+1) = X(I)
20 CONTINUE
  X(N) = XSWTCH
  NXT = NXT + 1
  INDEX = 1
  GOTO 35
C ПЕРЕХОД К ИСХОДНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ
25 SQX = SQRT(X(N))
  DO 30 J=1, 51
    ETA(J) = ETA(J) * SQX
    DELTA(J) = DELTA(J) * SQX
    P(J, 2) = P(J, 2) / SQX
    IF (J.EQ.1) GOTO 30
    A(J) = 0.5 * DELTA(J-1)
30 CONTINUE
  ICCOORD = 2
  IEBCOE = 0
  WRITE (6, 9300)
  WRITE (6, 9100) (J, ETA(J), G(J, 2), P(J, 2), UP(J), YP(J), J=1, NP)
  CALL COEF
  N = N + 1
  INDEX = 0
C СМЕЩЕНИЕ ПРОФИЛЕЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ В СЛЕДУЮЩЕМ СЕЧЕНИИ
35 DO 40 J=1, 51
  G(J, 1) = G(J, 2)
  P(J, 1) = P(J, 2)
  A1(J, 1) = A1(J, 2)
  A2(J, 1) = A2(J, 2)
40 CONTINUE
  RETURN
C - - - - -
9100 FORMAT (1H0, 2X, 1HJ, 3X, 3HETA, 1DX, 1HG, 13X, 1HP, 12X, 2HUP, 12X, 2HYP /
1 (1H , I3, F10.5, 4E14.6))
9200 FORMAT (1H0, 6HGMIX =, E14.6, 3X, 6HNUXM =, E14.6)
9300 FORMAT (1H0, 31H***** PRIMITIVE VARIABLES *****)
  END

```

Подпрограмма SOLV2

Эта подпрограмма позволяет решить систему линейных уравнений (13.36) и (13.38) методом матричной прогонки, который подробно рассмотрен в разд. 13.2. Принятые в ней обозначения близки к используемым в разд. 13.2.

```

SUBROUTINE SOLV2
COMMON/BLCD/ NXT, IWBCOE, IEBCOE, ITURB, ICOORD, INDEX, N, NP, PR, VGP,
1      GWA, REY, CEL, ETA(51), UP(51), DETA(51), A(51), YP(51),
2      X(101), GH(101), PH(101), GE(101), G(51,2), P(51,2)
COMMON/BLC1/ S1(51), S2(51), S3(51), R1(51), R2(51), A1(51,2), A2(51,2)
DIMENSION G11(51), G12(51), A11(51), A12(51), A21(51), A22(51), W1(51),
1      W2(51), DEN(51)
C - - - - -
      IF (IWBCOE.EQ.0) GOTO 10
C   ЗАДАНА ТЕМПЕРАТУРА СТЕНКИ
      ALFAD = 1.0
      ALFA1 = 0.0
      G(1,2) = GH(N)
      P(1,2) = 0.0
      GOTO 20
C   ЗАДАНА ПЛОТНОСТЬ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА НА СТЕНКЕ
10  ALFAD = 0.0
      ALFA1 = 1.0
      G(1,2) = 0.0
      P(1,2) = PH(N)
20  GAMMA0 = ALFAD*G(1,2) + ALFA1*P(1,2)
      R1(1) = GAMMA0
      IF (IEBCOE.EQ.0) GOTO 30
C   ЗАДАНА ТЕМПЕРАТУРА НА ГРАНИЦЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ
      BETA0 = 1.0
      BETA1 = 0.0
      G(NP,2) = GE(N)
      P(NP,2) = 0.0
      GOTO 40
C   ЗАДАН ГРАДИЕНТ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ГРАНИЦЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ
30  BETA0 = 0.0
      BETA1 = 1.0
      G(NP,2) = 0.0
      P(NP,2) = 0.0
40  GAMMA1 = BETA0*G(NP,2) + BETA1*P(NP,2)
      R2(NP) = GAMMA1
C   ЭЛЕМЕНТЫ W ДЛЯ J = 1
      W1(1) = R1(1)
      W2(1) = R2(1)
C   ЭЛЕМЕНТЫ ALFA ДЛЯ J = 1
      A11(1) = ALFAD
      A12(1) = ALFA1
      A21(1) = -1.0
      A22(1) = -0.5*DETA(1)
C   ЭЛЕМЕНТЫ GAMMA ДЛЯ J = 2
      DET = ALFA1 - 0.5*DETA(1)*ALFAD
      G11(2) = (S2(2) - 0.5*DETA(1)*S3(2))/DET
      G12(2) = (ALFAD*S2(2) - ALFA1*S3(2))/DET
C   ПРЯМОЙ ХОД
      DO 60 J=2, NP
      DEN(J) = A11(J-1)*A22(J-1) - A21(J-1)*A12(J-1)
      IF (J.EQ.2) GOTO 50
      G11(J) = (S3(J)*A22(J-1) - S2(J)*A21(J-1))/DEN(J)
      G12(J) = (S2(J)*A11(J-1) - S3(J)*A12(J-1))/DEN(J)
50  A11(J) = S3(J) - G12(J)
      A12(J) = S1(J) + A(J)*G12(J)
      A21(J) = -1.0
      A22(J) = -A(J+1)
      W1(J) = R1(J) - G11(J)*W1(J-1) - G12(J)*W2(J-1)
      W2(J) = R2(J)
60  CONTINUE
C   ОБРАТНЫЙ ХОД
      DENO = A11(NP)*BETA1 - A12(NP)*BETA0
      G(NP,2) = (W1(NP)*BETA1 - W2(NP)*A12(NP))/DENO
      P(NP,2) = (W2(NP)*A11(NP) - BETA0*W1(NP))/DENO
      J = NP

```

```

70 J      = J-1
E1       = W2(J) - G(J+1,2) * A(J+1) * P(J+1,2)
G(J,2) = (W1(J) * A22(J) - E1 * A12(J)) / DEN(J+1)
P(J,2) = (E1 * A11(J) - W1(J) * A21(J)) / DEN(J+1)
IF(J.GT.1) GOTO 70
RETURN
END
    
```

Пример вычислений

В качестве примера применения описанной программы рассмотрим ламинарное течение в трубе круглого сечения с постоянной температурой стенки. Расчет был выполнен при $\eta_e = 8$, $h_1 = 0,20$, $K = 1$ и $a = 2 \times 10^{-6}$ (см. уравнение (4.90)); число Нуссельта определялось по уравнению (5.23). Полученные результаты приведены в графе «Численный метод» табл. 13.2. Начальное безразмерное значение \hat{x} , обозначаемое через \hat{x}_0 , было принято равным 1×10^{-6} . В области, где g_w изменяется в соответствии с уравнением (4.90), число сечений по \hat{x} было принято равным 15.

Для указанного течения известно аналитическое решение, выпи-санное в рядах в работе [4], согласно которой локальное число Нуссельта определяется выражением

$$\text{Nu} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} G_n \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x^+}{\text{Pe}}\right)}{2 \sum_{n=0}^{\infty} (G_n / \lambda_n^2) \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x^+}{\text{Pe}}\right)}, \tag{13.53}$$

где $x^+ = x/r_0$. Значения постоянных G_n и собственные значения λ_n , входящие в уравнение (13.53), приведены в табл. 13.1.

Таблица 13.1. Значения функций, входящих в аналитическое решение в виде бесконечного ряда для ламинарного течения в трубе круглого сечения с постоянной температурой стенки

n	λ_n	G_n
0	2,704	0,749
1	6,680	0,544
2	10,668	0,463

Примечание. При $n > 2$, $\lambda_n = 4n + \frac{1}{2}$, а $G_n = 1,01276 \lambda_n^{-1/3}$.

Таблица 13.2. Значения числа Нуссельта, полученные численным и аналитическим методами для ламинарного течения в трубе с постоянной температурой стенки

x^+/Re	Nu	
	Численный метод	Аналитический метод
1×10^{-4}	28,3	28,2
5×10^{-4}	16,5	16,2
1×10^{-3}	12,9	12,8
4×10^{-3}	8,02	8,03
2×10^{-2}	4,92	4,92
6×10^{-2}	3,89	3,89
1×10^{-1}	3,71	3,71
3×10^{-1}	3,63	3,66
∞	3,63	3,66

В табл. 13.2 результаты численного решения сравниваются с аналитическим решением при разных значениях отношения x^+/Re . При сетке, содержащей 41 узел по толщине сдвигового слоя, описанная программа позволяет получить весьма точные результаты.

13.4. Решение уравнений неразрывности, движения и энергии для течений в пограничных слоях

В этом разделе для решения сопряженных уравнений неразрывности, движения и энергии для внешних течений используется схема «прямоугольник». В разд. 13.5 описана программа для решения этих уравнений, составленная на алгоритмическом языке Фортран. Как численный метод, так и программа для ЭВМ представлены таким образом, чтобы облегчить читателю их использование для решения других задач, в том числе и для расчета внутренних течений. Примеры таких решений приведены в гл. 14. При этом предполагается, что в случае турбулентных течений используется подходящая модель турбулентности, например понятие турбулентной вязкости.

Переход к конечно-разностным уравнениям

Описание численного метода решения уравнений пограничного слоя для плоских сопряженных ламинарных и турбулентных *внешних* течений начнем с преобразованных уравнений и граничных ус-

ловий, определяемых уравнениями (11.45), (11.46) и (11.49), при выводе которых используются понятия турбулентной вязкости и турбулентного числа Прандтля для турбулентных течений

$$(bf'')' + m_1 ff'' + m_2 [c - (f')^2] = x \left(f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (11.45)$$

$$(eS' + df'f'')' + m_1 fS' = x \left(f' \frac{\partial S}{\partial x} - S' \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (11.46)$$

$$\eta = 0, \quad f' = 0, \quad f = f_w(x), \quad S = S_w(x) \quad \text{или} \quad S' = S'_w(x), \quad (11.49a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad f' = 1, \quad S = 1. \quad (11.49b)$$

Хотя в этих уравнениях можно использовать разные модели турбулентности, вводя алгебраические выражения для турбулентной вязкости (или длины смешения) и турбулентного числа Прандтля, воспользуемся моделью Себиси — Смита, как и всюду в этой книге.

Сначала представим уравнения (11.45) и (11.46) и их граничные условия в виде системы уравнений первого порядка. Для этого введем новые независимые переменные $u(x, \eta)$, $v(x, \eta)$ и $p(x, \eta)$ и запишем преобразованные уравнения движения и энергии в виде

$$f' = u, \quad (13.54a)$$

$$u' = v, \quad (13.54b)$$

$$g' = p, \quad (13.54c)$$

$$(bv)' + m_1 fv + m_2 (c - u^2) = x \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (13.54d)$$

$$(ep + duv)' + m_1 fp = x \left(u \frac{\partial g}{\partial x} - p \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (13.54e)$$

где $g \equiv H/H_e$ — отношение полных энтальпий, которое в уравнении (11.46) было обозначено через S . В новых переменных граничные условия принимают вид

$$f(x, 0) = f_w(x), \quad u(x, 0) = 0, \quad (13.55a)$$

$$g(x, 0) = g_w(x) \quad \text{или} \quad p(x, 0) = p'_w(x) \quad (13.55a)$$

$$u(x, \eta_e) = 1, \quad g(x, \eta_e) = 1. \quad (13.55b)$$

Теперь вновь обратимся к конечно-разностной сетке в плоскости $x\eta$ (рис. 13.7) и рассмотрим узлы сетки, определяемые уравнениями (13.34). Так же как и в разд. 13.1 и 13.2, где использовалась схема «прямоугольник», конечно-разностные аналоги трех обыкновенных

дифференциальных уравнений первого порядка (13.54a)–(13.54c) запишем для центральной точки отрезка P_1P_2 с координатами $(\xi_n, \eta_{j-1/2})$ (рис. 13.7), а конечно-разностные аналоги двух дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных (13.54d) и (13.54e) (как и уравнения (13.21b) или (13.35b)) — для центра прямоугольника $P_1P_2P_3P_4$ с координатами $(\xi_{n-1/2}, \eta_{j-1/2})$. Тогда получим

$$h_j^{-1}(f_j^n - f_{j-1}^n) = u_{j-1/2}^n, \quad (13.56a)$$

$$h_j^{-1}(u_j^n - u_{j-1}^n) = v_{j-1/2}^n, \quad (13.56b)$$

$$h_j^{-1}(g_j^n - g_{j-1}^n) = p_{j-1/2}^n, \quad (13.56c)$$

$$h_j^{-1}(b_j^n v_j^n - b_{j-1}^n v_{j-1}^n) + (m_1^n + \alpha_n)(fv)_{j-1/2}^n - (m_2^n + \alpha_n)(u^2)_{j-1/2}^n + \\ + \alpha_n(v_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^n - f_{j-1/2}^{n-1} v_{j-1/2}^n) = R_{j-1/2}^{n-1}, \quad (13.56d)$$

$$h_j^{-1}(e_j^n p_j^n - e_{j-1}^n p_{j-1}^n) + h_j^{-1}(d_j^n u_j^n v_j^n - d_{j-1}^n u_{j-1}^n v_{j-1}^n) + \\ + (m_1^n + \alpha_n)(fp)_{j-1/2}^n - \\ - \alpha_n[(ug)_{j-1/2}^n + u_{j-1/2}^{n-1} g_{j-1/2}^n - g_{j-1/2}^{n-1} u_{j-1/2}^n + \\ + f_{j-1/2}^{n-1} p_{j-1/2}^n - p_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^n] = T_{j-1/2}^{n-1}, \quad (13.56e)$$

где

$$\alpha_n = \frac{x^{n-1/2}}{k_n}, \quad (13.57)$$

$$R_{j-1/2}^{n-1} = -L_{j-1/2}^{n-1} + \alpha_n[(fv)_{j-1/2}^{n-1} - (u^2)_{j-1/2}^{n-1}] - m_2^n c_{j-1/2}^n, \quad (13.58a)$$

$$L_{j-1/2}^{n-1} = \left\{ h_j^{-1}(b_j v_j - b_{j-1} v_{j-1}) + m_1 (fv)_{j-1/2} + \right. \\ \left. + m_2 [c_{j-1/2} - (u^2)_{j-1/2}] \right\}^{n-1}, \quad (13.58b)$$

$$T_{j-1/2}^{n-1} = -M_{j-1/2}^{n-1} + \alpha_n [(fp)_{j-1/2}^{n-1} - (ug)_{j-1/2}^{n-1}], \quad (13.59a)$$

$$M_{j-1/2}^{n-1} = \left[h_j^{-1}(e_j p_j - e_{j-1} p_{j-1}) + h_j^{-1}(d_j u_j v_j - d_{j-1} u_{j-1} v_{j-1}) + \right. \\ \left. + m_1 (fp)_{j-1/2} \right]^{n-1}. \quad (13.59b)$$

В разд. 13.2 в случае смешанных граничных условий на стенке для уравнения энергии было использовано уравнение (13.38a) и записа-

ны граничные условия на стенке для уравнений движения и энергии в виде

$$f_0^n = 0, \quad u_0^n = 0, \quad \alpha_0 g_0^n + \alpha_1 p_0^n = \gamma_0^n, \quad (13.60a)$$

а граничные условия на границе пограничного слоя — в виде

$$u_j^n = 1, \quad g_j^n = 1. \quad (13.60b)$$

Как и ранее, если задана температура стенки, полагаем $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$ и, поскольку отношение энтальпий на стенке $g_0(x)$ также задано, $\gamma_0 = g_0(x)$. Если задана плотность теплового потока на стенке, то полагаем $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, а величина γ_0 равна безразмерному градиенту полной энтальпии на стенке.

Метод Ньютона

Если предположить, что f_j^{n-1} , u_j^{n-1} , v_j^{n-1} , g_j^{n-1} и p_j^{n-1} известны при $0 \leq j \leq J$, то в отличие от примеров, рассмотренных в разд. 13.1 и 13.2, уравнения (13.56) и (13.60) образуют систему $5J + 5$ нелинейных уравнений, содержащих $5J + 5$ неизвестных (f_j^n , u_j^n , v_j^n , g_j^n , p_j^n), где $j = 0, 1, \dots, J$. Чтобы решить эту систему нелинейных уравнений, воспользуемся методом Ньютона. Введем переменные $f_j^{(i)}$, $u_j^{(i)}$, $v_j^{(i)}$, $g_j^{(i)}$, $p_j^{(i)}$ (где $i = 0, 1, 2, \dots$, номера итераций), а в качестве их начальных значений возьмем значения переменных в предыдущем сечении по x (обычно это наилучшие начальные значения, которые можно задать). Значения переменных при следующей итерации представим в виде

$$\begin{aligned} f_j^{(i+1)} &= f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)}, & u_j^{(i+1)} &= u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)}, \\ v_j^{(i+1)} &= v_j^{(i)} + \delta v_j^{(i)}, & g_j^{(i+1)} &= g_j^{(i)} + \delta g_j^{(i)}, \\ p_j^{(i+1)} &= p_j^{(i)} + \delta p_j^{(i)}. \end{aligned} \quad (13.61)$$

Затем правые части этих выражений подставим в уравнения (13.56) и (13.60) вместо f_j , u_j , v_j , g_j и p_j и отбросим члены, содержащие квадраты $\delta f_j^{(i)}$, $\delta u_j^{(i)}$, $\delta g_j^{(i)}$ и $\delta p_j^{(i)}$. В результате получим следующую линейную систему уравнений (верхний индекс i у величин, в выражения которых входит δ , для простоты отбросим):

$$\delta f_j - \delta f_{j-1} - \frac{h_j}{2} (\delta u_j + \delta u_{j-1}) = (r_1)_j, \quad (13.62a)$$

$$\delta u_j - \delta u_{j-1} - \frac{h_j}{2}(\delta v_j + \delta v_{j-1}) = (r_4)_{j-1}, \quad (13.62b)$$

$$\delta g_j - \delta g_{j-1} - \frac{h_j}{2}(\delta p_j + \delta p_{j-1}) = (r_5)_{j-1}, \quad (13.62c)$$

$$(s_1)_j \delta v_j + (s_2)_j \delta v_{j-1} + (s_3)_j \delta f_j + (s_4)_j \delta f_{j-1} + (s_5)_j \delta u_j + \\ + (s_6)_j \delta u_{j-1} + (s_7)_j \delta g_j + (s_8)_j \delta g_{j-1} = (r_2)_j, \quad (13.62d)$$

$$(\beta_1)_j \delta p_j + (\beta_2)_j \delta p_{j-1} + (\beta_3)_j \delta f_j + (\beta_4)_j \delta f_{j-1} + (\beta_5)_j \delta u_j + \\ + (\beta_6)_j \delta u_{j-1} + (\beta_7)_j \delta g_j + (\beta_8)_j \delta g_{j-1} + (\beta_9)_j \delta v_j + \\ + (\beta_{10})_j \delta v_{j-1} = (r_3)_j, \quad (13.62e)$$

где

$$(r_1)_j = f_{j-1}^{(i)} - f_j^{(i)} + h_j u_{j-1/2}^{(i)}, \quad (13.63a)$$

$$(r_4)_{j-1} = u_{j-1}^{(i)} - u_j^{(i)} + h_j v_{j-1/2}^{(i)}, \quad (13.63b)$$

$$(r_5)_{j-1} = g_{j-1}^{(i)} - g_j^{(i)} + h_j p_{j-1/2}^{(i)}, \quad (13.63c)$$

$$(r_2)_j = R_{j-1/2}^{n-1} - \left[h_j^{-1} (b_j^{(i)} v_j^{(i)} - b_{j-1}^{(i)} v_{j-1}^{(i)}) + (m_1^n + \alpha_n) (fv)_{j-1/2}^{(i)} - \right. \\ \left. - (m_2^n + \alpha_n) (u^2)_{j-1/2}^{(i)} + \alpha_n (v_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^{(i)} - f_{j-1/2}^{n-1} v_{j-1/2}^{(i)}) \right], \quad (13.63d)$$

$$(r_3)_j = T_{j-1/2}^{n-1} - \left\{ h_j^{-1} (e_j^{(i)} p_j^{(i)} - e_{j-1}^{(i)} p_{j-1}^{(i)}) + \right. \\ + h_j^{-1} (d_j^{(i)} u_j^{(i)} v_j^{(i)} - d_{j-1}^{(i)} u_{j-1}^{(i)} v_{j-1}^{(i)}) + \\ + (m_1^n + \alpha_n) (fp)_{j-1/2}^{(i)} - \\ \left. - \alpha_n [(ug)_{j-1/2}^{(i)} + u_{j-1/2}^{n-1} g_{j-1/2}^{(i)} - g_{j-1/2}^{n-1} u_{j-1/2}^{(i)} + \right. \\ \left. + f_{j-1/2}^{n-1} p_{j-1/2}^{(i)} - p_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^{(i)}] \right\}. \quad (13.63e)$$

Выписывая систему уравнений (13.62)—(13.63), мы расположили их в определенном порядке. Это было сделано для того, чтобы матрица A_0 в уравнении (13.29) не оказалась сингулярной. Наш порядок записи исключает такую возможность. Уравнения можно, конечно, расположить в любом другом порядке, лишь бы матрица A_0 не была сингулярной.

Коэффициенты, входящие в уравнение движения, имеют вид

$$(s_1)_j = h_j^{-1} b_j^{(i)} + \frac{m_1^n + \alpha_n}{2} f_j^{(i)} - \frac{\alpha_n}{2} f_{j-1/2}^{n-1}, \quad (13.64a)$$

$$(s_2)_j = -h_j^{-1} b_{j-1}^{(i)} + \frac{m_1^n + \alpha_n}{2} f_{j-1}^{(i)} - \frac{\alpha_n}{2} f_{j-1/2}^{n-1}, \quad (13.64b)$$

$$(s_3)_j = \frac{m_1^n + \alpha_n}{2} v_j^{(i)} + \frac{\alpha_n}{2} v_{j-1/2}^{n-1}, \quad (13.64c)$$

$$(s_4)_j = \frac{m_1^n + \alpha_n}{2} v_{j-1}^{(i)} + \frac{\alpha_n}{2} v_{j-1/2}^{n-1}, \quad (13.64d)$$

$$(s_5)_j = -(m_2^n + \alpha_n) u_j^{(i)}, \quad (13.64e)$$

$$(s_6)_j = -(m_2^n + \alpha_n) u_{j-1}^{(i)}, \quad (13.64f)$$

$$(s_7)_j = 0, \quad (13.64g)$$

$$(s_8)_j = 0. \quad (13.64h)$$

Два последних коэффициента в рассматриваемом случае равны нулю и включены лишь для сохранения общности, так как они потребуются позднее (разд. 14.1). Коэффициенты уравнения энергии имеют вид

$$(\beta_1)_j = h_j^{-1} e_j^{(i)} + \frac{m_1^n + \alpha_n}{2} f_j^{(i)} - \frac{\alpha_n}{2} f_{j-1/2}^{n-1}, \quad (13.65a)$$

$$(\beta_2)_j = -h_j^{-1} e_{j-1}^{(i)} + \frac{m_1^n + \alpha_n}{2} f_{j-1}^{(i)} - \frac{\alpha_n}{2} f_{j-1/2}^{n-1}, \quad (13.65b)$$

$$(\beta_3)_j = \frac{m_1^n + \alpha_n}{2} p_j^{(i)} + \frac{\alpha_n}{2} p_{j-1/2}^{n-1}, \quad (13.65c)$$

$$(\beta_4)_j = \frac{m_1^n + \alpha_n}{2} p_{j-1}^{(i)} + \frac{\alpha_n}{2} p_{j-1/2}^{n-1}, \quad (13.65d)$$

$$(\beta_5)_j = h_j^{-1} d_j^{(i)} v_j^{(i)} - \frac{\alpha_n}{2} (g_j^{(i)} - g_{j-1/2}^{n-1}), \quad (13.65e)$$

$$(\beta_6)_j = -h_j^{-1} d_{j-1}^{(i)} v_{j-1}^{(i)} - \frac{\alpha_n}{2} (g_{j-1}^{(i)} - g_{j-1/2}^{n-1}), \quad (13.65f)$$

$$(\beta_7)_j = -\frac{\alpha_n}{2} (u_j^{(i)} + u_{j-1/2}^{n-1}), \quad (13.65g)$$

$$(\beta_8)_j = -\frac{\alpha_n}{2} (u_{j-1}^{(i)} + u_{j-1/2}^{n-1}), \quad (13.65h)$$

$$(\beta_9)_j = h_j^{-1} d_j^{(i)} u_j^{(i)}, \quad (13.65i)$$

$$(\beta_{10})_j = -h_j^{-1} d_{j-1}^{(i)} u_{j-1}^{(i)}. \quad (13.65j)$$

Граничные условия (13.60) определяются выражениями

$$\delta f_0 = 0, \quad \delta u_0 = 0, \quad \alpha_0 \delta g_0 + \alpha_1 \delta p_0 = 0, \quad (13.66a)$$

$$\delta u_j = 0, \quad \delta g_j = 0, \quad (13.66b)$$

которые просто означают, что граничные условия в процессе итераций остаются постоянными.

Метод матричной прогонки

Запишем теперь полученную линейную систему уравнений (13.62) и (13.66) в векторно-матричной форме, определяемой уравнением (13.28), и применим метод матричной прогонки, рассмотренный в разд. 13.1 и 13.2 для случая решения двух уравнений первого порядка. Метод матричной прогонки является общим и может быть применен для решения систем любого числа уравнений первого порядка. Однако с ростом порядка системы объем алгебраических преобразований, необходимых для получения рекуррентных формул, быстро возрастает. Для системы пяти уравнений первого порядка, как в данном случае, число алгебраических преобразований находится еще в разумных пределах.

Алгоритм решения линейной системы уравнений (13.62) и (13.66), построенный с помощью этого метода, можно легко модифицировать и, как будет показано в гл. 14, приспособить для решения других линейных систем уравнений первого порядка с разными коэффициентами и граничными условиями.

Определим векторы δ_j и r_j , входящие в уравнение (13.28), для каждого значения j выражениями

$$\delta_j \equiv \begin{bmatrix} \delta f_j \\ \delta u_j \\ \delta v_j \\ \delta g_j \\ \delta p_j \end{bmatrix}, \quad 0 \leq j \leq J, \quad r_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (r_4)_1 \\ (r_5)_1 \end{bmatrix}, \quad (13.67a)$$

$$r_j \equiv \begin{bmatrix} (r_1)_j \\ (r_2)_j \\ (r_3)_j \\ (r_4)_j \\ (r_5)_j \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq J-1, \quad r_J \equiv \begin{bmatrix} (r_1)_J \\ (r_2)_J \\ (r_3)_J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (13.67b)$$

а матрицы A_j , B_j , C_j размерности 5×5 зададим в виде

$$\mathbf{A}_0 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ 0 & -1 & -\frac{h_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{h_1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_J \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\frac{h_J}{2} & 0 & 0 & 0 \\ (s_3)_J & (s_5)_J & (s_1)_J & (s_7)_J & 0 \\ (\beta_3)_J & (\beta_5)_J & (\beta_9)_J & (\beta_7)_J & (\beta_1)_J \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (13.68a)$$

$$\mathbf{A}_j \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\frac{h_j}{2} & 0 & 0 & 0 \\ (s_3)_j & (s_5)_j & (s_1)_j & (s_7)_j & 0 \\ (\beta_3)_j & (\beta_5)_j & (\beta_9)_j & (\beta_7)_j & (\beta_1)_j \\ 0 & -1 & -\frac{h_{j+1}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{h_{j+1}}{2} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq J-1,$$

(13.68b)

$$\mathbf{B}_j \equiv \begin{bmatrix} -1 & -\frac{h_j}{2} & 0 & 0 & 0 \\ (s_4)_j & (s_6)_j & (s_2)_j & (s_8)_j & 0 \\ (\beta_4)_j & (\beta_6)_j & (\beta_{10})_j & (\beta_8)_j & (\beta_2)_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq J,$$

(13.68c)

$$C_j \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{h_{j+1}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{h_{j+1}}{2} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq j \leq J-1. \quad (13.68d)$$

Тогда решение уравнения (13.28) можно получить двумя ходами прогонки, определяемыми уравнениями (13.31)—(13.33). Исключая алгебраические преобразования, эта процедура прямо ведет к цели. Ниже приводится текст соответствующей подпрограммы SOLV5.

```

SUBROUTINE SOLV 5
COMMON /INPT1/ HW(60),ALFAD,ALFA1
COMMON /BLCO/ NP,NPT,NX,NXT,NTR,IT
COMMON /GRD/ X(60),ETA(61),DETA(61),A(61)
COMMON /BLC1/ F(61,2),U(61,2),V(61,2),B(61,2),G(61,2),P(61,2),
1 C(61,2),D(61,2),E(61,2),RHU(61),BC(61)
COMMON /BLC3/ DELF(61),DELU(61),DELV(61),DELG(61),DELP(61)
COMMON/BLC6/ S1(61),S2(61),S3(61),S4(61),S5(61),S6(61),S7(61),
1 S8(61),B1(61),B2(61),B3(61),B4(61),B5(61),B6(61),
2 B7(61),B8(61),B9(61),B10(61),R(5,61)
DIMENSION A11(61),A12(61),A13(61),A14(61),A15(61),A21(61),
1 A22(61),A23(61),A24(61),A25(61),A31(61),A32(61),
2 A33(61),A34(61),A35(61),G11(61),G12(61),G13(61),
3 G14(61),G15(61),G21(61),G22(61),G23(61),G24(61),
4 G25(61),G31(61),G32(61),G33(61),G34(61),G35(61),
5 W1(61),W2(61),W3(61),W4(61),W5(61)
C - ЭЛЕМЕНТЫ ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ В СООТВЕТСТВИИ С УРАВНЕНИЕМ (13.68a)
A11(1)=1.0
A12(1)=0.0
A13(1)=0.0
A14(1)=0.0
A15(1)=0.0
A21(1)=0.0
A22(1)=1.0
A23(1)=0.0
A24(1)=0.0
A25(1)=0.0
A31(1)=0.0
A32(1)=0.0
A33(1)=0.0
A34(1)=ALFAD
A35(1)=ALFA1
C 0-ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРА W В СООТВЕТСТВИИ С УРАВНЕНИЕМ (13.32a)
W1(1)=R(1,1)
W2(1)=R(2,1)
W3(1)=R(3,1)
W4(1)=R(4,1)
W5(1)=R(5,1)
C - ПРЯМОЙ ХОД
C ОПРЕДЕЛЕНИЯ
DO 30 J=2,NP
AA1=A(J)*A24(J-1)-A25(J-1)
AA2=A(J)*A34(J-1)-A35(J-1)

```

```

AA3=A (J) *A12 (J-1) -A13 (J-1)
AA4=A (J) *A22 (J-1) -A23 (J-1)
AA5=A (J) *A32 (J-1) -A33 (J-1)
AA6=A (J) *A14 (J-1) -A15 (J-1)
AA7=A (J) *S6 (J) -S2 (J)
AA8=S8 (J) *A (J)
AA9=A (J) *B6 (J) -B10 (J)
AA10=A (J) *B8 (J) -B2 (J)
C ЭЛЕМЕНТЫ ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ В СООТВЕТСТВИИ С УРАВНЕНИЕМ (13.31b)
DET=A11 (J-1) * (AA4*AA2-AA1*AA5) -A21 (J-1) * (AA3*AA2-AA5*AA6) +
1 A31 (J-1) * (AA3*AA1-AA4*AA6)
G11 (J) = [ - (AA4*AA2-AA5*AA1) +A (J) **2 * (A21 (J-1) *AA2-A31 (J-1) *AA1) ] /
1 DET
G12 (J) = [ (AA3*AA2-AA5*AA6) -A (J) **2 * (A11 (J-1) *AA2-A31 (J-1) *AA6) ] /DET
G13 (J) = [ - (AA3*AA1-AA4*AA6) +A (J) **2 * (A11 (J-1) *AA1-A21 (J-1) *AA6) ] /
1 DET
G14 (J) =G11 (J) *A12 (J-1) +G12 (J) *A22 (J-1) +G13 (J) *A32 (J-1) +A (J)
G15 (J) =G11 (J) *A14 (J-1) +G12 (J) *A24 (J-1) +G13 (J) *A34 (J-1)
G21 (J) = [ S4 (J) * (AA2*AA4-AA1*AA5) +A31 (J-1) * (AA1*AA7-AA4*AA8) +
1 A21 (J-1) * (AA5*AA8-AA7*AA2) ] /DET
G22 (J) = [ A11 (J-1) * (AA2*AA7-AA5*AA8) +A31 (J-1) * (AA3*AA8-AA6*AA7) +
1 S4 (J) * (AA5*AA6-AA2*AA3) ] /DET
G23 (J) = [ A11 (J-1) * (AA4*AA8-AA1*AA7) +S4 (J) * (AA3*AA1-AA4*AA6) +
1 A21 (J-1) * (AA7*AA6-AA3*AA8) ] /DET
G24 (J) =G21 (J) *A12 (J-1) +G22 (J) *A22 (J-1) +G23 (J) *A32 (J-1) -S6 (J)
G25 (J) =G21 (J) *A14 (J-1) +G22 (J) *A24 (J-1) +G23 (J) *A34 (J-1) -S8 (J)
G31 (J) = [ B4 (J) * (AA4*AA2-AA5*AA1) -AA9 * (A21 (J-1) *AA2-A31 (J-1) *AA1) +
1 AA10 * (A21 (J-1) *AA5-A31 (J-1) *AA4) ] /DET
G32 (J) = [ -B4 (J) * (AA3*AA2-AA5*AA6) +AA9 * (A11 (J-1) *AA2-A31 (J-1) *AA6) -
1 AA10 * (A11 (J-1) *AA5-A31 (J-1) *AA3) ] /DET
G33 (J) = [ B4 (J) * (AA3*AA1-AA4*AA6) -AA9 * (A11 (J-1) *AA1-A21 (J-1) *AA6) +
1 AA10 * (A11 (J-1) *AA4-A21 (J-1) *AA3) ] /DET
G34 (J) =G31 (J) *A12 (J-1) +G32 (J) *A22 (J-1) +G33 (J) *A32 (J-1) -B6 (J)
G35 (J) =G31 (J) *A14 (J-1) +G32 (J) *A24 (J-1) +G33 (J) *A34 (J-1) -B8 (J)
C ЭЛЕМЕНТЫ ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ В СООТВЕТСТВИИ С УРАВНЕНИЕМ (13.31c)
A11 (J) =1.0
A12 (J) =-A (J) -G14 (J)
A13 (J) =A (J) *G14 (J)
A14 (J) =-G15 (J)
A15 (J) =A (J) *G15 (J)
A21 (J) =S3 (J)
A22 (J) =S5 (J) -G24 (J)
A23 (J) =S1 (J) +A (J) *G24 (J)
A24 (J) =-G25 (J) +S7 (J)
A25 (J) =A (J) *G25 (J)
A31 (J) =B3 (J)
A32 (J) =B5 (J) -G34 (J)
A33 (J) =B9 (J) +A (J) *G34 (J)
A34 (J) =B7 (J) -G35 (J)
A35 (J) =B1 (J) +A (J) *G35 (J)
C ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРА W В СООТВЕТСТВИИ С УРАВНЕНИЕМ (13.32b)
W1 (J) =R (1, J) -G11 (J) *W1 (J-1) -G12 (J) *W2 (J-1) -G13 (J) *W3 (J-1) -
1 G14 (J) *W4 (J-1) -G15 (J) *W5 (J-1)
W2 (J) =R (2, J) -G21 (J) *W1 (J-1) -G22 (J) *W2 (J-1) -G23 (J) *W3 (J-1) -
1 G24 (J) *W4 (J-1) -G25 (J) *W5 (J-1)
W3 (J) =R (3, J) -G31 (J) *W1 (J-1) -G32 (J) *W2 (J-1) -G33 (J) *W3 (J-1) -
1 G34 (J) *W4 (J-1) -G35 (J) *W5 (J-1)
W4 (J) =R (4, J)
W5 (J) =R (5, J)
30 CONTINUE
C - ОБРАТНЫЙ ХОД
J =NP
C ОПРЕДЕЛЕНИЯ
DP = - (A31 (J) * (A13 (J) *W2 (J) -W1 (J) *A23 (J)) -A32 (J) * (A11 (J) *
1 W2 (J) -W1 (J) *A21 (J)) + W3 (J) * (A11 (J) *A23 (J) -A13 (J) *A21 (J)))
DV = - (A31 (J) * (W1 (J) *A25 (J) -W2 (J) *A15 (J)) -W3 (J) * (A11 (J) *A25 (J)
1 -A15 (J) *A21 (J)) +A35 (J) * (A11 (J) *W2 (J) -W1 (J) *A21 (J)))
DF = - (W3 (J) * (A13 (J) *A25 (J) -A23 (J) *A15 (J)) -A33 (J) * (W1 (J) *A25 (J)

```

```

1 -A15(J)*W2(J) + A35(J)*(W1(J)*A23(J)-A13(J)*W2(J))
D1 = -(A31(J)*(A13(J)*A25(J)-A23(J)*A15(J))-A33(J)*(A11(J)*
1 A25(J)-A21(J)*A15(J))+A35(J)*(A11(J)*A23(J)-A21(J)*A13(J)))
C ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРА DELTA ДЛЯ J = NP В СООТВЕТСТВИИ С УРАВНЕНИЕМ (13.33a)
DELP(J) = DP/D1
DELV(J) = DV/D1
DELF(J) = DF/D1
DELG(J) = 0.0
DELU(J) = 0.0
40 J = J-1
C ОПРЕДЕЛЕНИЯ
BB1=DELU(J+1)-A(J+1)*DELV(J+1)-W4(J)
BB2=DELG(J+1)-A(J+1)*DELP(J+1)-W5(J)
CC1=W1(J)-A12(J)*BB1-A14(J)*BB2
CC2=W2(J)-A22(J)*BB1-A24(J)*BB2
CC3=W3(J)-A32(J)*BB1-A34(J)*BB2
DD1=A13(J)-A12(J)*A(J+1)
DD2=A23(J)-A22(J)*A(J+1)
DD3=A33(J)-A32(J)*A(J+1)
EE1=A15(J)-A14(J)*A(J+1)
EE2=A25(J)-A24(J)*A(J+1)
EE3=A35(J)-A34(J)*A(J+1)
DETT=A11(J)*DD2*EE3+A21(J)*DD3*EE1+A31(J)*DD1*EE2
1 -A31(J)*DD2*EE1-A21(J)*DD1*EE3-A11(J)*DD3*EE2
C ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРА DELTA В СООТВЕТСТВИИ С УРАВНЕНИЕМ (13.33b)
DELF(J) = (CC1*DD2*EE3+CC2*DD3*EE1+CC3*DD1*EE2-CC3*DD2*EE1
1 -CC2*DD1*EE3-CC1*DD3*EE2)/DETT
DELV(J) = (A11(J)*CC2*EE3+A21(J)*CC3*EE1+A31(J)*CC1*EE2-
1 A31(J)*CC2*EE1-A21(J)*CC1*EE3-A11(J)*CC3*EE2)/DETT
DELP(J) = (A11(J)*CC3*DD2+A21(J)*CC1*DD3+A31(J)*CC2*DD1-
1 A31(J)*CC1*DD2-A21(J)*CC3*DD1-A11(J)*CC2*DD3)/DETT
DELU(J) = BB1-A(J+1)*DELV(J)
DELG(J) = BB2-A(J+1)*DELP(J)
IF(J.GT.1) GO TO 40
C НОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ F, U, V, G, P В СООТВЕТСТВИИ С УРАВНЕНИЯМИ (13.61)
DO 50 J=1,NP
F(J,2)=F(J,2)+DELF(J)
U(J,2)=U(J,2)+DELU(J)
V(J,2)=V(J,2)+DELV(J)
G(J,2)=G(J,2)+DELG(J)
P(J,2)=P(J,2)+DELP(J)
50 CONTINUE
U(1,2) = 0.0
RETURN
END

```

13.5. Программа на языке Фортран для расчета течений в сопряженных пограничных слоях

В этом разделе описывается составленная на языке Фортран программа решения сопряженных уравнений неразрывности, движения и энергии для плоских ламинарных и турбулентных пограничных слоев численным методом, рассмотренным в предыдущем разделе. При составлении программы использована версия языка Фортран IV для ЭВМ IBM 370/165, однако она лишена таких присущих этой ЭВМ программных особенностей, как А-форматы, и может быть использована для решения других обыкновенных дифференци-

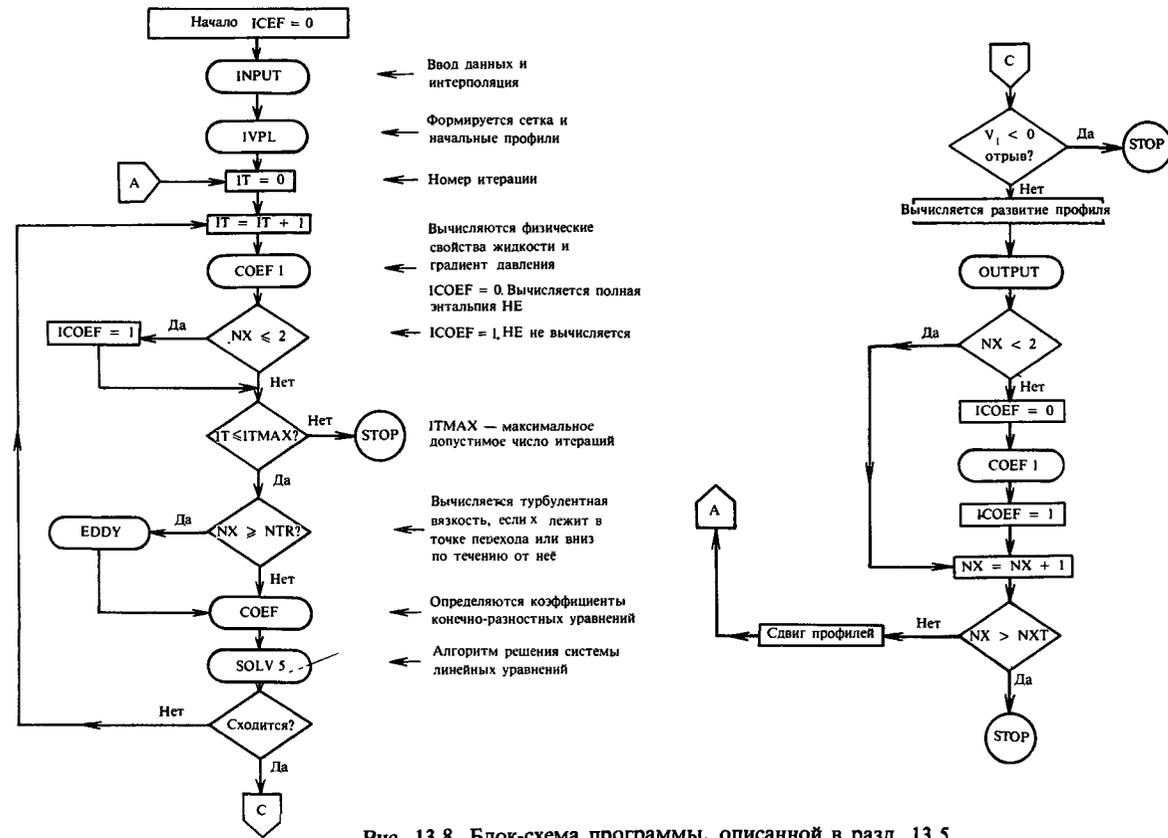


Рис. 13.8. Блок-схема программы, описанной в разд. 13.5.

альных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных пятого порядка, которые рассматриваются в гл. 14.

Программа состоит из основной программы MAIN, содержащей общую логику вычислений, и подпрограмм INPUT, IVPL, EDDY, COEF, OUTPUT и SOLV5. Ниже дано описание всех этих подпрограмм, кроме SOLV5, которая описана в предыдущем разделе.

Используемые в программе наименования символов, за исключением особо оговоренных случаев, соответствуют обозначениям, используемым в тексте. Блок-схема программы представлена на рис. 13.8.

Программа MAIN

Эта программа позволяет определить общую логику вычислений, сформировать систему координат, одна из осей которой перпендикулярна направлению течения, вычислить значения физических характеристик сплошной среды и учесть рост толщины пограничного слоя. Кроме того, она позволяет проверить сходимость итераций, используя в качестве критерия сходимости параметр напряжений сдвига на стенке v_0 . Для ламинарных течений счет прекращается при выполнении условия

$$|\delta v_0^{(i)}| < 10^{-5}, \quad (13.69)$$

которое обеспечивает примерно четыре верных знака для большинства вычисляемых величин. Если в процессе итераций величина v_0 становится отрицательной, счет прекращается. Для турбулентных течений условие (13.69) выражается в процентах и записывается в виде

$$\left| \frac{\delta v_0^{(i)}}{v_0 + \delta v_0^{(i)}/2} \right| < 0,02. \quad (13.70)$$

Сетка, на которой ведется счет внутри слоя, идентична описанной в разд. 13.3; в случае ламинарных течений типичные значения h_1 и K равны соответственно 0,2 и 1, а в случае турбулентных течений — 0,01 и 1,14.

Параметры μ , c , C , b , e и d , входящие в уравнения движения и энергии, являются функциями статической температуры. В данной программе c , C , b , e и d для ламинарных течений определяются уравнением (10.7), а для турбулентных течений — уравнением (11.47). Коэффициент динамической вязкости μ вычисляется по фор-

муле Сазерленда (уравнение (1.4а)) после того, как из уравнения энергии будет найдено отношение полных энтальпий g .

Для большинства ламинарных пограничных слоев преобразованная толщина пограничного слоя $\eta_e(x)$ почти постоянна. Уже при $\eta_e = 8$ скорость течения в пограничном слое становится равной 0,9999 ее значения во внешнем потоке. Однако в случае турбулентных пограничных слоев $\eta_e(x)$ обычно возрастает с ростом x . Чтобы выбрать приближенное значение $\eta_e(x)$, во всех случаях требуется выполнение неравенства $\eta_e(x_n) \geq \eta_e(x_{n-1})$. Поэтому в программе MAIN после завершения вычислений при $x = x_n$ (для любого $n \geq 1$) делается проверка, чтобы убедиться, что $|v_j^n| \leq \varepsilon_v$, где $\eta_j = \eta_e(x_n)$, а ε_v равно, например, 10^{-3} . Если проверка дает положительный результат, то полагают $\eta_e(x_{n+1}) = \eta_e(x_n)$. В противном случае полагают $J_{\text{нов}} = J_{\text{стар}} + t$, где t — число добавленных точек, например $t = 3$. В этом случае также задаются значения $f_j^n, u_j^n, v_j^n, g_j^n, p_j^n, b_j^n$ и e_j^n для новых η_j точек. Примем следующие значения: $u_j = 1, g_j = 1, v_j^n = v_j^n, p_j^n = p_j^n, c_j^n = c_j^n, d_j^n = d_j^n, e_j^n = e_j^n, \mu_j^n = \mu_j^n, C_j^n = C_j^n, f_j^n = (\eta_j - \eta_e) u_j^n + f_j^n$. То же самое делают для тех же параметров в предыдущем сечении ($n - 1$).

Фортран	Символ
ITMAX	Число итераций
CEL, PIP, P2P	$\alpha_n, m_1^n + \alpha_n, m_2^n + \alpha_n$, соответственно
DELV(1)	δv_0
NP	J

```

C      MAIN
COMMON /INPT2/ ETAE, VGP
COMMON /BLCD/ NP, NPT, NX, NXT, NTR, IT
COMMON /AK1/ RMUI, TI, RMI, UI, PR, HE
COMMON /GRD/ X(60), ETA(61), DELTA(61), A(61)
COMMON /BLC3/ DELF(61), DELU(61), DELV(61), DELG(61), DELP(61)
COMMON /BLC1/ F(61,2), U(61,2), V(61,2), B(61,2), G(61,2), P(61,2),
1      C(61,2), D(61,2), E(61,2), RMU(61), BC(61)
COMMON /EDGE/ UE(60), TE(60), RHOE(60), RHUE(60), PE(60), P1(60), P2(60)
C
C -----
C
C      NPT = 61
C      ITMAX = 6
C      NX = 1
C      CALL INPUT
C
C      ФОРМИРОВАНИЕ СЕТКИ
C      IF ((VGP-1.0) .LE. 0.001) GO TO 5
C      NP = ALOG ((ETAE/DELTA(1)) * (VGP-1.0) + 1.0) / ALOG(VGP) + 1.0001
C      GO TO 10
5 NP = ETAE/DELTA(1) + 1.0001
    
```

```

10 IF(NP .LE. 61) GO TO 15
WRITE(6,9000)
STOP
15 ETA(1) = 0.0
DO 20 J=2,NPT
DETA(J) = VGP*DETA(J-1)
A(J) = 0.5*DETA(J-1)
20 ETA(J) = ETA(J-1)*DETA(J-1)
CALL IVPL
C
30 WRITE(6,9100) NX, X(NX)
IT = 0
40 IT = IT+1
C
C СВОЙСТВА ЖИДКОСТИ
DO 50 J=1,NP
T = (HE*G(J,2) - 0.5*(UE(NX)*U(J,2))**2)/1004.3
RMU(J) = 1.45E-6*(T**1.5)/(T + 110.33)
C(J,2) = T/TE(NX)
BC(J) = RMU(J)/RMUE(NX)/C(J,2)
D(J,2) = BC(J)*(UE(NX)**2)*(1.0 - 1.0/PR)/HE
C
IF(NX .GE. NTR) GO TO 50
B(J,2) = BC(J)
E(J,2) = BC(J)/PR
50 CONTINUE
IF(IT .LE. ITMAX) GO TO 60
WRITE(6,2500)
STOP
C
60 IF(NX .GE. NTR) CALL EDDY
CALL COEF
CALL SOLVS
WRITE(6,3000) V(1,2), DELV(1)
C
C ПРОВЕРКА СХОДИМОСТИ
IF(NX .GE. NTR) GO TO 80
C ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ
IF(ABS(DELV(1)) .GT. 1.0E-05) GO TO 40
GO TO 100
C ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ
80 IF(ABS(DELV(1)/(V(1,2)+0.5*DELV(1))) .GT. 0.02) GO TO 40
C
C ПРОВЕРКА РОСТА ТОЛЩИНЫ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ
100 IF(V(1,2) .LT. 0.0) STOP
IF(NP .EQ. NPT) GO TO 120
IF(ABS(V(NP,2)) .LE. 1.0E-03) GO TO 120
NPO = NP
NP1 = NP+1
NP = NP+1
IF(NP .GT. NPT) NP = NPT
C
C ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОФИЛЕЙ ДЛЯ НОВОГО NP
DO 110 L=1,2
DO 110 J=NP1,NP
F(J,L) = F(NPO,L) + ETA(J) - ETA(NPO)
U(J,L) = 1.0
V(J,L) = V(NPO,L)
B(J,L) = B(NPO,L)
G(J,L) = G(NPO,L)
P(J,L) = P(NPO,L)
C(J,L) = C(NPO,L)
D(J,L) = D(NPO,L)
E(J,L) = E(NPO,L)
110 CONTINUE
IT = 0
GO TO 40

```

```

120 CALL OUTPUT
   GO TO 30
C -----
2500 FORMAT (1H0,16X,25HITERATIONS EXCEEDED ITMAX)
3000 FORMAT (1H ,8HV (WALL) =,E13.6,1X,6HDELV =,E13.6)
9000 FORMAT (1H0,' NP EXCEEDED NPT -- PROGRAM TERMINATED')
9100 FORMAT (1H0,4HNX =,I3,5X,3NX =,F10.3)
   END
    
```

Подпрограмма INPUT

Эта подпрограмма определяет граничные условия на стенке для уравнения энергии, общее число сечений по оси x (NXT), положение точки перехода (NTR), безразмерный градиент давления m_2 в первом по x сечении P 2(1) и параметры переменной сетки h_1 и K . Кроме того, задаются параметры набегающего потока $M_\infty, T_\infty, p_\infty$ (RMI, TI, PI соответственно) и молекулярное число Прандтля Pr; задается также u_e/u_∞ в зависимости от расстояния вдоль поверхности x . Во всех сечениях, кроме первого, безразмерные градиенты давления m_1, m_2 вычисляются. Производную du/dx получают с помощью трехточечных интерполяционных формул Лагранжа, которые для всех сечений, кроме первого и последнего, определяются выражениями

$$\left(\frac{du_e}{dx}\right)_n = -\frac{u_e^{n-1}}{A_1}(x_{n+1} - x_n) + \frac{u_e^n}{A_2}(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + \frac{u_e^{n+1}}{A_3}(x_n - x_{n-1}), \quad (13.71)$$

где

$$A_1 = (x_n - x_{n-1})(x_{n+1} - x_{n-1}),$$

$$A_2 = (x_n - x_{n-1})(x_{n+1} - x_n),$$

$$A_3 = (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n-1}).$$

В конечной точке $n = N$ производная du_e/dx определяется выражением

$$\left(\frac{du_e}{dx}\right)_N = \frac{u_e^{N-2}}{A_1}(x_N - x_{N-1}) - \frac{u_e^{N-1}}{A_2}(x_N - x_{N-2}) + \frac{u_e^N}{A_3}(2x_N - x_{N-2} - x_{N-1}), \quad (13.72)$$

в котором теперь

$$A_1 = (x_{N-1} - x_{N-2})(x_N - x_{N-2}),$$

$$A_2 = (x_{N-1} - x_{N-2})(x_N - x_{N-1}),$$

$$A_3 = (x_N - x_{N-1})(x_N - x_{N-2}).$$

Для воздуха значения μ_∞ , u_∞ , ρ_∞ и H_e вычисляются по формулам

$$\mu_\infty = 1,45 \times 10^{-6} \frac{T_\infty^{3/2}}{T_\infty + 110} \quad \text{кг/(м·с)}, \quad (13.73a)$$

$$u_\infty = 20,04 M_\infty \sqrt{T_\infty} \quad \text{м/с}, \quad (13.73b)$$

$$\rho_\infty = \frac{P_\infty}{287 T_\infty} \quad \text{кг/м}^3, \quad (13.73c)$$

$$H_e = 1004 T_\infty + \frac{1}{2} u_\infty^2 \quad \text{м}^2/\text{с}^2, \quad (13.73d)$$

где температура выражена в кельвинах.

Значения T_e и p_e на границе пограничного слоя вычисляются по формулам

$$\frac{T_e}{T_\infty} = 1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left[\left(\frac{u_e}{u_\infty} \right)^2 - 1 \right], \quad (13.74a)$$

$$\frac{p_e}{p_\infty} = \left(\frac{T_e}{T_\infty} \right)^{\gamma/\gamma-1} \quad (13.74b)$$

Значения μ и ρ на границе пограничного слоя вычисляются по формулам (13.73), в которые подставляются значения температуры и давления для границы пограничного слоя.

Уравнение энергии можно решать либо для заданной температуры стенки, полагая $\alpha_0 = \text{ALFA0} = 1,0$, $\alpha_1 = \text{ALFA1} = 0,0$, либо для заданной плотности теплового потока, полагая $\alpha_0 = 0,0$, $\alpha_1 = 1,0$. Кроме того, необходимо считать с ленты (диска) и ввести безразмерную температуру стенки g_w или безразмерный градиент температуры p_w посредством WW (I). Отметим, что значения UE (I) вводятся в размерной форме (м/с).

```

SUBROUTINE INPUT
COMMON /INPT2/ ETAE, VGP
COMMON /AK1/ RMUI, TI, RMI, UI, PR, HE
COMMON /INPT1/ WW(60), ALFAD, ALFA1
COMMON /BLCD/ NP, NPT, NX, NXT, NTR, IT
COMMON /GRD/ X(60), ETA(61), DELTA(61), A(61)
COMMON /EDGE/ UE(60), TE(60), RHOE(60), RMUE(60), PE(60), P1(60), P2(60)
C - - - - -
C ALFAD = 1.0 , ALFA1 = 0.0 ЗАДАНА ТЕМПЕРАТУРА СТЕНКИ
C ALFAD = 0.0 , ALFA1 = 1.0 ЗАДАНА ПЛОТНОСТЬ ТЕПЛОГО ПОТОКА
C WW ЛИБО G(1,2) ПРИ ЗАДАНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ СТЕНКИ

```

```

C      -ЛИБО P(1,2) ПРИ ЗАДАННОЙ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА
      ETAE = 8.0
      READ(5,8000) NXT,NTR,P2(1),DETA(1),VGP
      READ(5,8100) RMI,TI,PI,PR,ALFA0,ALFA1
      READ(5,8200) (X(I),UE(I),WH(I),I=1,NXT)
      WRITE(6,9010)
C      УСЛОВИЯ В НАБЕГАЮЩЕМ ПОТОКЕ
      RMUI = 1.45E-6*(TI**1.5)/(TI+110.33)
      UI = 20.04*RMI*SQRT(TI)
      RHOI = PI/TI/287.0
      HE = 1004.3*TI + 0.5*UI**2
      WRITE(6,9100) RMI,TI,PI,UI,RHOI,HE
C      УСЛОВИЯ НА ГРАНИЦЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ
      DO 20 I=1,NXT
      UE(I) = UE(I)/UI
      TE(I) = TI*(1.0 - 0.2*(RMI**2))*(UE(I)**2 - 1.0)
      RMUE(I) = 1.45E-6*(TE(I)**1.5)/(TE(I)+110.33)
      PE(I) = PI*(TE(I)/TI)**3.5
      RHOE(I) = PE(I)/(287.0*TE(I))
      UE(I) = UI*UE(I)
20 CONTINUE
C      ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРА ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ P = P2
      P1(1) = 0.5*(P2(1) + 1.0)
      DO 80 I=2,NXT
      IF(I EQ. NXT) GO TO 60
      A1 = (X(I)-X(I-1))*(X(I+1)-X(I-1))
      A2 = (X(I)-X(I-1))*(X(I+1)-X(I))
      A3 = (X(I+1)-X(I))*(X(I+1)-X(I-1))
      DUDS = -(X(I+1)-X(I))/A1*UE(I-1) + (X(I+1)-2.0*X(I)+X(I-1))/
1      A2*UE(I) + (X(I)-X(I-1))/A3*UE(I+1)
      GO TO 70
60 A1 = (X(I-1)-X(I-2))*(X(I)-X(I-2))
      A2 = (X(I-1)-X(I-2))*(X(I)-X(I-1))
      A3 = (X(I)-X(I-1))*(X(I)-X(I-2))
      DUDS = (X(I)-X(I-1))/A1*UE(I-2) - (X(I)-X(I-2))/A2*UE(I-1) +
1      (2.0*X(I)-X(I-2)-X(I-1))/A3*UE(I)
70 P2(I) = X(I)/UE(I)*DUDS
      P1(I) = 0.5*(1.0 + P2(I) + X(I)*(RHOE(I)*RMUE(I) - RHOE(I-1)*
1      RMUE(I-1))/(X(I)-X(I-1))/RHOE(I)/RMUE(I))
80 CONTINUE
      WRITE(6,9200) (I,UE(I),TE(I),RHOE(I),RMUE(I),P1(I),P2(I),I=1,NXT)
      WRITE(6,9300)
      RETURN
C      -----
8000 FORMAT(2I3,3F10.0)
8100 FORMAT(8F10.0)
8200 FORMAT(3F10.0)
9000 FORMAT(1H0,6HNXT =,I3,14X,6HNTR =,I3/1H,6HDETA1=,E14.6,3X,
1      6HVGP =,E14.6,3X,3HPR=,F7.3)
9010 FORMAT(1H0,30X,'INPUT DATA'///)
9100 FORMAT(1H0,'MACH NO =',E12.5,3X,'T INF. =',E12.5,3X,'PI =',
1      E12.5,/1H0,'UI =',E12.5,3X,'RHOI =',E12.5,3X,'HE =',
2      E12.5)
9300 FORMAT(1H0,30X,'OUTPUT DATA'///)
9200 FORMAT(1H0,2HNX,8X,2HUE,13X,2HTE,12X,4HRHOE,11X,4HRMUE,12X,2HP1,
1      13X,2HP2/(1H,I2,6E15.5))
      END

```

Подпрограмма IVPL

Эта подпрограмма используется для вычисления начальных профилей скорости для автомодельных ламинарных течений сжимаемой жидкости. Однако сначала расчеты выполняются для автомодельного течения несжимаемой жидкости, чтобы путем итера-

ций получить более близкие к действительным профили скорости для сжимаемого течения. Отношение полных безразмерных энтальпий g_j полагается равным единице, а его производная p_j — равной нулю. Для вычисления начальных профилей f_j , u_j и v_j используется профиль скорости, определяемый уравнением (4.59), с помощью которого получаем выражения

$$f_j = \frac{\eta_e}{4} \left(\frac{\eta_j}{\eta_e} \right)^2 \left[3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\eta_j}{\eta_e} \right)^2 \right],$$

$$u_j = \frac{3}{2} \frac{\eta_j}{\eta_e} - \frac{1}{2} \left(\frac{\eta_j}{\eta_e} \right)^3,$$

$$v_j = \frac{3}{2} \frac{1}{\eta_e} \left[1 - \left(\frac{\eta_j}{\eta_e} \right)^2 \right].$$

Расчет турбулентного течения также можно начать с составления отдельной подпрограммы для начальных профилей скорости и температуры. Подробнее об этом см. книгу Брэдшоу и др. [5].

```

SUBROUTINE IVPL
COMMON /AK1/ RMUI, TI, RMI, UI, PR, HE
COMMON /BLCO/ NP, NPT, NX, NXT, NTR, IT
COMMON /GRD/ X(60), ETA(61), DELTA(61), A(61)
COMMON /BLC1/ F(61,2), U(61,2), V(61,2), B(61,2), G(61,2), P(61,2),
1 C(61,2), D(61,2), E(61,2), RMU(61), BC(61)
COMMON /BLC3/ DELF(61), DELU(61), DELV(61), DELG(61), DELP(61)
C - - - - -
C ФОРМИРОВАНИЕ НАЧАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ ПУТЕМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ
C ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ
ETA NP0= 0.25*ETA(NP)
ETAU15= 1.5/ETA(NP)
DO 30 J=1, NP
ETAB = ETA(J)/ETA(NP)
ETAB2 = ETAB**2
F(J,2) = ETANP0*ETAB2*(3.0-D.5*ETAB2)
U(J,2) = 0.5*ETAB*(3.0-ETAB2)
V(J,2) = ETAU15*(1.0-ETAB2)
G(J,2) = ETAB
P(J,2) = 1.0/ETA(NP)
B(J,2) = 1.0
C(J,2) = 1.0
E(J,2) = 1.0/PR
D(J,2) = 0.0
30 CONTINUE
IT = 0
50 IT = IT + 1
IF(IT .LE. 8) GO TO 70
WRITE(6,9900)
STOP
70 CONTINUE
CALL COEF
CALL SOLV5
IF(ABS(DELV(1)) .GT. 1.0E-05) GO TO 50
RETURN
C - - - - -
9900 FORMAT(1H0, 'INCOMPRESSIBLE DID NOT CONVERGE')
END

```

Подпрограмма EDDY

Эта подпрограмма содержит формулы, используемые в модели турбулентной вязкости Себиси — Смита. Для простоты влияние малых чисел Рейнольдса и массообмена в этих формулах не учитывается. При необходимости и то и другое может быть учтено. Обозначив индексом i значения величин для внутренней области, а индексом o для внешней, представим формулы для турбулентной вязкости в виде

$$(\epsilon_m)_i = L^2 \frac{\partial u}{\partial y} \gamma_{tr} \gamma, \quad (\epsilon_m)_i \leq (\epsilon_m)_o, \quad (13.75a)$$

$$(\epsilon_m)_o = 0,0168 \int_0^\infty (u_e - u) dy \gamma_{tr} \gamma, \quad (\epsilon_m)_o \geq (\epsilon_m)_i, \quad (13.75b)$$

где

$$L = 0,4y \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{A}\right) \right], \quad A = 26 \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)^{1/2} \frac{v_e}{N} u_\tau^{-1},$$

$$N^2 = 1 - 11,8 \frac{\mu_w}{\mu_e} \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^2 p^+, \quad u_\tau = \left(\frac{\tau_w}{\rho_w} \right)^{1/2}, \quad p^+ = \frac{v_e u_e}{u_\tau^3} \frac{du_e}{dx} \quad (13.76)$$

$$\gamma_{tr} = 1 - \exp\left[-G_{tr}(x - x_{tr}) \int_{x_{tr}}^x \frac{dx}{u_e} \right], \quad \gamma = \left[1 + 5,5 \left(\frac{y}{\delta} \right)^6 \right]^{-1},$$

$$G_{tr} = 8,33 \times 10^{-4} \frac{u_e^3}{v_e^2} (R_x)^{-1,34}, \quad R_x = \frac{u_e x}{v_e}.$$

В преобразованных переменных эти формулы с учетом, что $v = f''$, принимают вид

$$(\epsilon_m^+)_i = \frac{0,16}{c^2} \frac{\mu_e}{\mu} \sqrt{R_x} I^2 v^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{A}\right) \right]^2 \gamma_{tr} \gamma, \quad (13.77a)$$

$$(\epsilon_m^+)_o = \frac{0,0168}{c} \frac{\mu_e}{\mu} \sqrt{R_x} \left[\int_0^{\eta_e} c(1-u) d\eta \right] \gamma_{tr} \gamma, \quad (13.77b)$$

где при $\epsilon_m^+ = \epsilon_m / \nu$,

$$I = \int_0^\eta c d\eta, \quad \frac{y}{A} = \frac{N}{26} c^{-3/2} \frac{C_w}{C} R_x^{1/4} I v_w^{1/2},$$

$$N^2 = 1 - 11,8 \frac{\mu_w}{\mu_e} C_w^2 p^+, \quad p^+ = \frac{m_2}{R_x^{1/4}} \left(\frac{\mu_e}{\mu_w} \right)^{3/2} \frac{1}{v_w^{3/2}}.$$

```

SUBROUTINE EDDY
COMMON /OTPT1/ RX, CNUE
COMMON /AK1/ RMUI, TI, RMI, UI, PR, HE
COMMON /BLCO/ NP, NPT, NX, NXT, NTR, IT
COMMON /GRD/ X(60), ETA(61), DELTA(61), A(61)
COMMON /BLC1/ F(61,2), U(61,2), V(61,2), B(61,2), G(61,2), P(61,2),
1 C(61,2), D(61,2), E(61,2), RMU(61), BC(61)
COMMON /EDGE/ UE(60), TE(60), RHOE(60), RMUE(60), PE(60), P1(60), P2(60)
DATA ITRN, PRT/D, 0.9/
C -----
IED = 0
IF (NX .NE. NTR) GO TO 5
RXNTR = UE(NTR-1)*X(NTR-1)*RHOE(NTR-1)/RMUE(NTR-1)
GG = 8.33E-4*UE(NTR-1)**3/(CNUE**2*(RXNTR**1.34))
5 IF (IT .GT. 1) GO TO 3D
IF (ITRN .EQ. 1) GO TO 3D
C ВЫЧИСЛЕНИЕ ГАММА-ПЕРЕХОДА
UEING = 0.0
U1 = 1.0/UE(NTR-1)
DO 10 I=NTR, NX
U2 = 1.0/UE(I)
UEING = UEING + 0.5*(U1+U2)*(X(I) - X(I-1))
U1 = U2
10 CONTINUE
ROING = X(NX) - X(NTR-1)
EXPT = GG*ROING*UEING
IF (EXPT .LE. 10.0) GO TO 2D
ITRN = 1
GAMTR = 1.0
GO TO 3D
2D GAMTR = 1.0 - EXP(-EXPT)
3D CONTINUE
TERMP = C(1,2)
SUM = 0.0
CII = 0.0
DO 40 J=2, NP
CII = CII + A(J)*(C(J-1,2) + C(J,2))
TERM = C(J,2)*(1.0 - U(J,2))
SUM = SUM + A(J)*(TERM+TERMP)
TERMP = TERM
40 CONTINUE
CI = 0.0
PPLUS = P2(NX)/(RX**D.25)*(RMU(NP)/(RMU(1)*V(1,2)))**1.5
CN = SORT(1.0 - 11.8*PPLUS*RMU(1)/RMU(NP)*C(1,2)**2)
CYA = CN*(RX**D.25)*SQRT(BC(1)*V(1,2))/26.0
DO 100 J=2, NP
CI = CI + A(J)*(C(J-1,2) + C(J,2))
EDVO = 0.0168*SUM*(RX**D.5)/BC(J)/C(J,2)**2
GAMINT = 1.0/(1.0 + 5.5*(CI/CII)**6)
EDVO = EDVO*GAMTR*GAMINT
IF (IED .EQ. 1) GO TO 5D
YOA = CYA*CI/BC(J)/C(J,2)**1.5
EL = 1.0
IF (YOA .LE. 10.0) EL = 1.0 - EXP(-YOA)
EDVI = 0.16*SQRT(RX)*GAMTR*V(J,2)*(CI*EL)**2/BC(J)/C(J,2)**3
IF (EDVI .LT. EDVO) GO TO 7D
IED = 1
5D EDV = EDVO
GO TO 9D
7D EDV = EDVI
9D B(J,2) = (1.0 + EDV)*BC(J)
E(J,2) = BC(J)*((1.0 + EDV*PR/PRT)/PR)
100 CONTINUE
B(1,2) = BC(1)
E(1,2) = BC(1)/PR
RETURN
END

```

Подпрограмма COEF

Эта подпрограмма содержит коэффициенты линеаризованных уравнений движения и энергии, записанных в форме уравнения (13.62). Обозначения некоторых типичных параметров приведены в таблице.

Обозначения на языке Фортран	Символ
FB, UB, GB, CB	$f_{j-1/2}^n, u_{j-1/2}^n, g_{j-1/2}^n, c_{j-1/2}^n$
USB, FVB, FPB	$(u^2)_{j-1/2}^n, (fv)_{j-1/2}^n, (fp)_{j-1/2}^n$
DERBV	$\{(bv)_j^n - (bv)_{j-1}^n\} h_j^{-1}$
CFB, CUB, CGB, CCB	$f_{j-1/2}^{n-1}, u_{j-1/2}^{n-1}, g_{j-1/2}^{n-1}, c_{j-1/2}^{n-1}$
CDEREP	$h_j^{-1} \{(ep)_j^{n-1} - (ep)_{j-1}^{n-1}\}$
CRB, CLB	$R_{j-1/2}^{n-1}, L_{j-1/2}^{n-1}$ [формулы (13.58a) и (13.58b)]
CTB, CMB	$T_{j-1/2}^{n-1}, M_{j-1/2}^{n-1}$ [формулы (13.59a) и (13.59b)]
S1(J)—S8(J)	$(s_1)_j - (s_8)_j$ [формула (13.64)]
B1(J)—B10(J)	$(\beta_1)_j - (\beta_{10})_j$ [формула (13.65)]
R(1, J)—R(5, J)	$(r_1)_j - (r_5)_j$ [формула (13.63)]

```

SUBROUTINE COEF
COMMON /INPT1/ MW(60), ALFAD, ALFA1
COMMON /BLCD/ NP, NPT, NX, NXT, NTR, IT
COMMON /BLC1/ F(61,2), U(61,2), V(61,2), B(61,2), G(61,2), P(61,2),
1 C(61,2), D(61,2), E(61,2), RMU(61), BC(61)
COMMON /GRD/ X(60), ETA(61), DETA(61), A(61)
COMMON /EDGE/ UE(60), TE(60), RHOE(60), RMUE(60), PE(60), P1(60), P2(60)
COMMON /BLC6/ S1(61), S2(61), S3(61), S4(61), S5(61), S6(61), S7(61),
1 S8(61), B1(61), B2(61), B3(61), B4(61), B5(61), B6(61),
2 B7(61), B8(61), B9(61), B10(61), R(5,61)
-----
IF (IT .GT. 1) GO TO 5
CEL = 0.0
IF (NX .GT. 1) CEL = 0.5 * (X(NX) + X(NX-1)) / (X(NX) - X(NX-1))
P1P = P1(NX) + CEL
P2P = P2(NX) + CEL
IF (ALFAD .GT. 0.1) G(1,2) = MW(NX)
IF (ALFA1 .GT. 0.1) P(1,2) = MW(NX)
5 CONTINUE
DO 100 J=2, NP
ДАнное СЕЧЕНИЕ
USB = 0.5 * (U(J,2) ** 2 + U(J-1,2) ** 2)
FVB = 0.5 * (F(J,2) * V(J,2) + F(J-1,2) * V(J-1,2))
FPB = 0.5 * (F(J,2) * P(J,2) + F(J-1,2) * P(J-1,2))
UGB = 0.5 * (U(J,2) * G(J,2) + U(J-1,2) * G(J-1,2))
UB = 0.5 * (U(J,2) + U(J-1,2))
VB = 0.5 * (V(J,2) + V(J-1,2))
FB = 0.5 * (F(J,2) + F(J-1,2))
GB = 0.5 * (G(J,2) + G(J-1,2))
PB = 0.5 * (P(J,2) + P(J-1,2))
CB = 0.5 * (C(J,2) + C(J-1,2))
DERBV = (B(J,2) * V(J,2) - B(J-1,2) * V(J-1,2)) / DETA(J-1)
DEREP = (E(J,2) * P(J,2) - E(J-1,2) * P(J-1,2)) / DETA(J-1)
DRDUV = (D(J,2) * U(J,2) * V(J,2) - D(J-1,2) * U(J-1,2) * V(J-1,2)) /
1 DETA(J-1)
IF (NX .GT. 1) GO TO 10
    
```

С ПРЕДЫДУЩЕЕ СЕЧЕНИЕ

```

CFB = 0.0
CVB = 0.0
CPB = 0.0
CUB = 0.0
CGB = 0.0
CUGB = 0.0
CFPB = 0.0
CFVB = 0.0
CUSB = 0.0
CDERBV = 0.0
CDEREP = 0.0
CRB = -P2(NX)*CB
CTB = 0.0
GO TO 20
10 CFB = 0.5*(F(J,1)+F(J-1,1))
CVB = 0.5*(V(J,1)+V(J-1,1))
CPB = 0.5*(P(J,1)+P(J-1,1))
CUB = 0.5*(U(J,1)+U(J-1,1))
CGB = 0.5*(G(J,1)+G(J-1,1))
CFVB = 0.5*(F(J,1)*V(J,1)+F(J-1,1)*V(J-1,1))
CFPB = 0.5*(F(J,1)*P(J,1)+F(J-1,1)*P(J-1,1))
CUGB = 0.5*(U(J,1)*G(J,1)+U(J-1,1)*G(J-1,1))
CUSB = 0.5*(U(J,1)**2+U(J-1,1)**2)
CCB = 0.5*(C(J,1) + C(J-1,1))
CDERBV = (B(J,1)*V(J,1)-B(J-1,1)*V(J-1,1))/DETA(J-1)
CDEREP = (E(J,1)*P(J,1)-E(J-1,1)*P(J-1,1))/DETA(J-1)
CDRDUV = (D(J,1)*U(J,1)*V(J,1) - D(J-1,1)*U(J-1,1)*V(J-1,1))/
DETA(J-1)
1 CLB = CDERBV + P1(NX-1)*CFVB + P2(NX-1)*(CCB-CUSB)
CRB = -CLB - P2(NX)*CB - CEL*CUSB + CEL*CFVB
CMB = CDEREP + CDRDUV + P1(NX-1)*CFPB
CTB = -CMB + CEL*(CFPB-CUGB)
С КООФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ
20 CONTINUE
S1(J) = B(J,2)/DETA(J-1) + 0.5*P1*F(J,2) - 0.5*CEL*CFB
S2(J) = -B(J-1,2)/DETA(J-1) + 0.5*P1*F(J-1,2) - 0.5*CEL*CFB
S3(J) = 0.5*(P1*V(J,2) + CEL*CVB)
S4(J) = 0.5*(P1*V(J-1,2) + CEL*CVB)
S5(J) = -P2*U(J,2)
S6(J) = -P2*U(J-1,2)
S7(J) = 0.0
S8(J) = 0.0
R(2,J) = CRB - (DERBV + P1*FVB - P2*USB + CEL*(FB*CVB-VB*CFB))
С КООФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ
B1(J) = E(J,2)/DETA(J-1) + 0.5*P1*F(J,2) - 0.5*CEL*CFB
B2(J) = -E(J-1,2)/DETA(J-1) + 0.5*P1*F(J-1,2) - 0.5*CEL*CFB
B3(J) = 0.5*(P1*P(J,2) + CEL*CPB)
B4(J) = 0.5*(P1*P(J-1,2) + CEL*CPB)
B5(J) = D(J,2)*V(J,2)/DETA(J-1) - 0.5*CEL*(G(J,2)-CGB)
B6(J) = -D(J-1,2)*V(J-1,2)/DETA(J-1) - 0.5*CEL*(G(J-1,2)-CGB)
B7(J) = -0.5*CEL*(U(J,2)*CUB)
B8(J) = -0.5*CEL*(U(J-1,2)*CUB)
B9(J) = D(J,2)*U(J,2)/DETA(J-1)
B10(J) = -D(J-1,2)*U(J-1,2)/DETA(J-1)
R(3,J) = CTB - (DEREP + DRDUV + P1*FPB - CEL*(UGB-CGB*UB+CUB*GB) +
1 CEL*(CPB*FB-CFB*PB))
С ОПРЕДЕЛЕНИЯ RJ
R(1,J) = F(J-1,2)-F(J,2)+DETA(J-1)*UB
R(4,J-1) = U(J-1,2)-U(J,2)+DETA(J-1)*VB
R(5,J-1) = G(J-1,2)-G(J,2)+DETA(J-1)*PB
100 CONTINUE
R(1,1) = 0.0
R(2,1) = 0.0
R(3,1) = 0.0
R(4,NP) = 0.0
R(5,NP) = 0.0
RETURN
END

```

Подпрограмма OUTPUT

Эта подпрограмма выдает на печать полученные в результате расчета профили, например f_j , u_j , v_j , g_j , p_j и b_j в функции η_j . Она также позволяет вычислить характеристики пограничного слоя θ , δ^* , H , c_f , Nu_x , St_x , R_θ , R_{δ^*} и R_x . Для удобства ниже выписаны выражения для всех этих характеристик:

$$\theta = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy = \frac{x}{\sqrt{R_x}} \int_0^\infty f'(1-f') d\eta. \quad (13.78a)$$

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy = \frac{x}{\sqrt{R_x}} \int_0^\infty (c-f') d\eta. \quad (13.78b)$$

$$H = \frac{\delta^*}{\theta}. \quad (13.78c)$$

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho_e u_e^2} = \frac{2C_w}{\sqrt{R_x}} f_w''. \quad (13.78d)$$

$$Nu_x = \frac{\dot{q}_w x}{(T_w - T_e)k} = \frac{C_w g'_w \sqrt{R_x}}{1 - g_w} \quad (13.78e)$$

$$St_x = \frac{\dot{q}_w}{\rho_e u_e (H_w - H_e)} = \frac{C_w g'_w}{Pr \sqrt{R_x} (1 - g_w)}. \quad (13.78f)$$

$$R_\theta = \frac{u_e \theta}{\nu_e}, \quad R_{\delta^*} = \frac{u_e \delta^*}{\nu_e}, \quad R_x = \frac{u_e x}{\nu_e}. \quad (13.78g)$$

```

SUBROUTINE OUTPUT
COMMON /OTPT1/ RX, CNUE
COMMON /AK1/ RMUI, TI, RMI, UI, PR, HE
COMMON /BLCD/ NP, NPT, NX, NXT, NTR, IT
COMMON /GRD/ X(60), ETA(61), DELTA(61), A(61)
COMMON /BLC1/ F(61,2), U(61,2), V(61,2), B(61,2), G(61,2), P(61,2),
1 C(61,2), D(61,2), E(61,2), RMU(61), BC(61)
C - - - - -
COMMON /EDGE/ UE(60), TE(60), RHOE(60), RMUE(60), PE(60), P1(60), P2(60)
-----
WRITE(6,4400)
WRITE(6,4500) (J,ETA(J),F(J,2),U(J,2),V(J,2),G(J,2),P(J,2),
1 B(J,2),J=1, NP,5)
IF (J .NE. (NP+5)) WRITE(6,4500) NP,ETA(NP),F(NP,2),U(NP,2),
1 V(NP,2),G(NP,2),P(NP,2),B(NP,2)
IF (NX .EQ. 1) GO TO 210
TEMP = 0.0
SUM = 0.0
SUMC = 0.0
DO 20 J=2, NP
SUMC = SUMC + A(J)*(C(J,2) + C(J-1,2))
TERM = U(J,2)*(1.0 - U(J,2))
SUM = SUM + A(J)*(TERM + TERMP)
TERMP = TERM
    
```

```

20 CONTINUE
DELS = X(NX)/SQRT(RX)*(SUMC - F(NP,2))
RDELS = SQRT(RX)*(SUMC - F(NP,2))
THETA = X(NX)/SQRT(RX)*SUM
RTHETA = SQRT(RX)*SUM
H = DELS/THETA
CF2 = BC(1)*V(1,2)/SQRT(RX)
IF (ABS(G(1,2)-1.0) .LT. 0.00001) GO TO 200
ANUX = P(1,2)*C(1,2)*SQRT(RX)/(1.0 - G(1,2))
STX = ANUX/RX/PR
WRITE(6,9000) RX,DELS,THETA,ANUX,H,CF2,RDELS,RTHETA,STX
GO TO 210
200 CONTINUE
WRITE(6,9100) RX,DELS,THETA,H,CF2,RDELS,RTHETA
210 NX = NX+1
IF (NX .GT. NXT) STOP
CNUE = RMUE(NX)/RHOE(NX)
RX = UE(NX)*X(NX)/CNUE
C СМЕЩЕНИЕ ПРОФИЛЕЙ
DO 250 J=1,NP
F(J,1) = F(J,2)
U(J,1) = U(J,2)
V(J,1) = V(J,2)
G(J,1) = G(J,2)
P(J,1) = P(J,2)
E(J,1) = E(J,2)
C(J,1) = C(J,2)
D(J,1) = D(J,2)
250 B(J,1) = B(J,2)
RETURN
C -----
4400 FORMAT (1H0,2X,1HJ,4X,3HETA,9X,1HF,13X,1HU,13X,1HV,13X,1HG,13X,1HP,
1 13X,1HB)
4500 FORMAT (1H ,I3,F10.3,6E14.6)
9000 FORMAT (1H0,5HRX =,E12.5,3X,6HDELS =,E12.5,3X,7HTHETA =,E12.5,
1 3X,' NUSSELT NO=' ,E12.5,3X,2HH=,E12.5/1H0,5HCF/2=,E12.5,3X,
2 6HRDELS=,E12.5,3X,7HRTHETA=,E12.5,3X,' STANTON NO =',E12.5/
3 1H0,' -----')
9100 FORMAT (1H0,5HRX =,E12.5,3X,6HDELS =,E12.5,3X,7HTHETA =,E12.5,
1 3X,2HH=,E12.5/1H0,5HCF/2=,E12.5,3X,6HRDELS=,E12.5,3X,
2 7HRTHETA=,E12.5/1H0,' -----')
END

```

ЛИТЕРАТУРА

1. Cebeci T., Bradshaw P., Momentum Transfer in Boundary Layers, Hemisphere, Washington, DC, 1977.
2. Crank J., Nicolson P., A practical method for numerical evaluation of solutions of partial-differential equations of the heat-conduction type, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **43**, 50 (1947).
3. Keller H. B., A new difference scheme for parabolic problems, in Numerical Solution of Partial-Differential Equations, J. Bramble (ed.), Vol. II. Academic, N. Y., 1970.
4. Sellars J. B., Tribus M., Klein J. S., Heat transfer to laminar flow in a round tube or flat conduit — The Graetz Problem extended, *Trans. ASME*, **78**, 441 (1956).
5. Bradshaw P., Cebeci T., Whitelaw J. H., Engineering Calculation Methods for Turbulent Flows, Academic, London, 1981.

Применение программы для ЭВМ для расчета задач теплообмена

14

В разд. 13.4 и 13.5 описаны численные метод и программа для ЭВМ, используемые для расчета течений в пограничных слоях, рассмотренных в гл. 4—12. В четырех разделах этой главы описываются этапы решения четырех новых задач. Их описание достаточно подробно, чтобы читатель мог самостоятельно воспроизвести ранее полученные результаты или использовать программу для решения новых задач. Следует иметь в виду, что программа предназначена для решения уравнений плоских стационарных пограничных слоев. Однако после некоторых модификаций ее можно применить и для расчета осесимметричных стационарных течений, а также нестационарных течений, используя для этого методы, рассмотренные, например в работе [1]. При этом точность решения определяется точностью численной аппроксимации и принятыми физическими допущениями. Применение схемы «прямоугольник» при разумном выборе расстояний между узлами сетки гарантирует второй порядок точности, а многократно проверенная модель турбулентности Себиси — Смита позволяет адекватно описывать разнообразные турбулентные течения в пограничных слоях [2], хотя в сложных случаях (например, в случае турбулентных течений с выталкивающими силами она дает лишь качественные результаты).

В четырех разделах этой главы рассмотрены следующие виды течений: 1) внутреннее ламинарное течение с естественной и вынужденной конвекцией; 2) вертикальная пристенная струя с ламинарным течением с естественной и с вынужденной конвекцией; 3) нагретая турбулентная струя; 4) ламинарный слой смешения на границе между двумя однородными потоками, имеющими разные температуры. Таким образом, рассмотрены ламинарные и турбулентные течения с граничными условиями на стенке, на свободной границе и при наличии симметрии, т. е. охвачена большая часть задач, которые могут встретиться при изучении более сложных течений.

14.1. Вынужденная и естественная конвекция между двумя вертикальными параллельными пластинами

Чтобы продемонстрировать применение программы для ЭВМ, описанной в разд. 13.5, начнем с расчета течения с вынужденной и свободной конвекцией между двумя вертикальными параллельными пластинами, которое рассматривалось в разд. 9.4. Чтобы облегчить программирование, предположим, что обе вертикальные поверхности нагреты до одной и той же температуры, которая постоянна по всей поверхности обеих пластин. Кроме того, предположим, что течение ламинарное и что ни скоростные, ни температурные пограничные слои еще не успели слиться. Нетрудно получить решение и для других граничных условий, включая случай неравномерной температуры стенки или заданной плотности теплового потока, а также случай, когда скоростные и температурные слои уже успели слиться. Излагаемый метод можно применять и к переходным и турбулентным течениям, однако для этого надо принять подходящую модель турбулентности.

Рассматриваемое течение описывается в преобразованной системе координат дифференциальными уравнениями и граничными условиями (9.79)—(9.82)

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' = \xi \left(\frac{dw}{d\xi} + f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) + \xi\theta, \quad (9.79)$$

$$\frac{\theta''}{Pr} + \frac{1}{2}f\theta' = \xi \left(f' \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \theta' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right), \quad (9.80)$$

$$\eta = 0, \quad f = f' = 0, \quad \theta = 1, \quad (9.81a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad f' = \bar{u}_e, \quad \theta = 0, \quad (9.81b)$$

$$\bar{u}_e(\eta_{sp} - \eta_e) + f_e = \eta_{sp} = \sqrt{\frac{Gr_L}{R_L} \frac{1}{\xi}}, \quad (9.82b)$$

где $w \equiv p^*$, а соотношение между \bar{u}_e и w определяется уравнением Бернулли, записанным в виде

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\bar{u}_e^2}{2} \right) \equiv - \frac{dw}{d\xi}. \quad (14.1)$$

Выписанную выше систему уравнений можно решить либо нелинейным методом собственных значений, либо методом Мечула, рассмотренным в работе [1]. Первый метод требует меньших изменений в программе, описанной в разд. 13.5; поэтому воспользуемся

им. Следует отметить, что при охлаждении стенки в восходящем потоке жидкости в противоположность рассматриваемому нагреванию стенки может произойти отрыв потока; тогда придется пользоваться методом Мечула, применение которого рассмотрено, например, в работе [3].

Переход к конечно-разностным уравнениям

Как и в разд. 13.4, представим преобразованные уравнения в виде системы уравнений первого порядка. С учетом уравнений (13.54a—c) и уравнения (14.1), заменив g на θ , приведем уравнения (9.79)—(9.81) к виду

$$v' + \frac{1}{2}fv = \xi \left(\frac{dw}{d\xi} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} - v \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) + \xi g, \quad (14.2)$$

$$\frac{p'}{\text{Pr}} + \frac{1}{2}fp = \xi \left(u \frac{\partial g}{\partial \xi} - p \frac{\partial f}{\partial \xi} \right), \quad (14.3)$$

$$\eta = 0, \quad f = u = 0, \quad g = 1, \quad (14.4a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad u = \bar{u}_e, \quad g = 0, \quad (14.4b)$$

где соотношение между \bar{u}_e и w определяется уравнением (14.1).

Конечно-разностные аналоги уравнений (14.2) и (14.3) записываются так же, как уравнения (13.56d) и (13.56e):

$$h_j^{-1}(v_j^n - v_{j-1}^n) + \left(\frac{1}{2} + \alpha_n \right) (fv)_{j-1/2}^n - \alpha_n (u^2)_{j-1/2}^n + \\ + \alpha_n (v_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^n - f_{j-1/2}^{n-1} v_{j-1/2}^n) - \lambda \xi_{n-1/2} g_{j-1/2}^n = R_{j-1/2}^{n-1}, \quad (14.5)$$

$$h_j^{-1}(p_j^n - p_{j-1}^n) + \left(\frac{1}{2} + \alpha_n \right) (fp)_{j-1/2}^n - \alpha_n [(ug)_{j-1/2}^n + u_{j-1/2}^{n-1} g_{j-1/2}^n - \\ - g_{j-1/2}^{n-1} u_{j-1/2}^n + f_{j-1/2}^{n-1} p_{j-1/2}^n - p_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^n] = T_{j-1/2}^{n-1}, \quad (14.6)$$

где α_n (при замене x на ξ) определяется уравнением (13.57), $\beta = w^{n-1} - w^n$, $T_{j-1/2}^{n-1}$ определяется уравнением (13.59a), а $R_{j-1/2}^{n-1}$, $L_{j-1/2}^{n-1}$ и $M_{j-1/2}^{n-1}$ заданы выражениями

$$R_{j-1/2}^{n-1} = -L_{j-1/2}^{n-1} + \lambda \xi_{n-1/2} g_{j-1/2}^{n-1} + \alpha_n [(fv)_{j-1/2}^{n-1} - (u^2)_{j-1/2}^{n-1} - 2\beta], \quad (14.7a)$$

$$L_{j-1/2}^{n-1} = \left[h_j^{-1}(v_j - v_{j-1}) + \frac{1}{2}(fv)_{j-1/2} \right]^{n-1}, \quad (14.7b)$$

$$M_{j-1/2}^{n-1} = \left[h_j^{-1}(p_j - p_{j-1}) + \frac{1}{2}(fp)_{j-1/2} \right]^{n-1}. \quad (14.7c)$$

Аналогичным образом граничные условия на стенке, соответствующие $\alpha_0 = 1$ и $\alpha_1 = 0$ (см. уравнение (13.60a)), можно представить в виде

$$f_0^n = u_0^n = 0, \quad g_0^n = 1. \quad (14.8a)$$

Граничные условия на границе пограничного слоя в соответствии с уравнениями (14.1) и (14.4b) имеют вид

$$u_j^n = \sqrt{(u^2)_j^{n-1} + 2\beta}, \quad g_j^n = 0. \quad (14.8b)$$

Выписанное выше граничное условие для уравнения движения заменяет использовавшееся ранее граничное условие $u_j^n = 1$, определяемое уравнением (13.60b).

Как и выше в разд. 13.4, линеаризуем уравнения (14.5) и (14.6) и соответствующие граничные условия (14.8), воспользовавшись для этого методом Ньютона. В результате получим уравнения, по виду совпадающие с уравнениями (13.62d) и (13.62e). Коэффициенты новых уравнений весьма близки к коэффициентам, определяемым уравнениями (13.63d), (13.63e), (13.64) и (13.65). Новые коэффициенты уравнения движения — с $(s_1)_j$ по $(s_6)_j$ — совпадают с коэффициентами, определяемыми уравнениями (13.64a—h), если принять $b_j = 1$, $m_1 = 1/2$ и $m_2 = 0$; коэффициенты $(s_7)_j$ и $(s_8)_j$ отличны от нуля и имеют вид

$$(s_7)_j = (s_8)_j = -\frac{1}{2}\xi_{n-1/2}.$$

Подобным же образом новые коэффициенты уравнения энергии совпадают с коэффициентами, определяемыми уравнениями (13.65a—j), если принять $e_j = 1/\text{Pr}$, $m_1 = 1/2$ и $d_j = 0$.

Если $R_{j-1/2}^{n-1}$ определяется уравнением (14.7a), а $M_{j-1/2}^{n-1}$ в уравнении (13.59a) — уравнением (14.7c), то новые выражения для $(r_2)_j$ и $(r_3)_j$ совпадают с выражениями, заданными уравнениями (13.63d) и (13.63e), если принять $b_j = 1$, $m_1 = 1/2$, $e_j = 1/\text{Pr}$ и $m_2 = d_j = 0$.

Граничные условия, определяемые уравнениями (14.8), при $\alpha_0 = 1$ и $\alpha_1 = 0$, совпадают с граничными условиями, определяемыми уравнением (13.66).

Метод Ньютона

В разд. 5.3 отмечалось, что основным отличием расчета пограничного слоя от расчета внутренних течений является необходимость учета градиента давления, который для течений в пограничных слоях задается, а для внутренних течений, когда вместо него задается площадь проходного сечения канала, должен вычисляться. В последнем случае можно пользоваться двумя вычислительными методами: методом Мечула и нелинейным методом собственных значений. Здесь применим второй из указанных методов. Используя коэффициенты и граничные условия уравнений движения и энергии, модифицированные указанным выше образом, с помощью метода матричной прогонки решим систему уравнений (13.62) при заданном значении члена, содержащего градиент давления, β^n . Для краткости эту задачу будем называть *стандартной*. Ее решение можно использовать для проверки справедливости соотношения (9.82b). Если результат получается отрицательным, то пользуясь методом Ньютона, получают новое значение w^n , как показано ниже.

Замечая, что $\bar{u}_e = u_j^n$, $\eta_e = \eta_j$ и $f_e = f_j^n$, запишем уравнение (9.82b) в виде

$$\phi(\beta_n^v) = \frac{1}{\eta_{sp}} [u_j^n (\eta_{sp} - \eta_j) + f_j^n] - 1, \quad (14.9)$$

а затем с помощью метода Ньютона получим

$$\beta_n^{v+1} = \beta_n^v - \frac{\phi(\beta_n^v)}{\partial\phi(\beta_n^v)/\partial\beta}. \quad (14.10a)$$

Производную ϕ по β_n получим из уравнения (14.9)

$$\frac{\partial\phi(\beta_n^v)}{\partial\beta} = \frac{1}{\eta_{sp}} \left[\frac{1}{u_j^n} (\eta_{sp} - \eta_j) + \left(\frac{\partial f}{\partial\beta} \right)_j^n \right]. \quad (14.10b)$$

Чтобы вычислить производную f по β , найдем сначала производную по β от конечно-разностных аппроксимаций уравнений (14.2) и (14.3) и их граничных условий (14.4). Эта операция по существу сводится к дифференцированию уравнений (13.56a—с) и модифицированных уравнений (13.56d—е), т. е. уравнений (14.5) и (14.6), вместе с граничными условиями (14.8). В результате получим систему *линейных* разностных уравнений, называемых *вариационными*

ми уравнениями. Функции f_1 , u_1 , v_1 , g_1 и p_1 , определяемые выражениями

$$f_1 \equiv \frac{\partial f}{\partial \beta}, \quad u_1 \equiv \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad v_1 \equiv \frac{\partial v}{\partial \beta}, \quad g_1 \equiv \frac{\partial g}{\partial \beta}, \quad p_1 \equiv \frac{\partial p}{\partial \beta}, \quad (14.11)$$

можно представить в форме, аналогичной уравнениям (13.62),

$$(f_1)_j - (f_1)_{j-1} - \frac{h_j}{2} [(u_1)_j + (u_1)_{j-1}] = 0, \quad (14.12a)$$

$$(u_1)_j - (u_1)_{j-1} - \frac{h_j}{2} [(v_1)_j + (v_1)_{j-1}] = 0, \quad (14.12b)$$

$$(g_1)_j - (g_1)_{j-1} - \frac{h_j}{2} [(p_1)_j + (p_1)_{j-1}] = 0, \quad (14.12c)$$

$$(s_1)_j (v_1)_j + (s_2)_j (v_1)_j + (s_3)_j (f_1)_j + (s_4)_j (f_1)_{j-1} + (s_5)_j (u_1)_j + \\ + (s_6)_j (u_1)_{j-1} + (s_7)_j (g_1)_j + (s_8)_j (g_1)_{j-1} = -2\alpha_n, \quad (14.12d)$$

$$(\beta_1)_j (p_1)_j + (\beta_2)_j (p_1)_{j-1} + (\beta_3)_j (f_1)_j + (\beta_4)_j (f_1)_{j-1} + (\beta_5)_j (u_1)_j + \\ + (\beta_6)_j (u_1)_{j-1} + (\beta_7)_j (g_1)_j + (\beta_8)_j (g_1)_{j-1} + (\beta_9)_j (v_1)_j + \\ + (\beta_{10})_j (v_1)_{j-1} = 0. \quad (14.12e)$$

Здесь коэффициенты $(s_k)_j$ и $(\beta_l)_j$ ($k = 1, \dots, 8$; $l = 1, \dots, 10$) с учетом ограничений, рассмотренных в предыдущем разделе, совпадают с коэффициентами, определяемыми уравнениями (13.64) и (13.65). Коэффициенты $(r_1)_j$, $(r_4)_{j-1}$, $(r_5)_{j-1}$, $(r_2)_j$ и $(r_3)_j$, соответствующие правым частям уравнений (14.12a—e), равны нулю, за исключением коэффициента $(r_2)_j$, который определяется выражением

$$(r_2)_j = -2\alpha_n. \quad (14.13)$$

Аналогичным образом, дифференцируя граничные условия (14.8) по β , получаем

$$(f_1)_0^n = 0, \quad (u_1)_0^n = 0, \quad (g_1)_0^n = 0, \quad (14.14a)$$

$$(u_1)_J^n = \frac{1}{u_J^n}, \quad (g_1)_J^n = 0. \quad (14.14b)$$

Линейную систему уравнений (14.12) и (14.14) можно представить в форме уравнения (13.28) и решить методом матричной прогонки. Поскольку коэффициенты $(s_k)_j$ и $(\beta_l)_j$, входящие в вариацион-

ные уравнения, совпадают с коэффициентами уравнений стандартной задачи, то при решении *вариационной* задачи нет необходимости вычислять матрицу \mathbf{A} в уравнении (13.28). Кроме того, поскольку граничные условия вариационной задачи также совпадают с граничными условиями стандартной задачи, то подпрограмму SOLV5 можно сохранить в ее прежнем виде. В результате после решения уравнения вариационной задачи останется лишь принять все $(r_k)_j$ ($k = 1, \dots, 5$), кроме $(r_2)_j$, равными нулю и, имея все $(s_k)_j$ и $(\beta_l)_j$ из решения стандартной задачи, вычислить δ_j , которая теперь определяется выражением

$$\delta_j \equiv \begin{bmatrix} (f_1)_j \\ (u_1)_j \\ (v_1)_j \\ (g_1)_j \\ (p_1)_j \end{bmatrix}. \quad (14.15)$$

Однако в отличие от стандартной задачи нет необходимости вычислять δ при всех значениях j . Вместо этого достаточно вычислить только δ_j , так как интерес представляет лишь значение $(f_1)_j$.

Найдя значение $(f_1)_j^n$ из решения вариационной задачи, нужно решить стандартную задачу при новом значении β_n^{n+1} , вычисленном по уравнению (14.10). Затем проверить, выполняется ли условие

$$|\phi(\beta_n^{n+1})| < \varepsilon \quad (14.16)$$

где ε полагается равным, например, 10^{-4} . Если это условие не выполняется, то, вновь решая вариационные уравнения, следует вычислить $(f_1)_j^n$, чтобы найти новое значение β_n из уравнения (14.10a) и использовать его для последующего решения стандартной задачи. Эта процедура повторяется до достижения сходимости в соответствии с критерием (14.16).

Программа на языке Фортран

Чтобы решить задачу с помощью программы для ЭВМ, описанной в разд. 13.5, внося в нее минимум изменений, следует воспользоваться несколько видоизмененной программой MAIN, а также тремя подпрограммами IVPL, COEF и SOLV5. Если ввести переключатель IPROB, который будет указывать, решаются ли уравнения для стандартной задачи (IPROB = 1) или для вариационной задачи (IPROB =* 2), то можно будет использовать подпрограмму

SOLV5 без каких-либо изменений, введя лишь непосредственно перед оператором 40 программы MAIN оператор

$$\text{IF}(\text{IPROB.EQ.2})\text{RETURN} \quad (14.17)$$

Подпрограмма IVPL, описанная в разд. 13.5, без каких-либо изменений используется для задания начальных профилей скорости при $b_j = 1$, $d_j = 0$, $e_j = 1/\text{Pr}$ и $c_j = 1$. С помощью этой же подпрограммы будет вычислен начальный профиль температуры при $g_w = 1$ и его производная, определяемые выражениями

$$g = 1 - \frac{\eta}{\eta_e}, \quad p = \frac{-1}{\eta_e}. \quad (14.18)$$

Поскольку все эти изменения невелики, полный текст новой программы здесь не приводится.

При подготовке видоизмененной подпрограммы COEF можно использовать большую часть строк подпрограммы COEF, описанной в разд. 13.5. Для этого в программе MAIN принимается $P2(\text{NX}) = .0$ и $P1(\text{NX}) = 0,5$. Коэффициенты $(s_k)_j$ (где $k = 1, \dots, 6$) и $(\beta_l)_j$ остаются неизменными, а коэффициенты $(s_7)_j$ и $(s_8)_j$ определяются новыми выражениями. Коэффициенты $(r_k)_j$ для стандартной и вариационной задач также модифицируются, как показано в видоизмененной подпрограмме COEF, текст которой приводится ниже.

```

SUBROUTINE COEF
COMMON /INPT1/ MH(60), ALFAD, ALFA1
COMMON /NCV1/ IPROB, RHG, BETA
COMMON /BLC0/ NP, NPT, NX, NXT, NTR, IT
COMMON /BLC1/ F(61,2), U(61,2), V(61,2), B(61,2), G(61,2), P(61,2),
1 C(61,2), D(61,2), E(61,2), RMU(61), BC(61)
COMMON /GRD/ X(60), ETA(61), DELTA(61), A(61)
COMMON /EDGE/ UE(60), TE(60), RHOE(60), RMUE(60), PE(60), P1(60), P2(60)
COMMON/BLC6/ S1(61), S2(61), S3(61), S4(61), S5(61), S6(61), S7(61),
1 S8(61), B1(61), B2(61), B3(61), B4(61), B5(61), B6(61),
2 B7(61), B8(61), B9(61), B10(61), R(5,61)
C - - - - -
IF (IT .GT. 1) GO TO 5
IF (NX .GT. 1) GO TO 3
CEL = 0.0
P1P = 0.5
P2P = 0.0
XB = 0.0
GO TO 5
3 CONTINUE
XB = 0.5*(X(NX) + X(NX-1))
CEL = 0.5*(X(NX) + X(NX-1))/(X(NX) - X(NX-1))
U(NP,2) = SQRT(2.0*BETA + U(NP,1)**2)
P1P = P1(NX) + CEL
P2P = P2(NX) + CEL
5 CONTINUE
DO 100 J=2,NP
IF (IPROB .EQ. 2) GO TO 80

```

```

C ДАННОЕ СЕЧЕНИЕ
  USB = 0.5*(U(J,2)**2+U(J-1,2)**2)
  FVB = 0.5*(F(J,2)*V(J,2)+F(J-1,2)*V(J-1,2))
  FPB = 0.5*(F(J,2)*P(J,2)+F(J-1,2)*P(J-1,2))
  UGB = 0.5*(U(J,2)*G(J,2)+U(J-1,2)*G(J-1,2))
  UB = 0.5*(U(J,2)+U(J-1,2))
  VB = 0.5*(V(J,2)+V(J-1,2))
  FB = 0.5*(F(J,2)+F(J-1,2))
  GB = 0.5*(G(J,2)+G(J-1,2))
  PB = 0.5*(P(J,2)+P(J-1,2))
  CB = 0.5*(C(J,2)+C(J-1,2))
  DERBV = (B(J,2)*V(J,2)-B(J-1,2)*V(J-1,2))/DETA(J-1)
  DEREP = (E(J,2)*P(J,2)-E(J-1,2)*P(J-1,2))/DETA(J-1)
  DRDUV = (D(J,2)*U(J,2)*V(J,2)-D(J-1,2)*U(J-1,2)*V(J-1,2))/
1    DETA(J-1)
  IF(NX.GT.1) GO TO 10
C ПРЕДЫДУЩЕЕ СЕЧЕНИЕ
  CFB = 0.0
  CVB = 0.0
  CPB = 0.0
  CUB = 0.0
  CGB = 0.0
  CUGB = 0.0
  CFPB = 0.0
  CFVB = 0.0
  CUSB = 0.0
  CDERBV = 0.0
  CDEREP = 0.0
  CRB = -P2(NX)*CB
  CTB = 0.0
  GO TO 20
10 CFB = 0.5*(F(J,1)+F(J-1,1))
  CVB = 0.5*(V(J,1)+V(J-1,1))
  CPB = 0.5*(P(J,1)+P(J-1,1))
  CUB = 0.5*(U(J,1)+U(J-1,1))
  CGB = 0.5*(G(J,1)+G(J-1,1))
  CFVB = 0.5*(F(J,1)*V(J,1)+F(J-1,1)*V(J-1,1))
  CFPB = 0.5*(F(J,1)*P(J,1)+F(J-1,1)*P(J-1,1))
  CUGB = 0.5*(U(J,1)*G(J,1)+U(J-1,1)*G(J-1,1))
  CUSB = 0.5*(U(J,1)**2+U(J-1,1)**2)
  CCB = 0.5*(C(J,1)+C(J-1,1))
  CDERBV = (B(J,1)*V(J,1)-B(J-1,1)*V(J-1,1))/DETA(J-1)
  CDEREP = (E(J,1)*P(J,1)-E(J-1,1)*P(J-1,1))/DETA(J-1)
  CDRDUV = (D(J,1)*U(J,1)*V(J,1)-D(J-1,1)*U(J-1,1)*V(J-1,1))/
1    DETA(J-1)
  CLB = CDERBV + P1(NX-1)*CFVB + P2(NX-1)*(CCB-CUSB)
  CRB = -CLB - P2(NX)*CB - CEL*CUSB + CEL*CFVB - XB*CGB - 2.0*CEL
1    *BETA
  CMB = CDEREP + CDRDUV + P1(NX-1)*CFPB
  CTB = -CMB + CEL*(CFPB-CUGB)
C КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ
20 CONTINUE
  S1(J) = B(J,2)/DETA(J-1) + 0.5*P1*F(J,2) - 0.5*CEL*CFB
  S2(J) = -B(J-1,2)/DETA(J-1) + 0.5*P1*F(J-1,2) - 0.5*CEL*CFB
  S3(J) = 0.5*(P1*V(J,2) + CEL*CVB)
  S4(J) = 0.5*(P1*V(J-1,2) + CEL*CVB)
  S5(J) = -P2*U(J,2)
  S6(J) = -P2*U(J-1,2)
  S7(J) = 0.5*XB
  S8(J) = S7(J)
  R(2,J) = CRB - (DERBV + P1*FVB - P2*USB + CEL*(FB*CVB-VB*CFB) +
1    XB*GB)
C КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ
  B1(J) = E(J,2)/DETA(J-1) + 0.5*P1*F(J,2) - 0.5*CEL*CFB
  B2(J) = -E(J-1,2)/DETA(J-1) + 0.5*P1*F(J-1,2) - 0.5*CEL*CFB
  B3(J) = 0.5*(P1*P(J,2) + CEL*CPB)
  B4(J) = 0.5*(P1*P(J-1,2) + CEL*CPB)

```

```

B5(J) = D(J,2)*V(J,2)/DETA(J-1) - 0.5*CEL*(G(J,2)-CGB)
B6(J) = -D(J-1,2)*V(J-1,2)/DETA(J-1) - 0.5*CEL*(G(J-1,2)-CGB)
B7(J) = -0.5*CEL*(U(J,2)+CUB)
B8(J) = -0.5*CEL*(U(J-1,2)+CUB)
B9(J) = D(J,2)*U(J,2)/DETA(J-1)
B10(J) = -D(J-1,2)*U(J-1,2)/DETA(J-1)
R(3,J) = CTB - (DEREP + DRDUV + P1P*FPB - CEL*(UGB-CGB*UB+CUB*GB) +
1 CEL*(CPB*FB-CFB*PB))
C ОПРЕДЕЛЕНИЯ RJ ДЛЯ СТАНДАРТНОЙ ЗАДАЧИ
R(1,J) = F(J-1,2) - F(J,2) + DETA(J-1)*UB
R(4,J-1) = U(J-1,2) - U(J,2) + DETA(J-1)*VB
R(5,J-1) = G(J-1,2) - G(J,2) + DETA(J-1)*PB
GO TO 100
80 CONTINUE
C ОПРЕДЕЛЕНИЯ RJ ДЛЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ
R(1,J) = 0.0
R(2,J) = -2.0*CEL
R(3,J) = 0.0
R(4,J-1) = 0.0
R(5,J-1) = 0.0
100 CONTINUE
C ОПРЕДЕЛЕНИЯ RJ ДЛЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ
R(1,1) = 0.0
R(2,1) = 0.0
R(3,1) = 0.0
R(4,NP) = 0.0
R(5,NP) = 0.0
IF (IPROB .EQ. 2) R(4,NP) = 1.0/U(NP,2)
RETURN
END

```

Видоизмененная программа MAIN содержит подпрограммы INPUT, GRID и OUTPUT и определяет логику вычислений. В нее включены также уравнения (14.9) и (14.10b). Отметим, что $g_0(\equiv GW) = 1,0$, а $RHG = R_L/Gr_L$. Текст этой программы приводится ниже.

```

C MAIN
COMMON /INPT1/ HW(60), ALFAD, ALFA1
COMMON /BLCD/ NP, NPT, NX, NXT, NTR, IT
COMMON /BLC1/ F(61,2), U(61,2), V(61,2), B(61,2), G(61,2), P(61,2),
1 C(61,2), D(61,2), E(61,2), RMU(61), BC(61)
COMMON /GRD/ X(60), ETA(61), DETA(61), A(61)
COMMON /EDGE/ UE(60), TE(60), RHOE(60), RMUE(60), PE(60), P1(60), P2(60)
COMMON /BLC3/ DELF(61), DELU(61), DELV(61), DELG(61), DELP(61)
COMMON /NCV1/ IPROB, RHG, BETA
COMMON /AK1/ GW, PR
C - - - - -
ITMAX = 6
NX = 1
NPT = 61
ETAЕ = 8.0
C ВВОД ДАННЫХ
READ(5,8000) NXT
READ(5,8100) DETA(1), VGP, ALFAD, ALFA1
READ(5,8100) GW, PR, RHG
READ(5,8100) (X(I), I=1, NXT)
WRITE(6,7000) PR, RHG, NXT, ETAЕ, DETA(1), VGP
C ФОРМИРОВАНИЕ СЕТКИ
IF (VGP-1.0) .LE. 0.001 GO TO 5
NP = ALOG((ETAЕ/DETA(1))*(VGP-1.0)+1.0)/ALOG(VGP) + 1.0001
GO TO 10
5 NP = ETAЕ/DETA(1) + 1.0001

```

```

10 IF (NP'.LE. 61) GO TO 15
   WRITE (6,9000)
   STOP
15 ETA(1) = 0.0
   DO 20 J=2,NPT
   DETA(J) = VGP*DETA(J-1)
   A(J) = 0.5*DETA(J-1)
20 ETA(J) = ETA(J-1)*DETA(J-1)
   CALL IVPL
   BETA = 0.0
30 WRITE (6,9100) NX,X(NX)
   P1(NX) = 0.5
   P2(NX) = 0.0
   IT = 0
   IPHI = 0
   WRITE (6,9410)
40 IT = IT+1
   IPROB = 1
   IF (IT .LE. ITMAX) GO TO 60
   WRITE (6,2500)
   GO TO 80
60 CONTINUE
   CALL COEF
   CALL SOLV5
   WRITE (6,3000) V(1,2),DELV(1)
C ПРОВЕРКА СХОДИМОСТИ
   IF (ABS(DELV(1)) .GT. 1.0E-05) GO TO 40
   IF (V(1,2) .LT. 0.0) STOP
   IF (NX .EQ. 1) GO TO 80
C РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ
   IF (IPHI .GT. 6) GO TO 80
   IPROB = 2
   CALL COEF
   CALL SOLV5
C ПРОВЕРКА ДЛЯ Q/(DQ/DB)
   IPHI = IPHI + 1
   ETASP = 1.0/SORT (X(NX)*RHG)
   PHI = (F(NP,2) + U(NP,2)*(ETASP - ETA(NP)))/ETASP - 1.0
   DPHI = (DELV(NP) + (ETASP - ETA(NP))/U(NP,2))/ETASP
   DBETA = PHI/DPHI
   WRITE (6,9400) BETA,DBETA
   BETA = BETA - DBETA
   IT = 0
   IF (ABS(DBETA) .GT. 0.0001) GO TO 40
80 CONTINUE
C ВЫВОД НА ПЕЧАТЬ
   WRITE (6,4400)
   WRITE (6,4500) (J,ETA(J),F(J,2),U(J,2),V(J,2),G(J,2),P(J,2),
1 B(J,2),J=1,NP,5)
   WRITE (6,4500) NP,ETA(NP),F(NP,2),U(NP,2),V(NP,2),G(NP,2),P(NP,2),
1 B(NP,2)
   NX = NX+1
   IF (NX .GT. NXT) STOP
C СМЕШЕНИЕ ПРОФИЛЕЙ
   DO 110 J=1,NP
   F(J,1) = F(J,2)
   U(J,1) = U(J,2)
   V(J,1) = V(J,2)
   G(J,1) = G(J,2)
   P(J,1) = P(J,2)
   E(J,1) = E(J,2)
110 B(J,1) = B(J,2)
   GO TO 30
C -----
8000 FORMAT (8I3)
8100 FORMAT (8F10.0)
3000 FORMAT (1H ,8HV(WALL) = ,E13.6,2X,6HDELV = ,E13.6)

```

```

4400 FORMAT (1H0, 2X, 1HJ, 4X, 3HETA, 9X, 1HF, 13X, 1HU, 13X, 1HV, 13X, 1HG, 13X, 1HP,
1      13X, 1HB)
4500 FORMAT (1H , I3, F10.3, 6E14.6)
7000 FORMAT (1H0, 4HPR =, E12.5, 5X, 'RH/GR =', E12.5/1H0, 5HNT =, I3,
1      5X, 6HETA =, E12.5, 3X, 6HETA1 =, E12.5, 3X, 6HVGP =, E12.5)
2500 FORMAT (1H0, 16X, 25HITERATIONS EXCEEDED ITMAX)
9000 FORMAT (1H0, 'NP EXCEEDED NPT -- PROGRAM TERMINATED')
9100 FORMAT (1H0, 4HNX =, I3, 5X, 3HX =, F10.3/)
9400 FORMAT (1H , 79X, 2E14.6)
9410 FORMAT (1H0, 84X, 4HBETA, 9X, 5HDBETA)
END

```

Пример вычислений

В табл. 14.1 приведены вычисленные значения параметров напряжений сдвига на стенке и плотности теплового потока для случая постоянной температуры стенки при $Pr = 0,72$, $R_L/Gr_L = 1$, $A_1 = 0,16$ и $K = 1$ для всех шести рассмотренных сечений по ξ . Отметим, что при $\xi = 0$ характеристики рассматриваемого течения совпадают с характеристиками течения без подогрева в пограничном слое с нулевым градиентом давления; при расчете течения в этом сечении метод собственных значений не используется.

Не следует забывать, что вблизи входа в канал влияние выталкивающих сил мало, в частности мало число Ричардсона, определяемое выражением (9.66b), поскольку толщина сдвигового слоя здесь близка к нулю. По мере увеличения ξ влияние выталкивающих сил становится все заметнее. В табл. 14.1 приведены результаты расчета при малых значениях ξ , так как для простоты было рассмотрено течение до слияния сдвиговых слоев. Чтобы наблюдать влияние выталкивающих сил в его развитой форме (разд. 9.4), необходимо продолжить счет до больших значений ξ и иметь возможность рассчитывать сдвиговые слои после их слияния.

Таблица 14.1. Расчетные значения параметров напряжений сдвига и плотности теплового потока на стенке при постоянной температуре стенки; $Pr = 0,72$ и $R_L/Gr_L = 1$

$\xi \times 10^3$	f_w''	g_w'
0	0,3320	-0,2956
0,0025	0,4881	-0,3327
0,005	0,4802	-0,3305
0,0075	0,5366	-0,3419
0,01	0,5490	-0,3444
0,015	0,6088	-0,3556

14.2. Пристенная струя и завесный нагрев

Рассмотрим теперь пристенную струю с начальной температурой T_j , вдуваемую вертикально вверх вдоль поверхности стенки с постоянной температурой T_w , на которой имеется пограничный слой, также текущий вверх, причем скорость внешнего потока в месте вдува равна u_e . Такое течение рассматривалось выше в разд. 9.3, однако там стенка была теплоизолированной, а не имеющей постоянную температуру, как в данном случае. Дифференциальные уравнения и граничные условия, описывающие такое течение в преобразованной системе координат при малых значениях ξ , соответствуют уравнениям (9.76). Как указывалось в разд. 9.3, потребуются также начальные условия при $\xi = \xi_0$. В данном случае зададим начальные профили скорости (разд. 9.3) в преобразованных переменных следующими выражениями:

$$u = \begin{cases} 6u_c \left(\frac{\eta}{\eta_c} \right) \left(1 - \frac{\eta}{\eta_c} \right) & 0 \leq \eta \leq \eta_c, \\ u_e \sin \left[\frac{\pi}{2} \frac{\eta - \eta_c}{\eta_e - \eta_c} \right] & \eta_c \leq \eta \leq \eta_e. \end{cases} \quad (14.19a)$$

$$(14.19b)$$

Через u_c здесь обозначена средняя скорость струи. Как видно из рис. 4.18, профиль скорости имеет разрыв при значении η_c , соответствующем преобразованной высоте щели y_c . Чтобы избежать связанных с этим трудностей, воспользуемся эрмитовой или тригонометрической интерполяцией [4], которая позволяет получить сглаженный профиль скорости (рис. 4.19), описываемый выражением

$$u(\eta) = u(\eta_1)\psi_1(\eta) + u(\eta_2)\psi_2(\eta) + u'(\eta_1)\bar{\psi}_1(\eta) + u'(\eta_2)\bar{\psi}_2(\eta). \quad (14.20)$$

Здесь штрихами обозначено дифференцирование по η , а

$$\begin{aligned} \psi_1(\eta) &= \left(1 - 2 \frac{\eta - \eta_1}{\eta_1 - \eta_2} \right) \left(\frac{\eta - \eta_2}{\eta_1 - \eta_2} \right)^2, \\ \bar{\psi}_1(\eta) &= (\eta - \eta_1) \left(\frac{\eta - \eta_2}{\eta_1 - \eta_2} \right)^2, \\ \psi_2(\eta) &= \left(1 + 2 \frac{\eta - \eta_2}{\eta_1 - \eta_2} \right) \left(\frac{\eta_1 - \eta}{\eta_1 - \eta_2} \right)^2, \\ \bar{\psi}_2(\eta) &= (\eta - \eta_2) \left(\frac{\eta_1 - \eta}{\eta_1 - \eta_2} \right)^2. \end{aligned} \quad (14.21)$$

Будем предполагать, что начальное распределение температуры определяется равномерным распределением температуры в плоскости выходного сечения щели, которая выше постоянной температуры набегающего потока, но ниже постоянной температуры стенки. Чтобы избежать трудностей, связанных с разрывами на стенке и на внешней границе щели (разд. 4.5), вновь воспользуемся простыми сглаженными функциями. Начальный профиль температуры можно задать уравнением (8.37), которое представим в виде

$$g = \frac{1}{2}[1 - \operatorname{th} \beta(\eta - \eta_c)]. \quad (14.22)$$

Переход к конечно-разностным уравнениям

Переписав основные уравнения, описывающие рассматриваемое течение, в виде системы уравнений первого порядка, можно заметить, что они мало отличаются от уравнений (14.2) и (14.3) и имеют вид

$$v' + \frac{1}{2}fv = \operatorname{Ri}zg + z\left(u\frac{\partial u}{\partial z} - v\frac{\partial f}{\partial z}\right), \quad (14.23)$$

$$\frac{p'}{\operatorname{Pr}} + \frac{1}{2}fp = z\left(u\frac{\partial g}{\partial z} - p\frac{\partial f}{\partial z}\right), \quad (14.24)$$

$$\eta = 0, \quad f = u = 0, \quad g = 1; \quad \eta = \eta_c, \quad u = 1, \quad g = 0, \quad (14.25)$$

а в конечно-разностной форме — вид уравнений (14.5)—(14.7), в которые надо внести очевидные изменения, обусловленные различиями между уравнениями (14.2) и (14.3), с одной стороны, и уравнениями (14.23) и (14.24) — с другой. Граничные условия (14.25) теперь принимают вид

$$f_0 = u_0 = 0, \quad g_0 = 1; \quad u_J = 1, \quad g_J = 0. \quad (14.26)$$

Отметим, что ускорение силы тяжести входит в выражение для числа Ричардсона Ri , а через g обозначена безразмерная разность температур.

Программа на языке Фортран

Теперь можно использовать программу, описанную в разд. 14.1, для решения сформулированной задачи. Поскольку вариационные уравнения не входят в число решаемых, то программа SOLV5 не содержит дополнительного оператора и имеет вид подпрограммы,

описанной в разд. 13.4. Подпрограмма COEF теперь содержит только определения, связанные со *стандартной задачей*, и поэтому нет необходимости вводить операторы, используемые в вариационной задаче.

Единственное значительное изменение необходимо внести в подпрограмму IVPL, в которой задаются начальные профили скорости и температуры, определяемые уравнениями (14.19) и (14.22). Продифференцировав эти уравнения, получим производные f'' и g' . Чтобы получить сглаженный профиль скорости в соответствии с уравнениями (14.20) и (14.21), воспользуемся еще одной подпрограммой, называемой HER. Здесь $\psi_1(\eta) = SY1$, $\psi_2(\eta) = SY2$, $\bar{\psi}_1(\eta) = CSY1$ и $\bar{\psi}_2(\eta) = CSY2$. Обе эти подпрограммы вместе с программой MAIN приводятся ниже вслед за примером расчета.

Пример расчета

В табл. 14.2 приведены результаты расчетов, выполненных с помощью скорректированной программы при $u_c/u_e = 0,50$. Счет начинался при $z = 1$ и $Ri = 0,10$ с введения начальных профилей скорости и температуры, как указывалось выше. Поскольку эти профили очень быстро изменяются, особенно в области сопряжения, то поперек слоя приходится вводить сетку переменного шага.

Таблица 14.2. Расчетные значения параметров напряжений сдвига и плотности теплового потока на стенке для ламинарной пристенной струи на поверхности вертикальной плоской пластины; $Pr = 0,72$, $Ri = 0,10$, $u_c/u_e = 0,50$

z	θ'_w	f''_w
1	0	1,0
1,005	-0,00005	0,874
1,01	-0,00009	0,813
1,02	-0,00012	0,793
1,05	-0,00036	0,713
⋮	⋮	⋮
1,35	-0,040	0,503
1,40	-0,050	0,473
1,45	-0,061	0,482
1,50	-0,071	0,458

(Именно по этой причине начальные профили удобно задавать в аналитическом виде, а не в виде таблиц, так как в последнем случае пришлось бы интерпретировать табличные значения.) В рассматриваемом случае полагаем $\eta_c = 3$, $\eta_1 = 0,95\eta_c$, $\eta_2 = 1,05\eta_c$ и $\eta_e = 8,85$. В интервалах $0 \leq \eta \leq \eta_1$ и $\eta_2 \leq \eta \leq 8,85$ примем $\Delta\eta = 0,15$ и $K = 1$, а в области сопряжения выберем, как и прежде, равномерный шаг по η , приняв $\Delta\eta = 0,075$. В ряде случаев в области сопряжения может потребоваться еще более мелкий шаг.

```

C      НАБОР ДАННЫХ AKNWMAIN НА УРОВНЕ 004 04/01/83
C      MAIN
COMMON /AK1/  RL, PR, UC, FR
COMMON /EDGE/ P1 (60), P2 (60)
COMMON /INPT1/ FN, ALFA0, ALFA1
COMMON /BLCD/ NP, NPT, NX, NXT, NTR, IT, NXS
COMMON /BLC1/ F (99, 2), U (99, 2), V (99, 2), W (99, 2), G (99, 2), P (99, 2),
1      E (99, 2)
COMMON /GRD/ X (60), ETA (99), DELTA (99), A (99)
COMMON /BLC3/ DELF (99), DELU (99), DELV (99), DELG (99), DELP (99)
COMMON /GRD2/ DELTA1, DELTA2, DELTA3, DELTA4, XETA1, XETA2, ETAC, ETAE
COMMON /STORE/ FS (99), US (99), VS (99), GS (99), PS (99)
C - - - - -
C FN = -1.0  ДЛЯ ОХЛАЖДАЕМОЙ ПЛАСТИНЫ ВЫТАЛКИВАЮЩАЯ
              СИЛА НАПРАВЛЕНА ПРОТИВ ТЕЧЕНИЯ
C FN = 1.0   ДЛЯ НАГРЕВАЕМОЙ ПЛАСТИНЫ ВЫТАЛКИВАЮЩАЯ
              СИЛА НАПРАВЛЕНА ПО ТЕЧЕНИЮ
C ALFA 0 = 1.0, ALFA 1 = 0.0 ЗАДАНА ТЕМПЕРАТУРА СТЕНКИ (G(1, 2) = 1.0)
C ALFA 0 = 0.0, ALFA 1 = 1.0 ЗАДАНА ПЛОТНОСТЬ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА
              НА СТЕНКЕ (P(1,2) СЧИТЫВАЕТСЯ)
C ***** ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ *****
      ITMAX = 6
      NX = 1
      NPT = 99
      READ (5, 8000) NXT, NXS, NXSM
      READ (5, 8100) DELTA (1), VGP, ETAE, ETAC, XETA1, XETA2, ALFA0, ALFA1
      READ (5, 8100) PR, FN, RL, UAV, FR, DELTA2, DELTA3
      READ (5, 8100) (X(I), I=1, NXT)
      UC = 6.0*UAV
      WRITE (6, 7000) PR, FN, UAV, FR
      WRITE (6, 7100) NXT, NTR, NXS, NXSM, ETAE, DELTA (1), DELTA2, DELTA3, VGP
      DO 20 I=1, NXT
20  X(I) = X(I)/FR
C ФОРМИРОВАНИЕ СЕТКИ В IVPL
      CALL IVPL
30  IT = 0
      DX = (X(NX) - X(1))/FR
      WRITE (6, 9100) NX, X(NX), DX
      P1(NX) = 0.0
      P2(NX) = 0.0
      IF (NX .GT. NXS) P1(NX) = 0.5
      IF (NX .EQ. 1) GO TO 100
40  IT = IT+1
      IF (IT .LE. ITMAX) GO TO 60
      WRITE (6, 2500)
      GO TO 80
60  CONTINUE
      CALL COEF
      CALL SOLV5
      WRITE (6, 3000) V(1, 2), DELV(1)

```

```

C ПРОВЕРКА СХОДИМОСТИ
  IF (ABS (DELV(1)) .GT. 1.0E-05) GO TO 40
  IF (V(1,2) .LT. 0.0) STOP
80 CONTINUE
  IF (NP .GE. NPT) GO TO 100
  IF (ABS (V (NP,2)) .LT. 0.0005) GO TO 100
  NP = NP + 1
  DO 90 L=1,2
  DO 85 J=NP,NP
    U(J,L) = U(J-1,L)
    V(J,L) = 0.0
    G(J,L) = 0.0
    P(J,L) = 0.0
    F(J,L) = F(J-1,L) + DELTA(J-1)*U(J,L)
    B(J,L) = B(J-1,L)
    E(J,L) = E(J-1,L)
  85 CONTINUE
  90 CONTINUE
  IT = 1
  WRITE (6,4600)
  GO TO 40
100 CONTINUE
C ВЫВОД НА ПЕЧАТЬ
  WRITE (6,4400)
  WRITE (6,4500) (J,ETA(J),F(J,2),U(J,2),V(J,2),G(J,2),P(J,2),
  1 B(J,2),J=1,NP)
  IF (NX .NE. NXSM) GO TO 120
  NXSM = 1000
  X1 = X(NX) - X(NX-1)
  X2 = X(NX-1) - X(NX-2)
  DO 110 J=1,NP
    F(J,1) = 0.5*(X2*(F(J,2)+F(J,1)) + X1*(F(J,1)+FS(J)))/(X1+X2)
    U(J,1) = 0.5*(X2*(U(J,2)+U(J,1)) + X1*(U(J,1)+US(J)))/(X1+X2)
    V(J,1) = 0.5*(X2*(V(J,2)+V(J,1)) + X1*(V(J,1)+VS(J)))/(X1+X2)
    G(J,1) = 0.5*(X2*(G(J,2)+G(J,1)) + X1*(G(J,1)+GS(J)))/(X1+X2)
    P(J,1) = 0.5*(X2*(P(J,2)+P(J,1)) + X1*(P(J,1)+PS(J)))/(X1+X2)
  110 CONTINUE
  IT = 1
  GO TO 40
120 CONTINUE
  IF (NX .EQ. NXS) P1(NX) = 0.5
  NX = NX+1
  IF (NX .GT. NXT) STOP
C СМЕЩЕНИЕ ПРОФИЛЕЙ
  DO 140 J=1,NP
    F(J,1) = F(J,2)
    U(J,1) = U(J,2)
    V(J,1) = V(J,2)
    G(J,1) = G(J,2)
    P(J,1) = P(J,2)
    E(J,1) = E(J,2)
    B(J,1) = B(J,2)
  140 CONTINUE
  IF (NX .NE. (NXSM-2)) GO TO 30
  DO 160 J=1,NPT
    US(J) = U(J,2)
    VS(J) = V(J,2)
    GS(J) = G(J,2)
    PS(J) = P(J,2)
    FS(J) = F(J,2)
    IF (J .LE. NP) GO TO 160
    US(J) = US(J-1)
    VS(J) = 0.0
    GS(J) = 0.0
    PS(J) = 0.0
    FS(J) = FS(J-1) + DELTA(J-1)
  160 CONTINUE
  GO TO 30

```

```

C -----
8000 FORMAT(8I3)
8100 FORMAT(8F10.0)
3000 FORMAT(1H , 8HV (HALL) =, E13.6, 2X, 6HDELV =, E13.6)
4400 FORMAT(1HD, 2X, 1HJ, 4X, 3HETA, 9X, 1HF, 13X, 1HU, 13X, 1HV, 13X, 1HG, 13X, 1HP,
1      13X, 1HB)
4500 FORMAT(1H , I3, F10.3, 6E14.6)
4600 FORMAT(1HD)
7000 FORMAT(1HD, 'PR =', F6.2, 3X, 'FN =', F5.2, 3X, 'UAV =', F6.2, 3X,
1      'FR NO =', F6.2/)
7100 FORMAT(1HD, 'NXT=', I3, 2X, 'NTR=', I3, 2X, 'NXS=', I3, 2X, 'NXSM=', I2,
1      3X, 'ETAЕ=', F5.2, 2X, 'DETA1=', F5.3, 2X, 'DETA2=', F5.3, 2X,
2      'DETA3=', F5.3, 2X, 'VGP=', F5.3/)
2500 FORMAT(1HD, 16X, 25HITERATIONS EXCEEDED ITMAX)
9100 FORMAT(1HD, 4HNX =, I3, 5X, 3HX =, F10.3, 3X, 'X-X0 =', E12.5/)
END

SUBROUTINE IVPL
COMMON /BLCD/ NP, NPT, NX, NXT, NTR, IT, NXS
COMMON /BLC1/ F(99, 2), U(99, 2), V(99, 2), B(99, 2), G(99, 2), P(99, 2),
1      E(99, 2)
COMMON /GRD2/ DETA1, DETA2, DETA3, DETA4, ХЕТА1, ХЕТА2, ЕТАС, ЕТАЕ
COMMON /GRD/ X(60), ЕТА(99), DETA(99), A(99)
COMMON /AK1/ RL, PR, UC, FR
C -----
C      NC ПОСЛЕДНЯЯ ТОЧКА ДЛЯ СТРУИ
C      NMJ ПОСЛЕДНЯЯ ТОЧКА ДЛЯ ЭРМИТОВА ПОЛИНОМА
C      DETA 1 РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ УЗЛАМИ ДЛЯ ОБЛАСТИ СТРУИ
C      DETA 2 РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ УЗЛАМИ ДЛЯ ОБЛАСТИ ЭРМИТОВА ПОЛИНОМА
C      DETA 3 РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ УЗЛАМИ ДЛЯ ОБЛАСТИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ
C-----
PI = 3.14159
UD = 1.0
DETA1 = DETA(1)
ETA1 = ХЕТА1*ЕТАС
ETA2 = ХЕТА2*ЕТАС
NC = DETA1/DETA1 + 1.0001
NMJ = (ETA2-ETA1)/DETA2 + NC
NC1 = NC+1
NP = (ETAЕ-ETA2)/DETA3 + NMJ
C ФОРМИРОВАНИЕ СЕТКИ
ETA(1) = 0.0
DO 10 J=2, NC
10 ETA(J) = ETA(J-1) + DETA1
DO 20 J=NC1, NMJ
20 ETA(J) = ETA(J-1) + DETA2
NMJ1 = NMJ + 1
DO 30 J=NMJ1, NPT
30 ETA(J) = ETA(J-1) + DETA3
C ***** ВЪИЧИСЛЕНИЕ ПРОФИЛЕЙ U, V *****
C ***** НИЖНЯЯ ЧАСТЬ (СТРУЯ) *****
DO 50 J=1, NC1
ЕВЕТАС = ETA(J)/ЕТАС
U(J, 2) = UC*ЕВЕТАС*(1.0-ЕВЕТАС)
V(J, 2) = UC/ЕТАС*(1.0-2.0*ЕВЕТАС)
50 CONTINUE
C ***** ВЕРХНЯЯ ЧАСТЬ *****
DO 60 J=NMJ, NP
U(J, 2) = UD*SIN(0.5*PI*(ETA(J)-ЕТАС)/(ETA(NP)-ЕТАС))
V(J, 2) = 0.5*PI*UD*COS(0.5*PI*(ETA(J)-ЕТАС)/(ETA(NP)-ЕТАС))/
1      (ETA(NP)-ЕТАС)
60 CONTINUE
DO 70 J=NC1, NMJ
70 CALL HER(NC1, NMJ, J, ЕТАС, ЕТА)
DO 140 J=1, NP
G(J, 2) = 0.5*(1.0 - TANH(2.0*(ETA(J) - ЕТАС)))
P(J, 2) = -1.0/COSH(2.0*(ETA(J) - ЕТАС))**2

```

```

B(J,2) = 1.0
E(J,2) = B(J,2)/PR
140 CONTINUE
P(NP,2) = 0.0
P(1,2) = 0.0
SQFR = 1.0
DO 150 J=2,NPT
ETA(J) = ETA(J)/SQFR
DETA(J-1) = ETA(J) - ETA(J-1)
A(J) = 0.5*DETA(J-1)
150 CONTINUE
DO 160 J=1,NP
V(J,2) = V(J,2)*SQFR
P(J,2) = P(J,2)*SQFR
IF(J.EQ.1) GO TO 160
F(J,2) = F(J-1,2) + A(J)*(U(J,2) + U(J-1,2))
160 CONTINUE
WRITE(6,9000) ETAC, XETA1, XETA2, ETA(NC), ETA(NMJ)
WRITE(6,9500) (J,ETA(J),F(J,2),U(J,2),V(J,2),G(J,2),P(J,2),J=1,NP)
RETURN
C -----
9000 FORMAT(1H0,5HETAC=,F10.6,5X,6HXETA1=,F10.6,5X,6HXETA2=,F10.6,5X,
1 SHETA1=,F10.6,5X,5HETA2=,F10.6)
9500 FORMAT(1H0,2X,1HJ,7X,3HETA,14X,1HF,17X,1HU,17X,1HV,17X,1HG,17X,1HP
1 / (1H ,I4,F12.5,5E18.6))
END
SUBROUTINE HER (NC,NMJ,J,YC,Y)
COMMON /BLC1/ F(99,2),U(99,2),V(99,2),B(99,2),G(99,2),P(99,2),
1 E(99,2)
DIMENSION Y(1)
C -----
Y12 = Y(NC) - Y(NMJ)
Y12SQ = Y12*Y12
SY1 = (1.0-2.0*(Y(J)-Y(NC))/Y12)*(Y(J)-Y(NMJ))/Y12**2
SY2 = (1.0+2.0*(Y(J)-Y(NMJ))/Y12)*(Y(NC)-Y(J))/Y12**2
CSY1 = (Y(J)-Y(NC))*(Y(J)-Y(NMJ))/Y12**2
CSY2 = (Y(J)-Y(NMJ))*(Y(NC)-Y(J))/Y12**2
DSY1 = (2.0*(Y(J)-Y(NMJ))*(1.0-2.0*(Y(J)-Y(NC))/Y12)-2.0/Y12*
1 (Y(J)-Y(NMJ))**2)/Y12SQ
DSY2 = (-2.0*(Y(NC)-Y(J))*(1.0+2.0*(Y(J)-Y(NMJ))/Y12)+2.0/Y12*
1 (Y(NC)-Y(J))**2)/Y12SQ
DCSY1 = (2.0*(Y(J)-Y(NC))*(Y(J)-Y(NMJ))+Y(J)-Y(NMJ))**2)/Y12SQ
DCSY2 = (-2.0*(Y(NC)-Y(J))*(Y(J)-Y(NMJ))+Y(NC)-Y(J))**2)/Y12SQ
PY1 = ((1.0-2.0*(Y(J)-Y(NC))/Y12)*(Y(J)-Y(NMJ))**3/3.0+(Y(J)-
1 Y(NMJ))**4/(6.0*Y12))/Y12SQ
CPY1 = ((Y(J)-Y(NC))*(Y(J)-Y(NMJ))**3/3.0 - (Y(J)-Y(NMJ))**4/12.0)/
1 Y12SQ
PY2 = ((1.0+2.0*(Y(J)-Y(NMJ))/Y12)*(Y(J)-Y(NC))**3/3.0 - (Y(J)-
1 Y(NC))**4/(6.0*Y12))/Y12SQ
CPY2 = ((Y(J)-Y(NMJ))*(Y(J)-Y(NC))**3/3.0 - (Y(J)-Y(NC))**4/12.0)/
1 Y12SQ
U(J,2) = U(NC,2)*SY1+U(NMJ,2)*SY2+V(NC,2)*CSY1+V(NMJ,2)*CSY2
V(J,2) = U(NC,2)*DSY1+U(NMJ,2)*DSY2+V(NC,2)*DCSY1+V(NMJ,2)*DCSY2
RETURN
END

```

14.3. Нагретая свободная турбулентная струя

В разд. 8.1 и 8.3 рассматривались несопряженные течения в ламинарных и турбулентных струях, истекающих в затопленное пространство. Здесь будет рассмотрено применение программы, описанной в разд. 13.5, для расчета плоской неавтономной нагретой турбулентной струи.

Плоская ламинарная нагретая струя описывается преобразованными уравнениями пограничного слоя (8.35) и (8.36). Используя понятия турбулентной вязкости и турбулентного числа Прандтля, можно переписать эти уравнения в виде

$$(bf'')' + (f')^2 + ff'' = 3\xi \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right), \quad (14.27)$$

$$(e\theta')' + f\theta' = 3\xi \left(f' \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \theta' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right). \quad (14.28)$$

Здесь θ — безразмерная температура; кроме того,

$$b = 1 + \varepsilon_m^+, \quad e = \frac{1}{\text{Pr}} + \frac{\varepsilon_m^+}{\text{Pr}_t}. \quad (14.29)$$

Граничные условия для уравнений (14.27) и (14.28) можно получить из (8.18) и записать в виде

$$\eta = 0; \quad f = f'' = 0, \quad \theta' = 0; \quad \eta = \eta_e, \quad f' = 0, \quad \theta = 0. \quad (14.30)$$

Для системы уравнений (14.27)—(14.30) надо также задать начальные условия. Для простоты зададим однородные профили скорости и температуры и представим их в безразмерной форме с помощью уравнения (8.37), которое, применив преобразование (8.34), приведем к виду

$$\frac{f'}{3\xi_0^{1/3}} = \theta = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \text{th} \beta \left[\frac{3\xi_0^{2/3}}{\sqrt{R_L}} (\eta - \eta_c) \right] \right\}. \quad (14.31)$$

Здесь $R_L = u_0 L / \nu$ — безразмерное число Рейнольдса; ξ_0 — значение продольной координаты ξ , при котором заданы начальные профили, а L — характерная длина, равная полуширине канала.

Воспользуемся моделью турбулентной вязкости, заданной уравнением (8.59), а число Прандтля Pr_t примем равным 0,5. Поскольку $\varepsilon_m^+ \gg 1$, то в первом из уравнений (14.29) пренебрежем единицей по сравнению с ε_m^+ (т. е. примем $b = \varepsilon_m^+$), которое представим в преобразованных переменных в виде

$$\varepsilon_m^+ = 0,037 \sqrt{R_L} \xi^{1/3} \eta_{1/2} f'_c. \quad (14.32)$$

Здесь $\eta_{1/2}$ — преобразованное расстояние η , на котором $u = 0,5u_c$, а f'_c — безразмерная скорость на оси потока.

Таблица 14.3. Изменение безразмерных скорости и температуры на оси нагретой турбулентной струи; $Pr = 0,72$, $R_L = 5300$

ξ	f'_c	g_c
1	3,0	0,999997
1,005	3,005	0,999997
1,01	3,010	0,999997
1,02	3,020	0,999996
1,05	3,049	0,999995
⋮	⋮	⋮
1,50	3,436	0,999388
1,55	3,473	0,999104
1,60	3,509	0,99873
⋮	⋮	⋮
10,0	4,5925	0,692689

Переход к конечно-разностным уравнениям

Как и в разд. 13.4, преобразованные уравнения представим в виде системы уравнений первого порядка. Воспользовавшись определениями (13.54a—c) и, как и прежде, заменив θ на g , приведем уравнения (14.27), (14.28) и (14.30) к виду

$$(bv)' + u^2 + fv = 3\xi \left(u \frac{\partial u}{\partial \xi} - v \frac{\partial f}{\partial \xi} \right), \tag{14.33}$$

$$(ep)' + fp = 3\xi \left(u \frac{\partial g}{\partial \xi} - p \frac{\partial f}{\partial \xi} \right), \tag{14.34}$$

$$\eta = 0, \quad f = v = p = 0; \quad \eta = \eta_e, \quad u = g = 0. \tag{14.35}$$

Конечно-разностные аналоги уравнений (14.33) и (14.34) запишем в той же форме, что и уравнения (13.56d—e):

$$h_j^{-1} (b_j^n v_j^n - b_{j-1}^n v_{j-1}^n) + (1 + \alpha_n)(fv)_{j-1/2}^n + (1 - \alpha_n)(u^2)_{j-1/2}^n + \alpha_n (v_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^n - f_{j-1/2}^{n-1} v_{j-1/2}^n) = R_{j-1/2}^{n-1}, \tag{14.36a}$$

$$h_j^{-1} (e_j^n p_j^n - e_{j-1}^n p_{j-1}^n) + (fp)_{j-1/2}^n - \alpha_n [(ug)_{j-1/2}^n + u_{j-1/2}^{n-1} g_{j-1/2}^n - g_{j-1/2}^{n-1} u_{j-1/2}^n - (fp)_{j-1/2}^n + f_{j-1/2}^{n-1} p_{j-1/2}^n - p_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^n] = T_{j-1/2}^{n-1}, \tag{14.36b}$$

где α_n определяется выражением

$$\alpha_n = \frac{3\xi_{n-1/2}}{\xi_n - \xi_{n-1}}, \quad (14.37)$$

а $R_{j-1/2}^{n-1}$, $L_{j-1/2}^{n-1}$, $T_{j-1/2}^{n-1}$ и $M_{j-1/2}^{n-1}$ имеют вид

$$R_{j-1/2}^{n-1} = -L_{j-1/2}^{n-1} + \alpha_n [(fv)_{j-1/2}^{n-1} - (u^2)_{j-1/2}^{n-1}], \quad (14.38a)$$

$$L_{j-1/2}^{n-1} = h_j^{-1} (b_j^{n-1} v_j^{n-1} - b_{j-1}^{n-1} v_{j-1}^{n-1}) + (u^2)_{j-1/2}^{n-1} + (fv)_{j-1/2}^{n-1}, \quad (14.38b)$$

$$T_{j-1/2}^{n-1} = -M_{j-1/2}^{n-1} + \alpha_n [(fp)_{j-1/2}^{n-1} - (ug)_{j-1/2}^{n-1}], \quad (14.38c)$$

$$M_{j-1/2}^{n-1} = h_j^{-1} (e_j^{n-1} p_j^{n-1} - e_{j-1}^{n-1} p_{j-1}^{n-1}) + (fp)_{j-1/2}^{n-1}. \quad (14.38d)$$

Полученные нелинейные разностные уравнения линеаризуем методом Ньютона, описанным в разд. 13.4. В результате получим уравнения, совпадающие с уравнениями (13.62) и (13.63), за исключением коэффициентов $(r_2)_j$ и $(r_3)_j$, которые теперь имеют вид

$$(r_2)_j = R_{j-1/2}^{n-1} - \left[h_j^{-1} (b_j v_j - b_{j-1} v_{j-1}) + (1 + \alpha_n) (fv)_{j-1/2} + (1 - \alpha_n) (u^2)_{j-1/2} + \alpha_n (v_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2} - f_{j-1/2}^{n-1} v_{j-1/2}) \right], \quad (14.39a)$$

$$(r_3)_j = T_{j-1/2}^{n-1} - \left[h_j^{-1} (e_j p_j - e_{j-1} p_{j-1}) + (fp)_{j-1/2} - \alpha_n \{ (ug)_{j-1/2} + u_{j-1/2}^{n-1} g_{j-1/2} - g_{j-1/2}^{n-1} u_{j-1/2} - (fp)_{j-1/2} + f_{j-1/2}^{n-1} p_{j-1/2} - p_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2} \} \right]. \quad (14.39b)$$

Коэффициенты уравнения движения $(s_k)_j$ совпадают с коэффициентами уравнений (13.64), если принять $m_1 = 1$ и $m_2 = -1$. Коэффициенты уравнения энергии $(\beta_k)_j$, где $k = 3, \dots, 10$, также совпадают с коэффициентами уравнений (13.65с—j) при условии, что $m_1 = 0$, и $d_j = 0$. Коэффициенты $(\beta_1)_j$ и $(\beta_2)_j$ определяются выражениями

$$(\beta_1)_j = h_j^{-1} e_j^{(i)} + \frac{1}{2} f_j^{(i)} + \frac{\alpha_n}{2} (f_j^{(i)} - f_{j-1/2}^{n-1}), \quad (14.40a)$$

$$(\beta_2)_j = -h_j^{-1} e_{j-1}^{(i)} + \frac{1}{2} f_{j-1}^{(i)} + \frac{\alpha_n}{2} (f_{j-1}^{(i)} - f_{j-1/2}^{n-1}). \quad (14.40b)$$

Линеаризованные граничные условия имеют вид

$$\delta f_0 = \delta v_0 = 0, \quad \delta p_0 = 0; \quad \delta u_j = 0, \quad \delta g_j = 0. \quad (14.41)$$

Программа на языке Фортран

Чтобы решить систему линейных уравнений (13.62) и (13.63) с учетом указанных выше изменений при граничных условиях (14.41) и пользуясь моделью турбулентности (14.32), в программу для ЭВМ, описанную в разд. 13.5, придется ввести некоторые изменения. Введем начальные профили скорости и температуры, определяемые уравнением (14.31), в подпрограмму IVPL, коэффициенты линеаризованных конечно-разностных уравнений $(s_k)_j$, $(\beta_j)_j$ и $(r_k)_j$ в подпрограмму COEF, а формулу для турбулентной вязкости (14.32) в программу MAIN.

В рассматриваемом случае граничные условия для уравнения движения на оси потока отличаются от соответствующего граничного условия, использованного в программе, описанной в разд. 13.5. Вместо $\delta u_0 = 0$ теперь в (14.41) имеем $\delta v_0 = 0$. Поэтому вторую строку матрицы \mathbf{A}_0 в уравнении (13.68a) надо заменить строкой

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0. \quad (14.42)$$

Чтобы приспособить граничное условие на оси потока $\delta p_0 = 0$ для уравнения энергии, надо принять $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_1 = 1,0$. В подпрограмме SOLV5 граничные условия остаются без изменений.

Ниже приводится текст новой программы, состоящей из программы MAIN и трех подпрограмм IVPL, COEF и SOLV5:

```

C      MAIN
COMMON /INPT1/ MW(60), ALFAD, ALFA1
COMMON /BLCD/ NP, NPT, NX, NXT, NTR, IT
COMMON /BLC1/ F(61,2), U(61,2), V(61,2), B(61,2), G(61,2), P(61,2),
1      C(61,2), D(61,2), E(61,2), RMU(61), BC(61)
COMMON /GRD/ X(60), ETA(61), DELTA(61), A(61)
COMMON /EDGE/ UE(60), TE(60), RHOE(60), RMUE(60), PE(60), P1(60), P2(60)
COMMON /BLC3/ DELF(61), DELU(61), DELV(61), DELG(61), DELP(61)
COMMON /AK1/ GW, PR, PRT, RL
C - - - - -
      EPS = 0.0001
      ITMAX = 6
      NX = 1
      NPT = 61
      PRT = 0.9
C      ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ
C      ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННАЯ ALFA 0 = 0.0 ALFA 1 = 1.0
C      ЗАДАНА ТЕМПЕРАТУРА СТЕНКИ ALFA 0 = 1.0 ALFA 1 = 0.0
      READ(5,8000) NXT, NTR
      READ(5,8100) ETAE, DELTA(1), VGP, ALFAD, ALFA1, PR, RL
      READ(5,8100) (X(I), I=1, NXT)
      SGRL = SQRT(RL)
      WRITE(6,7000) NXT, NTR, PR, ETAE, DELTA(1), VGP, RL
    
```

```

C ФОРМИРОВАНИЕ СЕТКИ
  IF ((VGP-1.0) .LE. 0.001) GO TO 5
  NP = ALOG ((ETAЕ/DETA (1)) * (VGP-1.0) + 1.0) /ALOG (VGP) + 1.0001
  GO TO 10
5 NP = ETAЕ/DETA (1) + 1.0001
10 IF (NP .LE. 61) GO TO 15
  WRITE (6,9000)
  STOP
15 ETA (1) = 0.0
  DO 20 J=2, NPT
  DETA (J) = VGP * DETA (J-1)
  A (J) = 0.5 * DETA (J-1)
20 ETA (J) = ETA (J-1) * DETA (J-1)
  CALL IVPL
30 WRITE (6,9100) NX, X (NX)
  P1 (NX) = 1.0
  P2 (NX) = -1.0
  IF (NX .EQ. 1) GO TO 90
  IT = 0
40 IT = IT + 1
  IF (IT .LE. ITMAX) GO TO 60
  WRITE (6,2500)
  GO TO 90
60 CONTINUE
  IF (NX .LT. NTR) GO TO 80
C ВЫЧИСЛЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ ПО ФОРМУЛЕ ШЛИХТИНГА
C EDDY = 0.037 * В * UMAX, ГДЕ В — ПОЛУШИРИНА
  EPS = 0.02
  UMAXH = 0.5 * U (1, 2)
  DO 1 J=1, NP
  IF (U (J, 2) .LT. UMAXH) GO TO 2
1 CONTINUE
  ETAB = ETA (NP)
  GO TO 3
2 ETAB = ETA (J-1) + (ETA (J) - ETA (J-1)) / (U (J, 2) - U (J-1, 2)) * (UMAXH -
1 U (J-1, 2))
3 EDV = .037 * ETAB * U (1, 2) * SQRT * X (NX) ** (1.0 / 3.0)
  DO 70 J=1, 61
  E (J, 2) = EDV / PRT
70 B (J, 2) = EDV
80 CONTINUE
  CALL COEF
  CALL SOLVE
  WRITE (6,3000) U (1, 2), DELU (1)
C ПРОВЕРКА СХОДИМОСТИ
  IF (ABS (DELU (1) / U (1, 2)) .GT. EPS) GO TO 40
  IF (U (1, 2) .LT. 0.0) STOP
90 CONTINUE
C ВЫВОД НА ПЕЧАТЬ
  WRITE (6,4400)
  WRITE (6,4500) (J, ETA (J), F (J, 2), U (J, 2), V (J, 2), G (J, 2), P (J, 2),
1 B (J, 2), J=1, NP, 5)
  WRITE (6,4500) NP, ETA (NP), F (NP, 2), U (NP, 2), V (NP, 2), G (NP, 2), P (NP, 2),
1 B (NP, 2)
  NX = NX + 1
  IF (NX .GT. NXT) STOP
C СМЕЩЕНИЕ ПРОФИЛЕЙ
  DO 110 J=1, NP
  F (J, 1) = F (J, 2)
  U (J, 1) = U (J, 2)
  V (J, 1) = V (J, 2)
  G (J, 1) = G (J, 2)
  P (J, 1) = P (J, 2)
  E (J, 1) = E (J, 2)
110 B (J, 1) = B (J, 2)
  GO TO 30

```

```

C -----
8000 FORMAT (8I3)
8100 FORMAT (8F10.0)
3000 FORMAT (1H ,7HU(1,2)=,E13.6,2X,6HDELU =,E13.6)
4400 FORMAT (1HD,2X,1HJ,4X,3HETA,9X,1HF,13X,1HU,13X,1HV,13X,1HG,13X,1HP,
1      13X,1HB)
4500 FORMAT (1H ,I3,F10.3,6E14.6)
7000 FORMAT (1HD,6HNXT =,I3,14X,6HNTR =,I3,14X,6HPR =,F5.3/
1      1H ,6HETAЕ =,E14.6,3X,6HDETA1=,E14.6,3X,6HVGP =,E14.6,3X,
2      6HRL =,E14.6/)
2500 FORMAT (1HD,16X,25HITERATIONS EXCEEDED ITMAX)
9000 FORMAT (1HD,'NP EXCEEDED NPT -- PROGRAM TERMINATED')
9100 FORMAT (1HD,4HNX =,I3,5X,3HX =,F10.3/)
9400 FORMAT (1H ,79X,2E14.6)
END

```

```

SUBROUTINE IVPL
COMMON /BLCD/ NP,NPT,NX,NXT,NTR,IT
COMMON /BLC1/ F(61,2),U(61,2),V(61,2),B(61,2),G(61,2),P(61,2),
1      C(61,2),D(61,2),E(61,2),RMU(61),BC(61)
COMMON /GRD/ X(60),ETA(61),DETA(61),A(61)
COMMON/AK1/GW,PR,PRT,RL
C -----
C      G(J,2) = U(J,2)
C      P(J,2) = V(J,2)
C      PY = ARCCOS(-1.0)
C      SQPY = SQRT(PY)
C      AA = 25.0
C      SORL = SORT(RL)
C      F(1,2) = 0.0
C      TERM = 27.855*X(NX)**(2.0/3.0)/SORL
C      DO 30 J=1,NP
C      ETAH = ETA(J)*ETA(J)/AA
C      ETAS = ETAH*ETAH
C      TANF = TANH( TERM*(ETA(J)-5.0) )
C      U(J,2) = 0.5*X(NX)**(1.0/3.0)*3.0*(1.0-TANF)
C      V(J,2) = -TERM*X(NX)**(1.0/3.0)*0.5*(1.0-TANF**2)*3.0
C      G(J,2) = 1.0 - ERF(ETAH)
C      P(J,2) = -4.0*EXP(-ETAS)/SQPY/AA*ETA(J)
C      C(J,2) = 1.0
C      B(J,2) = 1.0
C      E(J,2) = 1.0/PR
C      D(J,2) = 0.0
C      BC(J) = 1.0
C      C(J,1) = 1.0
C      D(J,1) = 0.0
C      IF(J.EQ.1) GO TO 30
C      F(J,2) = F(J-1,2) + A(J)*(U(J,2)+U(J-1,2))
30 CONTINUE
C      TF(NX,LT,NTR) RETURN
C      ВЫЧИСЛЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ ПО ФОРМУЛЕ ШЛИХТИНГА
C      EDDY = 0.037*B*UMAX, ГДЕ В — ПОЛУШИРИНА
C      UMAX = 0.5*U(1,2)
C      DO 1 J=1,NP
C      IF(U(J,2).LT.UMAX) GOTO 2
1 CONTINUE
C      ETAB = ETA(NP)
C      GOTO 3
2 ETAB = ETA(J-1)+(ETA(J)-ETA(J-1))/(U(J,2)-U(J-1,2))*UMAX-
1      U(J-1,2)
3 EDV = .037*ETAB*U(1,2)*SORL*X(NX)**(1.0/3.0)
C      DO 70 J=1,NP
C      E(J,2) = EDV/PRT
70 B(J,2) = EDV
C      RETURN
C      END

```

```

SUBROUTINE COEF
COMMON /INPT1/ MW(60), ALFAD, ALFA1
COMMON /BLCD/ NP, NPT, NX, NXT, NTR, IT
COMMON /BLC1/ F(61,2), U(61,2), V(61,2), B(61,2), G(61,2), P(61,2),
1 C(61,2), D(61,2), E(61,2), RMU(61), BC(61)
COMMON /GRD/ X(60), ETA(61), DETA(61), A(61)
COMMON /EDGE/ UE(60), TE(60), RHOE(60), RMUE(60), PE(60), P1(60), P2(60)
COMMON/BLC6/ S1(61), S2(61), S3(61), S4(61), S5(61), S6(61), S7(61),
1 S8(61), B1(61), B2(61), B3(61), B4(61), B5(61), B6(61),
2 B7(61), B8(61), B9(61), B10(61), R(5,61)
C - - - - -
IF(IT .GT. 1) GO TO 5
CEL = 1.5*(X(NX) * X(NX-1))/(X(NX) - X(NX-1))
P1P = P1(NX) * CEL
P2P = P2(NX) * CEL
5 CONTINUE
DO 100 J=2, NP
C ДАННОЕ СЕЧЕНИЕ
USB = 0.5*(U(J,2)**2+U(J-1,2)**2)
FVB = 0.5*(F(J,2)*V(J,2)+F(J-1,2)*V(J-1,2))
FPB = 0.5*(F(J,2)*P(J,2)+F(J-1,2)*P(J-1,2))
UGB = 0.5*(U(J,2)*G(J,2)+U(J-1,2)*G(J-1,2))
UB = 0.5*(U(J,2)+U(J-1,2))
VB = 0.5*(V(J,2)+V(J-1,2))
FB = 0.5*(F(J,2)+F(J-1,2))
GB = 0.5*(G(J,2)+G(J-1,2))
PB = 0.5*(P(J,2)+P(J-1,2))
CB = 0.5*(C(J,2) + C(J-1,2))
DERBV = (B(J,2)*V(J,2)-B(J-1,2)*V(J-1,2))/DETA(J-1)
DEREP = (E(J,2)*P(J,2)-E(J-1,2)*P(J-1,2))/DETA(J-1)
DRDUV = (D(J,2)*U(J,2)*V(J,2) - D(J-1,2)*U(J-1,2)*V(J-1,2))/
1 DETA(J-1)
CFB = 0.5*(F(J,1)+F(J-1,1))
CVB = 0.5*(V(J,1)+V(J-1,1))
CPB = 0.5*(P(J,1)+P(J-1,1))
CUB = 0.5*(U(J,1)+U(J-1,1))
CGB = 0.5*(G(J,1)+G(J-1,1))
CFVB = 0.5*(F(J,1)*V(J,1)+F(J-1,1)*V(J-1,1))
CFPB = 0.5*(F(J,1)*P(J,1)+F(J-1,1)*P(J-1,1))
CUGB = 0.5*(U(J,1)*G(J,1)+U(J-1,1)*G(J-1,1))
CUSB = 0.5*(U(J,1)**2+U(J-1,1)**2)
CCB = 0.5*(C(J,1) + C(J-1,1))
CDERBV = (B(J,1)*V(J,1)-B(J-1,1)*V(J-1,1))/DETA(J-1)
CDEREP = (E(J,1)*P(J,1)-E(J-1,1)*P(J-1,1))/DETA(J-1)
CDRDUV = (D(J,1)*U(J,1)*V(J,1) - D(J-1,1)*U(J-1,1)*V(J-1,1))/
1 DETA(J-1)
CLB = CDERBV * P1(NX-1)*CFVB - P2(NX-1)*CUSB
CRB = -CLB - CEL*CUSB + CEL*CFVB
CMB = CDEREP + CDRDUV * P1(NX-1)*CFPB
CTB = -CMB + CEL*(CFPB-CUGB)
C КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ
S1(J) = B(J,2)/DETA(J-1) + 0.5*P1P*F(J,2) - 0.5*CEL*CFB
S2(J) = -B(J-1,2)/DETA(J-1) + 0.5*P1P*F(J-1,2) - 0.5*CEL*CFB
S3(J) = 0.5*(P1P*V(J,2) + CEL*CVB)
S4(J) = 0.5*(P1P*V(J-1,2) + CEL*CVB)
S5(J) = -P2P*U(J,2)
S6(J) = -P2P*U(J-1,2)
S7(J) = 0.0
S8(J) = S7(J)
R(2,J) = CRB - (DERBV + P1P*FVB - P2P*USB + CEL*(FB*CVB-VB*CFB))
C КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ
B1(J) = E(J,2)/DETA(J-1) + 0.5*P1P*F(J,2) - 0.5*CEL*CFB
B2(J) = -E(J-1,2)/DETA(J-1) + 0.5*P1P*F(J-1,2) - 0.5*CEL*CFB
B3(J) = 0.5*(P1P*P(J,2) + CEL*CPB)
B4(J) = 0.5*(P1P*P(J-1,2) + CEL*CPB)
B5(J) = D(J,2)*V(J,2)/DETA(J-1) - 0.5*CEL*(G(J,2)-CGB)

```

```

B6(J) = -D(J-1,2)*V(J-1,2)/DETA(J-1) - 0.5*CEL*(G(J-1,2)-CGB)
B7(J) = -0.5*CEL*(U(J,2)+CUB)
B8(J) = -0.5*CEL*(U(J-1,2)+CUB)
B9(J) = D(J,2)*U(J,2)/DETA(J-1)
B10(J) = -D(J-1,2)*U(J-1,2)/DETA(J-1)
R(3,J) = CTB - (DEREP + DRDUV + P1P*FPB - CEL*(UGB-CGB*UB+CUB*GB) +

```

SUBROUTINE SOLV5

```

COMMON /INPT1/ HW(60),ALFAD,ALFA1
COMMON /BLCO/ NP,NPT,NX,NXT,NTR,IT
COMMON /GRD/ X(60),ETA(61),DETA(61),A(61)
COMMON /BLC1/ F(61,2),U(61,2),V(61,2),B(61,2),G(61,2),P(61,2),
1 C(61,2),D(61,2),E(61,2),RMU(61),BC(61)
COMMON /BLC3/ DELF(61),DELU(61),DELV(61),DELG(61),DELP(61)
COMMON /BLC6/ S1(61),S2(61),S3(61),S4(61),S5(61),S6(61),S7(61),
1 S8(61),B1(61),B2(61),B3(61),B4(61),B5(61),B6(61),
2 B7(61),B8(61),B9(61),B10(61),R(5,61)
DIMENSION
1 A11(61),A12(61),A13(61),A14(61),A15(61),A21(61),
2 A22(61),A23(61),A24(61),A25(61),A31(61),A32(61),
3 A33(61),A34(61),A35(61),G11(61),G12(61),G13(61),
4 G14(61),G15(61),G21(61),G22(61),G23(61),G24(61),
5 G25(61),G31(61),G32(61),G33(61),G34(61),G35(61),
W1(61),W2(61),W3(61),W4(61),W5(61)

```

C - - - - -

```

A11(1)=1.0
A12(1)=0.0
A13(1)=0.0
A14(1)=0.0
A15(1)=0.0
A21(1)=0.0
A22(1)=0.0
A23(1)=1.0
A24(1)=0.0
A25(1)=0.0
A31(1)=0.0
A32(1)=0.0
A33(1)=0.0
A34(1)=ALFAD
A35(1)=ALFA1
W1(1)=R(1,1)
W2(1)=R(2,1)
W3(1)=R(3,1)
W4(1)=R(4,1)
W5(1)=R(5,1)

```

C - ПРЯМОЙ ХОД

```

DO 30 J=2,NP
AA1=A(J)*A24(J-1)-A25(J-1)
AA2=A(J)*A34(J-1)-A35(J-1)
AA3=A(J)*A12(J-1)-A13(J-1)
AA4=A(J)*A22(J-1)-A23(J-1)
AA5=A(J)*A32(J-1)-A33(J-1)
AA6=A(J)*A14(J-1)-A15(J-1)
AA7=A(J)*S6(J)-S2(J)
AA8=S8(J)*A(J)
AA9=A(J)*B6(J)-B10(J)
AA10=A(J)*B8(J)-B2(J)
DET=A11(J-1)*(AA4*AA2-AA1*AA5)-A21(J-1)*(AA3*AA2-AA5*AA6)+
1 A31(J-1)*(AA3*AA1-AA4*AA6)
G11(J)=[-(AA4*AA2-AA5*AA1)+A(J)]**2*(A21(J-1)*AA2-A31(J-1)*AA1)/
1 DET
G12(J)=[(AA3*AA2-AA5*AA6)-A(J)]**2*(A11(J-1)*AA2-A31(J-1)*AA6)/DET
G13(J)=[-(AA3*AA1-AA4*AA6)+A(J)]**2*(A11(J-1)*AA1-A21(J-1)*AA6)/
1 DET
G14(J)=G11(J)*A12(J-1)+G12(J)*A22(J-1)+G13(J)*A32(J-1)+A(J)
G15(J)=G11(J)*A14(J-1)+G12(J)*A24(J-1)+G13(J)*A34(J-1)

```

```

G21 (J) = (S4 (J) * (AA2*AA4-AA1*AA5) + A31 (J-1) * (AA1*AA7-AA4*AA8) +
1 A21 (J-1) * (AA5*AA8-AA7*AA2)) / DET
G22 (J) = (A11 (J-1) * (AA2*AA7-AA5*AA8) + A31 (J-1) * (AA3*AA8-AA6*AA7) +
1 S4 (J) * (AA5*AA6-AA2*AA3)) / DET
G23 (J) = (A11 (J-1) * (AA4*AA8-AA1*AA7) + S4 (J) * (AA3*AA1-AA4*AA6) +
1 A21 (J-1) * (AA7*AA6-AA3*AA8)) / DET
G24 (J) = G21 (J) * A12 (J-1) + G22 (J) * A22 (J-1) + G23 (J) * A32 (J-1) - S6 (J)
G25 (J) = G21 (J) * A14 (J-1) + G22 (J) * A24 (J-1) + G23 (J) * A34 (J-1) - S8 (J)
G31 (J) = (B4 (J) * (AA4*AA2-AA5*AA1) - AA9 * (A21 (J-1) * AA2 - A31 (J-1) * AA1) +
1 AA10 * (A21 (J-1) * AA5 - A31 (J-1) * AA4)) / DET
G32 (J) = (-B4 (J) * (AA3*AA2-AA5*AA6) + AA9 * (A11 (J-1) * AA2 - A31 (J-1) * AA6) -
1 AA10 * (A11 (J-1) * AA5 - A31 (J-1) * AA3)) / DET
G33 (J) = (B4 (J) * (AA3*AA1-AA4*AA6) - AA9 * (A11 (J-1) * AA1 - A21 (J-1) * AA6) +
1 AA10 * (A11 (J-1) * AA4 - A21 (J-1) * AA3)) / DET
G34 (J) = G31 (J) * A12 (J-1) + G32 (J) * A22 (J-1) + G33 (J) * A32 (J-1) - B6 (J)
G35 (J) = G31 (J) * A14 (J-1) + G32 (J) * A24 (J-1) + G33 (J) * A34 (J-1) - B8 (J)
1 CEL * (CPB*FB-CFB*PB))
C ОПРЕДЕЛЕНИЯ RJ
R (1, J) = F (J-1, 2) - F (J, 2) + DETA (J-1) * UB
R (4, J-1) = U (J-1, 2) - U (J, 2) + DETA (J-1) * VB
R (5, J-1) = G (J-1, 2) - G (J, 2) + DETA (J-1) * PB
100 CONTINUE
R (1, 1) = 0.0
R (2, 1) = 0.0
R (3, 1) = 0.0
R (4, NP) = 0.0
R (5, NP) = 0.0
RETURN
END

A11 (J) = 1.0
A12 (J) = -A (J) - G14 (J)
A13 (J) = A (J) * G14 (J)
A14 (J) = -G15 (J)
A15 (J) = A (J) * G15 (J)
A21 (J) = S3 (J)
A22 (J) = S5 (J) - G24 (J)
A23 (J) = S1 (J) + A (J) * G24 (J)
A24 (J) = -G25 (J) + S7 (J)
A25 (J) = A (J) * G25 (J)
A31 (J) = B3 (J)
A32 (J) = B5 (J) - G34 (J)
A33 (J) = B9 (J) + A (J) * G34 (J)
A34 (J) = B7 (J) - G35 (J)
A35 (J) = B1 (J) + A (J) * G35 (J)
W1 (J) = R (1, J) - G11 (J) * W1 (J-1) - G12 (J) * W2 (J-1) - G13 (J) * W3 (J-1) -
1 G14 (J) * W4 (J-1) - G15 (J) * W5 (J-1)
W2 (J) = R (2, J) - G21 (J) * W1 (J-1) - G22 (J) * W2 (J-1) - G23 (J) * W3 (J-1) -
1 G24 (J) * W4 (J-1) - G25 (J) * W5 (J-1)
W3 (J) = R (3, J) - G31 (J) * W1 (J-1) - G32 (J) * W2 (J-1) - G33 (J) * W3 (J-1) -
1 G34 (J) * W4 (J-1) - G35 (J) * W5 (J-1)
W4 (J) = R (4, J)
W5 (J) = R (5, J)
30 CONTINUE
C - ОБРАТНЫЙ ХОД
J = NP
DP = -(A31 (J) * (A13 (J) * W2 (J) - W1 (J) * A23 (J)) - A32 (J) * (A11 (J) *
1 W2 (J) - W1 (J) * A21 (J)) + W3 (J) * (A11 (J) * A23 (J) - A13 (J) * A21 (J)))
DV = -(A31 (J) * (W1 (J) * A25 (J) - W2 (J) * A15 (J)) - W3 (J) * (A11 (J) * A25 (J)
1 - A15 (J) * A21 (J)) + A35 (J) * (A11 (J) * W2 (J) - W1 (J) * A21 (J)))
DF = -(W3 (J) * (A13 (J) * A25 (J) - A23 (J) * A15 (J)) - A33 (J) * (W1 (J) * A25 (J)
1 - A15 (J) * W2 (J)) + A35 (J) * (W1 (J) * A23 (J) - A13 (J) * W2 (J)))
D1 = -(A31 (J) * (A13 (J) * A25 (J) - A23 (J) * A15 (J)) - A33 (J) * (A11 (J) *
1 A25 (J) - A21 (J) * A15 (J)) + A35 (J) * (A11 (J) * A23 (J) - A21 (J) * A13 (J)))
DELP (J) = DP/D1
DELY (J) = DV/D1

```

```

DELF(J) = DF/D1
DELG(J) = 0.0
DELU(J) = 0.0
40 J = J-1
BB1=DELU(J+1)-A(J+1)*DELV(J+1)-W4(J)
BB2=DELG(J+1)-A(J+1)*DELP(J+1)-W5(J)
CC1=W1(J)-A12(J)*BB1-A14(J)*BB2
CC2=W2(J)-A22(J)*BB1-A24(J)*BB2
CC3=W3(J)-A32(J)*BB1-A34(J)*BB2
DD1=A13(J)-A12(J)*A(J+1)
DD2=A23(J)-A22(J)*A(J+1)
DD3=A33(J)-A32(J)*A(J+1)
EE1=A15(J)-A14(J)*A(J+1)
EE2=A25(J)-A24(J)*A(J+1)
EE3=A35(J)-A34(J)*A(J+1)
DETT=A11(J)*DD2*EE3+A21(J)*DD3*EE1+A31(J)*DD1*EE2
1 -A31(J)*DD2*EE1-A21(J)*DD1*EE3-A11(J)*DD3*EE2
DELF(J) = (CC1*DD2*EE3+CC2*DD3*EE1+CC3*DD1*EE2-CC3*DD2*EE1
1 -CC2*DD1*EE3-CC1*DD3*EE2)/DETT
DELV(J) = (A11(J)*CC2*EE3+A21(J)*CC3*EE1+A31(J)*CC1*EE2-
1 A31(J)*CC2*EE1-A21(J)*CC1*EE3-A11(J)*CC3*EE2)/DETT
DELP(J) = (A11(J)*CC3*DD2+A21(J)*CC1*DD3+A31(J)*CC2*DD1-
1 A31(J)*CC1*DD2-A21(J)*CC3*DD1-A11(J)*CC2*DD3)/DETT
DELU(J) = BB1-A(J+1)*DELV(J)
DELG(J) = BB2-A(J+1)*DELP(J)
IF(J.GT.1) GO TO 40
DO 50 J=1,NP
F(J,2) = F(J,2) + DELF(J)
U(J,2) = U(J,2) + DELU(J)
V(J,2) = V(J,2) + DELV(J)
G(J,2) = G(J,2) + DELG(J)
P(J,2) = P(J,2) + DELP(J)
50 CONTINUE
U(NP,2) = 0.0
RETURN
END

```

14.4. Слой смешения между двумя однородными потоками жидкости с разными температурами

В качестве четвертого примера, иллюстрирующего применение программы на языке Фортран, описанной в разд. 13.5, рассмотрим слой смешения между двумя однородными потоками, имеющими разные температуры (разд. 8.2 и 8.4). Для простоты ограничимся рассмотрением ламинарного автомодельного течения.

Преобразованные уравнения движения и энергии и их граничные условия для указанного течения имеют вид

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' = 0, \quad (8.48)$$

$$\frac{g''}{Pr} + \frac{1}{2}fg' = 0. \quad (8.49)$$

$$\eta = -\eta_e, \quad f' = \lambda, \quad g = 0; \quad \eta = \eta_e, \quad f' = 1, \quad g = 1. \quad (8.44a)$$

$$\eta = 0, \quad f = 0. \quad (8.44b)$$

Эти уравнения (но не граничные условия) совпадают с уравнениями, описывающими течение около нагретой плоской пластины,

имеющей постоянную температуру ($m = n = 0$ в уравнениях (4.31) и (4.32)). Если бы не граничное условие при $\eta = 0$, определяемое уравнением (8.44b), то их можно было бы решить непосредственно с помощью программы на языке Фортран, описанной в разд. 13.5. Однако указанное граничное условие усложняет ситуацию и требует внесения изменений в процедуру решения задач внешнего течения.

Чтобы вносить как можно меньше изменений в программу, описанную в разд. 13.5, наиболее целесообразно воспользоваться нелинейным методом собственных значений, описанным в разд. 14.1. В этом случае сначала решается *стандартная задача*, состоящая в решении уравнений (8.48) и (8.49) при условиях

$$\eta = -\eta_e, \quad f' = \lambda, \quad g = 0, \quad f = s, \quad (14.43a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad f' = 1, \quad g = 1, \quad (14.43b)$$

где s — некоторая постоянная. Решив стандартную задачу, найдем значение $f(\equiv f_0)$ при $\eta = 0$ и проверим, удовлетворяет ли оно граничному условию (8.44b). Если нет, то, поскольку решение зависит от параметра s , воспользуемся методом Ньютона и найдем другое значение s , при котором новое значение f_0 удовлетворяет граничному условию (8.44b). Так, введя обозначение

$$\phi(s^v) = f_0, \quad (14.44)$$

вычислим

$$s^{v+1} = s^v - \frac{\phi}{\partial\phi/\partial s} \equiv s^v - \frac{f_0}{\partial f_0/\partial s}, \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad (14.45)$$

Как и выше, в разд. 14.1, $\partial f_0/\partial s$ получим, решая вариационные уравнения при условиях

$$\eta = -\eta_e', \quad f = 1, \quad f' = 0, \quad g = 0, \quad (14.46a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad f' = 0, \quad g = 0. \quad (14.46b)$$

Найдя новое значение s , вновь решим стандартную задачу и проверим, удовлетворяется ли условие

$$|\phi(s^v)| < \varepsilon, \quad (14.47)$$

где ε — допустимая погрешность, равная, например, 10^{-3} . Если условие (14.47) не удовлетворяется, то вновь решают вариационные уравнения и получают новое значение s . Так поступают до тех пор, пока условие (8.44b) не будет удовлетворено.

Граничные условия в стандартной задаче имеют тот же вид, что и в случае пограничного слоя. Поскольку в рассматриваемом случае коэффициенты конечно-разностных уравнений движения и энергии совпадают с коэффициентами уравнений, описывающих течение около плоской пластины, имеющей постоянную температуру, то подпрограмма COEF остается практически неизменной. Единственное, что надо сделать, это принять $b_j = 1$, $e_j = 1/Pr$, $d = 0$ и $\alpha_n = 0$, а также $\alpha_0 = 1$ и $\alpha_1 = 0$, чтобы правильно выразить граничные условия уравнения энергии.

Коэффициенты вариационных уравнений также остаются почти без изменений. За исключением члена $(r_1)_0$, который равен единице, все правые части вариационных уравнений $(r_k)_j$ равны нулю, а их коэффициенты $(s_k)_j$ и $(\beta_l)_j$ такие же, как в случае стандартной задачи. Поэтому, чтобы решить вариационные уравнения, надо всего лишь заново вычислить r_j , а поскольку матрица \mathbb{A} , входящая в уравнение (13.28), уже известна из решения стандартной задачи, то остается найти δ_j , которая теперь определяется уравнением (14.15). Однако, в противоположность задаче, рассмотренной в разд. 14.1, счет в подпрограмме SOLV5 необходимо вести от «внешней» границы $\eta = \eta_j$ до $\eta = 0$, пока не будет вычислено значение $(f_1)_{\eta=0}$. Все эти изменения довольно просты, поэтому не приводим ни примера расчета, ни текста измененной программы для ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bradshaw P., Cebeci T., Whitelaw J. H., Engineering Calculation Methods for Turbulent Flows, Academic, London, 1981.
2. Cebeci T., Smith A. M. O., Analysis of Turbulent Boundary Layers, Academic, N. Y., 1974.
3. Cebeci T., Khattab A. A., Lamont R., Combined natural and forced convection in vertical ducts, Proc. Seventh International Heat Transfer Conf., Munich, GFR, Hemisphere Publishing Co., Washington, 1982.
4. Isaacson E., Keller H. B., Analysis of Numerical Methods, Wiley, N. Y., 1966, p. 192.

Приложение А

Коэффициенты перевода единиц измерения

Вязкость

$$1 \text{ п} = \text{Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2 = 0,1 \text{ Па} \cdot \text{с}$$

$$1 \text{ п} = 1 \text{ г} / (\text{см} \cdot \text{с})$$

$$1 \text{ п} = 10^2 \text{ сп}$$

$$1 \text{ п} = 241,9 \text{ фунт} / (\text{фут} \cdot \text{ч})$$

$$1 \text{ фунт} / (\text{фут} \cdot \text{с}) = 1,4882 \text{ кг} / (\text{м} \cdot \text{с})$$

$$1 \text{ фунт} / (\text{фут} \cdot \text{с}) = 14,882 \text{ п}$$

$$1 \text{ фунт} / (\text{фут} \cdot \text{ч}) = 0,4134 \cdot 10^{-3} \text{ кг} / (\text{м} \cdot \text{с})$$

$$1 \text{ фунт} / (\text{фут} \cdot \text{ч}) = 0,4134 \cdot 10^{-2} \text{ п}$$

Давление, сила

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$$

$$1 \text{ Н} = 0,22481 \text{ фунт-сила}$$

$$1 \text{ Н} = 7,2333 \text{ паундаль}$$

$$1 \text{ Н} = 10^5 \text{ дин}$$

$$1 \text{ Н} / \text{м}^2 = 1 \text{ Па}$$

$$1 \text{ фунт-сила} = 32,174 \text{ фут} \cdot \text{фунт} / \text{с}^2$$

$$1 \text{ фунт-сила} = 4,4482 \text{ Н}$$

$$1 \text{ фунт-сила} = 32,1739 \text{ паундаль}$$

$$1 \text{ фунт-сила} / \text{дюйм}^2 = 6894,76 \text{ Па}$$

$$1 \text{ фунт-сила} / \text{фут}^2 = 47,880 \text{ Па}$$

$$1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}$$

$$1 \text{ атм} = 14,696 \text{ фунт-сила} / \text{дюйм}^2$$

$$1 \text{ атм} = 2116,2 \text{ фунт-сила} / \text{фут}^2$$

$$1 \text{ атм} = 1,0132 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

Диффузия (перенос тепла, массы, количества движения)

$$1 \text{ фут}^2 / \text{с} = 0,0929 \text{ м}^2 / \text{с}$$

$$1 \text{ фут}^2 / \text{ч} = 0,2581 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 / \text{с}$$

$$1 \text{ м}^2 / \text{с} = 10,7639 \text{ фут}^2 / \text{с}$$

$$1 \text{ см}^2 / \text{с} = 3,8745 \text{ фут}^2 / \text{ч}$$

Длина

- 1 дюйм = 2,54 см
- 1 дюйм = $2,54 \cdot 10^{-2}$ м
- 1 фут = 0,3048 м
- 1 м = 3,2808 фут
- 1 миля = 1609,34 м
- 1 миля = 5280 фут

Коэффициент теплоотдачи

- 1 БТЕ/(ч·фут²·°F) = 5,677 Вт/(м²·К)
- 1 Вт/(м²·К) = 0,1761 БТЕ/(ч·фут²·°F)
- 1 БТЕ/(ч·фут²·°F) = 4,882 ккал/(ч·м²·К)

Коэффициент теплопроводности

- 1 БТЕ/(ч·фут·°F) = 1,7303 Вт/(м·К)
- 1 БТЕ/(ч·фут·°F) = 0,4132 кал/(с·м·К)
- 1 Вт/(м·К) = 0,5779 БТЕ/(ч·фут·°F)

Масса

- 1 унция = 28,35 г
- 1 фунт = 16 унций
- 1 фунт = 453,6 г
- 1 фунт = 0,4536 кг
- 1 кг = 2,2046 фунт
- 1 г = 15,432 гран
- 1 слаг = 32,1739 фунт

Объем

- 1 дюйм³ = 16,387 см³
- 1 см³ = 0,06102 дюйм³
- 1 унция (американская, жидкость) = 29,573 см³
- 1 фут³ = 0,02831 м³
- 1 фут³ = 28,3168 л
- 1 фут³ = 7,4805 галлон (американский)
- 1 м³ = 35,315 фут³
- 1 галлон (американский) = 3,7854 л
- 1 галлон (американский) = $3,7854 \cdot 10^{-3}$ м³
- 1 галлон (американский) = 0,13368 фут³

Плотность

- 1 фунт/дюйм³ = 27,680 г/см³
- 1 фунт/фут³ = 16,019 кг/м³
- 1 кг/м³ = 0,06243 фунт/фут³
- 1 слаг/фут³ = 515,38 кг/м³

Плотность потока массы (удельный массовый расход)

$$1 \text{ фунт}/(\text{фут}^2 \cdot \text{ч}) = 1,3563 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$$

$$1 \text{ фунт}/(\text{фут}^2 \cdot \text{с}) \doteq 4,882 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$$

$$1 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}) = 737,3 \text{ фунт}/(\text{фут}^2 \cdot \text{ч})$$

$$1 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}) = 0,2048 \text{ фунт}/(\text{фут}^2 \cdot \text{ч})$$

Плотность теплового потока

$$1 \text{ БТЕ}/(\text{ч} \cdot \text{фут}^2) = 3,1537 \cdot 10^{-3} \text{ кВт}/\text{м}^2$$

$$1 \text{ Вт}/\text{м}^2 = 0,31709 \text{ БТЕ}/(\text{ч} \cdot \text{фут}^2)$$

Площадь

$$1 \text{ дюйм}^2 = 6,4516 \text{ см}^2$$

$$1 \text{ фут}^2 = 0,0929 \text{ м}^2$$

$$1 \text{ м}^2 = 10,764 \text{ фут}^2$$

Скорость

$$1 \text{ фут}/\text{с} = 0,3048 \text{ м}/\text{с}$$

$$1 \text{ м}/\text{с} = 3,2808 \text{ фут}/\text{с}$$

$$1 \text{ миля}/\text{ч} = 1,4667 \text{ фут}/\text{с}$$

$$1 \text{ миля}/\text{ч} = 0,44704 \text{ м}/\text{с}$$

Температура

$$1 \text{ К} = 1,8^\circ\text{R}$$

$$T^\circ\text{F} = 1,8(\text{K} - 273) + 32$$

$$T \text{ К} = \frac{1}{1,8} (\text{°F} - 32) + 273$$

$$T^\circ\text{C} = \frac{1}{1,8} (\text{°R} - 492)$$

Термическое сопротивление

$$1 \text{ ч} \cdot \text{°F}/\text{БТЕ} = 1,896 \text{ К}/\text{Вт}$$

$$1 \text{ К}/\text{Вт} = 0,528 \text{ ч} \cdot \text{°F}/\text{БТЕ}$$

Теплоемкость, количество тепла на единицу массы, удельная теплоемкость

$$1 \text{ БТЕ}/(\text{ч} \cdot \text{°F}) = 0,5274 \text{ Вт}/\text{К}$$

$$1 \text{ Вт}/\text{К} = 1,8961 \text{ БТЕ}/\text{ч} \cdot \text{°F}$$

$$1 \text{ БТЕ}/\text{фунт} = 2325,9 \text{ Дж}/\text{кг}$$

$$1 \text{ БТЕ}/(\text{фунт} \cdot \text{°F}) = 4,18669 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot \text{К})$$

$$1 \text{ БТЕ}/(\text{фунт} \cdot \text{°F}) = 1 \text{ кал}/(\text{г} \cdot \text{К})$$

Удельная тепловая мощность

$$1 \text{ БТЕ}/(\text{ч} \cdot \text{фут}^3) = 10,35 \text{ Вт}/\text{м}^3$$

$$1 \text{ Вт}/\text{м}^3 = 0,0966 \text{ БТЕ}/(\text{ч} \cdot \text{фут}^3)$$

Удельная теплоемкость

$$1 \text{ БТЕ}/(\text{фунт} \cdot ^\circ\text{F}) = 4,18669 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot \text{K})$$

$$1 \text{ БТЕ}/(\text{фунт} \cdot ^\circ\text{F}) = 1 \text{ кал}/(\text{г} \cdot \text{K})$$

$$1 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{K}) = 0,23885 \text{ БТЕ}/(\text{фунт} \cdot ^\circ\text{F})$$

Ускорение

$$1 \text{ фут}/\text{с}^2 = 0,3048 \text{ м}/\text{с}^2$$

$$1 \text{ м}/\text{с}^2 = 3,2808 \text{ фут}/\text{с}^2$$

Энергия, количество тепла, мощность

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Вт} \cdot \text{с} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрг}$$

$$1 \text{ БТЕ} = 1055,04 \text{ Дж}$$

$$1 \text{ БТЕ} = 1055,04 \text{ Вт} \cdot \text{с}$$

$$1 \text{ БТЕ} = 252 \text{ кал}$$

$$1 \text{ БТЕ} = 778,161 \text{ фут} \cdot \text{фунт-сила}$$

$$1 \text{ БТЕ}/\text{ч} = 0,2931 \text{ Вт}$$

$$1 \text{ БТЕ}/\text{ч} = 3,93 \cdot 10^{-4} \text{ л.с.}$$

$$1 \text{ кал} = 4,1868 \text{ Дж}$$

$$1 \text{ кал} = 3,968 \cdot 10^{-3} \text{ БТЕ}$$

$$1 \text{ л.с.} = 550 \text{ фут} \cdot \text{фунт-сила}/\text{с}$$

$$1 \text{ л.с.} = 745,7 \text{ Вт} = 745,7 \text{ Н} \cdot \text{м}/\text{с}$$

$$1 \text{ Вт} \cdot \text{ч} = 3,413 \text{ БТЕ}$$

Постоянные

$$\text{Ускорение силы тяжести } g_c = 32,1739 \text{ фут} \cdot \text{фунт}/(\text{фунт-сила} \cdot \text{с}^2)$$

$$= 4,1697 \cdot 10^8 \text{ фут} \cdot \text{фунт}/(\text{фунт-сила} \cdot \text{ч}^2)$$

$$= 1 \text{ г} \cdot \text{см}/(\text{дин} \cdot \text{с}^2)$$

$$= 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/(\text{Н} \cdot \text{с}^2)$$

$$= 1 \text{ фунт} \cdot \text{фут}/(\text{паундаль} \cdot \text{с}^2)$$

$$= 1 \text{ слаг} \cdot \text{фут}/(\text{фунт-сила} \cdot \text{с}^2)$$

Механический эквивалент

$$\text{тепла } J = 778,16 \text{ фут} \cdot \text{фунт-сила}/\text{БТЕ}$$

$$\text{Газовая постоянная } \mathcal{R} = 1544 \text{ фут} \cdot \text{фунт-сила}/(\text{фунт} \cdot \text{моль} \cdot ^\circ\text{R})$$

$$= 8,314 \text{ Н} \cdot \text{м}/(\text{моль} \cdot \text{K})$$

$$= 1,987 \text{ кал}/(\text{моль} \cdot \text{K})$$

Приложение В

Физические свойства газов, жидкостей, жидких и твердых металлов

Таблица В.1. Физические свойства газов при атмосферном давлении

T, K	$\rho,$ кг/м ³	$C_p,$ кДж/(кг·К)	$\mu,$ кг/(м·с)	$\nu \times 10^6,$ м ² /с	$k,$ Вт/(м·К)	$\kappa \times 10^4,$ м ² /с	Pr
Азот							
100	3,4808	1,0722	$6,862 \times 10^{-6}$	1,971	0,009450	0,025319	0,786
200	1,7108	1,0429	12,947	7,568	0,01824	0,10224	0,747
300	1,1421	1,0408	17,84	15,63	0,02620	0,22044	0,713
400	0,8538	1,0459	21,98	25,74	0,03335	0,3734	0,691
500	0,6824	1,0555	25,70	37,66	0,03984	0,5530	0,684
600	0,5687	1,0756	29,11	51,19	0,04580	0,7486	0,686
700	0,4934	1,0969	32,13	65,13	0,05123	0,9466	0,691
800	0,4277	1,1225	34,84	81,46	0,05609	1,1685	0,700
900	0,3796	1,1464	37,49	91,06	0,06070	1,3946	0,711
1000	0,3412	1,1677	40,00	117,2	0,06475	1,6250	0,724
1100	0,3108	1,1857	42,28	136,0	0,06850	1,8591	0,736
1200	0,2851	1,2037	44,50	156,1	0,07184	2,0932	0,748
Аммиак NH₃							
220	0,3828	2,198	$7,255 \times 10^{-6}$	19,0	0,0171	0,2054	0,93
273	0,7929	2,177	9,353	11,8	0,0220	0,1308	0,90
323	0,6487	2,177	11,035	17,0	0,0270	0,1920	0,88
373	0,5590	2,236	12,886	23,0	0,0327	0,2619	0,87
423	0,4934	2,315	14,672	29,7	0,0391	0,3432	0,87
473	0,4405	2,395	16,49	37,4	0,0467	0,4421	0,84
Водород							
30	0,84722	10,840	$1,606 \times 10^{-6}$	1,895	0,0228	0,02493	0,759
50	0,50955	10,501	2,516	4,880	0,0362	0,0676	0,721
100	0,24572	11,229	4,212	17,14	0,0665	0,2408	0,712
150	0,16371	12,602	5,595	34,18	0,0981	0,475	0,718
200	0,12270	13,540	6,813	55,53	0,1282	0,772	0,719
250	0,09819	14,059	7,919	80,64	0,1561	1,130	0,713
300	0,08185	14,314	8,963	109,5	0,182	1,554	0,706
350	0,07016	14,436	9,954	141,9	0,206	2,031	0,697
400	0,06135	14,491	10,864	177,1	0,228	2,568	0,690
450	0,05462	14,499	11,779	215,6	0,251	3,164	0,682

Продолжение табл. В.1.

T, K	$\rho,$ кг/м ³	$c_p,$ кДж/(кг·К)	$\mu,$ кг/(м·с)	$\nu \times 10^6,$ м ² /с ¹	$k,$ Вт/(м·К)	$\kappa^* \times 10^4,$ м ² /с	Pr
500	0,04918	14,507	12,636	257,0	0,272	3,817	0,675
550	0,04469	14,532	13,475	301,6	0,292	4,516	0,668
600	0,04085	14,537	14,285	349,7	0,315	5,306	0,664
700	0,03492	14,574	15,89	455,1	0,351	6,903	0,659
800	0,03060	14,675	17,40	569	0,384	8,563	0,664
900	0,02723	14,821	18,78	690	0,412	10,217	0,676
1000	0,02451	14,968	20,16	822	0,440	11,997	0,686
1100	0,02227	15,165	21,46	965	0,464	13,726	0,703
1200	0,02050	15,366	22,75	1107	0,488	15,484	0,715
1300	0,01890	15,575	24,08	1273	0,512	17,394	0,733
1333	0,01842	15,638	24,44	1328	0,519	18,013	0,736

Водяной пар

380	0,5863	2,060	$12,71 \times 10^{-6}$	21,6	0,0246	0,2036	1,060
400	0,5542	2,014	13,44	24,2	0,0261	0,2338	1,040
450	0,4902	1,980	15,25	31,1	0,0299	0,307	1,010
500	0,4405	1,985	17,04	38,6	0,0339	0,387	0,996
550	0,4005	1,997	18,84	47,0	0,0379	0,475	0,991
600	0,3652	2,026	20,67	56,6	0,0422	0,573	0,986
650	0,3380	2,056	22,47	64,4	0,0464	0,666	0,995
700	0,3140	2,085	24,26	77,2	0,0505	0,772	1,000
750	0,2931	2,119	26,04	88,8	0,0549	0,883	1,005
800	0,2739	2,152	27,86	102,0	0,0592	1,001	1,010
850	0,2579	2,186	29,69	115,2	0,0637	1,130	1,019

Воздух

100	3,6010	1,0266	$0,6924 \times 10^{-5}$	1,923	0,009246	0,02501	0,770
150	2,3675	1,0099	1,0283	4,343	0,013735	0,05745	0,753
200	1,7684	1,0061	1,3289	7,490	0,01809	0,10165	0,739
250	1,4128	1,0053	1,488	9,49	0,02227	0,13161	0,722
300	1,1774	1,0057	1,983	15,68	0,02624	0,22160	0,708
350	0,9980	1,0090	2,075	20,76	0,03003	0,2983	0,697
400	0,8826	1,0140	2,286	25,90	0,03365	0,3760	0,689
450	0,7833	1,0207	2,484	28,86	0,03707	0,4222	0,683
500	0,7048	1,0295	2,671	37,90	0,04038	0,5564	0,680
550	0,6423	1,0392	2,848	44,34	0,04360	0,6532	0,680
600	0,5870	1,0551	3,018	51,34	0,04659	0,7512	0,680
650	0,5430	1,0635	3,177	58,51	0,04953	0,8578	0,682
700	0,5030	1,0752	3,332	66,25	0,05230	0,9672	0,684
750	0,4709	1,0856	3,481	73,91	0,05509	1,0774	0,686
800	0,4405	1,0978	3,625	82,29	0,05779	1,1951	0,689
850	0,4149	1,1095	3,765	90,75	0,06028	1,3097	0,692
900	0,3925	1,1212	3,899	99,3	0,06279	1,4271	0,696
950	0,3716	1,1321	4,023	108,2	0,06525	1,5510	0,699

Продолжение табл. В.1.

T, K	$\rho,$ кг/м ³	$c_p,$ кДж/(кг·К)	$\mu,$ кг/(м·с)	$\nu \times 10^6,$ м ² /с	$k,$ Вт/(м·К)	$\kappa \times 10^4,$ м ² /с	Pr
1000	0,3524	1,1417	4,152	117,8	0,06752	1,6779	0,702
1100	0,3204	1,160	4,44	138,6	0,0732	1,969	0,704
1200	0,2947	1,179	4,69	159,1	0,0782	2,251	0,707
1300	0,2707	1,197	4,93	182,1	0,0837	2,583	0,705
1400	0,2515	1,214	5,17	205,5	0,0891	2,920	0,705
1500	0,2355	1,230	5,40	229,1	0,0946	3,262	0,705
1600	0,2211	1,248	5,63	254,5	0,100	3,609	0,705
1700	0,2082	1,267	5,85	280,5	0,105	3,977	0,705
1800	0,1970	1,287	6,07	308,1	0,111	4,379	0,704
1900	0,1858	1,309	6,29	338,5	0,117	4,811	0,704
2000	0,1762	1,338	6,50	369,0	0,124	5,260	0,702
2100	0,1682	1,372	6,72	399,6	0,131	5,715	0,700
2200	0,1602	1,419	6,93	432,6	0,139	6,120	0,707
2300	0,1538	1,482	7,14	464,0	0,149	6,540	0,710
2400	0,1458	1,574	7,35	504,0	0,161	7,020	0,718
2500	0,1394	1,682	7,57	543,5	0,175	7,441	0,730

Гелий

3		5,200	$8,42 \times 10^{-7}$		0,0106		
33	1,4657	5,200	50,2	3,42	0,0553	0,04625	0,74
144	3,3799	5,200	125,5	37,11	0,0928	0,5275	0,70
200	0,2435	5,200	156,6	64,38	0,1177	0,9288	0,694
255	0,1906	5,200	181,7	95,50	0,1357	1,3675	0,70
366	0,13280	5,200	230,5	173,6	0,1691	2,449	0,71
477	0,10204	5,200	275,0	269,3	0,197	3,716	0,72
589	0,08282	5,200	311,3	375,8	0,225	5,215	0,72
700	0,07032	5,200	347,5	494,2	0,251	6,661	0,72
800	0,06023	5,200	381,7	634,1	0,275	8,774	0,72
900	0,05286	5,200	413,6	781,3	0,298	10,834	0,72

Двуокись углерода

220	2,4733	0,783	$11,105 \times 10^{-6}$	4,490	0,010805	0,05920	0,818
250	2,1657	0,804	12,590	5,813	0,012884	0,07401	0,793
300	1,7973	0,871	14,958	8,321	0,016572	0,10588	0,770
350	1,5362	0,900	17,205	11,19	0,02047	0,14808	0,755
400	1,3424	0,942	19,32	14,39	0,02461	0,19463	0,738
450	1,1918	0,980	21,34	17,90	0,02897	0,24813	0,721
500	1,0732	1,013	23,26	21,67	0,03352	0,3084	0,702
550	0,9739	1,047	25,08	25,74	0,03821	0,3750	0,685
600	0,8938	1,076	26,83	30,02	0,04311	0,4483	0,668

Кислород

100	3,9918	0,9479	$7,768 \times 10^{-6}$	1,946	0,00903	0,023876	0,815
150	2,6190	0,9178	11,490	4,387	0,01367	0,05688	0,773
200	1,9559	0,9131	14,850	7,593	0,01824	0,10214	0,745

Продолжение табл. В.1

T, K	$\rho,$ кг/м ³	$c_p,$ кДж/(кг·К)	$\mu,$ кг/(м·с)	$\nu \times 10^6,$ м ² /с	$\lambda,$ Вт/(м·К)	$\kappa \times 10^4,$ м ² /с	Pr
250	1,5618	0,9157	17,87	11,45	0,02259	0,15794	0,725
300	1,3007	0,9203	20,63	15,86	0,02676	0,22353	0,709
350	1,1133	0,9291	23,16	20,80	0,03070	0,2968	0,702
400	0,9755	0,9420	25,54	26,18	0,03461	0,3768	0,695
450	0,8682	0,9567	27,77	31,99	0,03828	0,4609	0,694
500	0,7801	0,9722	29,91	38,34	0,04173	0,5502	0,697
550	0,7096	0,9881	31,97	45,05	0,04517	0,6441	0,700
600	0,6504	1,0044	33,92	52,15	0,04832	0,7399	0,704
Оксид углерода							
220	1,55363	1,0429	$13,832 \times 10^{-6}$	8,903	0,01906	0,11760	0,758
250	0,8410	1,0425	15,40	11,28	0,02144	0,15063	0,750
300	1,13876	1,0421	17,843	15,67	0,02525	0,21280	0,737
350	0,97425	1,0434	20,09	20,62	0,02883	0,2836	0,728
400	0,85363	1,0484	22,19	25,99	0,03226	0,3605	0,722
450	0,75848	1,0551	24,18	31,88	0,0436	0,4439	0,718
500	0,68223	1,0635	26,06	38,19	0,03863	0,5324	0,718
550	0,62024	1,0756	27,89	44,97	0,04162	0,6240	0,721
600	0,56850	1,0877	29,60	52,06	0,04446	0,7190	0,724

Таблица В.2. Физические свойства насыщенных жидкостей

$t, ^\circ\text{C}$	$\rho,$ кг/м ³	$c_p,$ кДж/(кг · К)	$\mu,$ М ² /с ¹	$k,$ Вт/(М · К)	$K,$ м ² /с × 10 ⁷	Pr	β, K^{-1}
Аммиак NH₃							
-50	703,69	4,463	$0,435 \times 10^{-6}$	0,547	1,742	2,60	
-40	691,68	4,467	0,406	0,547	1,775	2,28	
-30	679,34	4,476	0,387	0,549	1,801	2,15	
-20	666,69	4,509	0,381	0,547	1,819	2,09	
-10	653,55	4,564	0,378	0,543	1,825	2,07	
0	640,10	4,635	0,373	0,540	1,819	2,05	
10	626,16	4,714	0,368	0,531	1,801	2,04	
20	611,75	4,798	0,359	0,521	1,775	2,02	$2,45 \times 10^{-3}$
30	596,37	4,890	0,349	0,507	1,742	2,01	
40	580,99	4,999	0,340	0,493	1,701	2,00	
50	564,33	5,116	0,330	0,476	1,654	1,99	
Вода H₂O							
0	1 002,28	4,2178	$1,788 \times 10^{-6}$	0,552	1,308	13,6	
20	1 000,52	4,1818	1,006	0,597	1,430	7,02	$0,18 \times 10^{-3}$
40	994,59	4,1784	0,658	0,628	1,512	4,34	
60	985,46	4,1843	0,478	0,651	1,554	3,02	
80	974,08	4,1964	0,364	0,668	1,636	2,22	

100	960,63	4,2161	0,294	0,680	1,680	1,74
120	945,25	4,250	0,247	0,685	1,708	1,446
140	928,27	4,283	0,214	0,684	1,724	1,241
160	909,69	4,342	0,190	0,680	1,729	1,099
180	889,03	4,417	0,173	0,675	1,724	1,004
200	866,76	4,505	0,160	0,665	1,706	0,937
220	842,41	4,610	0,150	0,652	1,680	0,891
240	815,66	4,756	0,143	0,635	1,639	0,871
260	785,87	4,949	0,137	0,611	1,577	0,874
280,6	752,55	5,208	0,135	0,580	1,481	0,910
300	714,26	5,728	0,135	0,540	1,324	1,019

Глицерин $C_3H_6(OH)_3$

0	1 276,03	2,261	0,00831	0,282	0,983	$84,7 \times 10^3$	
10	1 270,11	2,319	0,00300	0,284	0,965	31,0	
20	1 264,02	2,386	0,00118	0,286	0,947	12,5	$0,50 \times 10^{-3}$
30	1 258,09	2,445	0,00050	0,286	0,929	5,38	
40	1 252,01	2,512	0,00022	0,286	0,914	2,45	
50	1 244,96	2,583	0,00015	0,287	0,893	1,63	

Двуокись серы SO_2

-50	1 560,84	1,3595	$0,484 \times 10^{-6}$	0,242	1,141	4,24
-40	1 536,81	1,3607	0,424	0,235	1,130	3,74
-30	1 520,64	1,3616	0,371	0,230	1,117	3,31
-20	1 488,60	1,3624	0,324	0,225	1,107	2,93
-10	1 463,61	1,3628	0,288	0,218	1,097	2,62

Продолжение табл. В2

$t, ^\circ\text{C}$	$\rho,$ кг/м ³	$c_p,$ кДж/(кг · К)	$\mu,$ М ² /С	$k,$ Вт/(М · К)	$\alpha,$ М ² /С × 10 ⁷	Pr	β, K^{-1}
0	1 438,46	1,3636	0,257	0,211	1,081	2,38	$1,94 \times 10^{-3}$
10	1 412,51	1,3645	0,232	0,204	1,066	2,18	
20	1 386,40	1,3653	0,210	0,199	1,050	2,00	
30	1 359,33	1,3662	0,190	0,192	1,035	1,83	
40	1 329,22	1,3674	0,173	0,185	1,019	1,70	
50	1 299,10	1,3683	0,162	0,177	0,999	1,61	

Двуокись углерода CO₂

-50	1 156,34	1,84	$0,119 \times 10^{-6}$	0,0855	0,4021	2,96	$14,00 \times 10^{-3}$
-40	1 117,77	1,88	0,118	0,1011	0,4810	2,46	
-30	1 076,76	1,97	0,117	0,1116	0,5272	2,22	
-20	1 032,39	2,05	0,115	0,1151	0,5445	2,12	
-10	983,38	2,18	0,113	0,1099	0,5133	2,20	
0	926,99	2,47	0,108	0,1045	0,4578	2,38	
10	860,03	3,14	0,101	0,0971	0,3608	2,80	
20	772,57	5,0	0,091	0,0872	0,2219	4,10	
30	597,81	6,4	0,080	0,0703	0,0279	28,7	

Метилхлорид CH₃Cl

-50	1 052,58	1,4759	$0,320 \times 10^{-6}$	0,215	1,388	2,31
-40	1 033,35	1,4826	0,318	0,209	1,368	2,32
-30	1 016,53	1,4922	0,314	0,202	1,337	2,35
-20	999,39	1,5043	0,309	0,196	1,301	2,38
-10	981,45	1,5194	0,306	0,187	1,257	2,43
0	962,39	1,5378	0,302	0,178	1,213	2,49
10	942,36	1,5600	0,297	0,171	1,166	2,55
20	923,31	1,5860	0,293	0,163	1,112	2,63
30	903,12	1,6161	0,288	0,154	1,058	2,72
40	883,10	1,6504	0,281	0,144	0,996	2,83
50	861,15	1,6890	0,274	0,133	0,921	2,97

Моторное масло (свежее)

0	899,12	1,796	0,00428	0,147	0,911	47,100	$0,70 \times 10^{-3}$
20	888,23	1,880	0,00090	0,145	0,872	10,400	
40	876,05	1,964	0,00024	0,144	0,834	2,870	
60	864,04	2,047	$0,839 \times 10^{-4}$	0,140	0,800	1,050	
80	852,02	2,131	0,375	0,138	0,769	490	
100	840,01	2,219	0,203	0,137	0,738	276	
120	828,96	2,307	0,124	0,135	0,710	175	
140	816,94	2,395	0,080	0,133	0,686	116	
160	805,89	2,483	0,056	0,132	0,663	84	

Продолжение табл. В2

$t, ^\circ\text{C}$	$\rho,$ кг/м ³	$c_p,$ кДж/(кг · К)	$\mu,$ М ² /С	$k,$ Вт/(М · К)	$\alpha,$ М ² /С × 10 ⁷	Pr	β, K^{-1}
Ртуть Hg							
0	13 628,22	0,1403	$0,124 \times 10^{-6}$	8,20	42,99	0,0288	$1,82 \times 10^{-4}$
20	13 579,04	0,1394	0,114	8,69	46,06	0,0249	
50	13 505,84	0,1386	0,104	9,40	50,22	0,0207	
100	13 384,58	0,1373	0,0928	10,51	57,16	0,0162	
150	13 264,28	0,1365	0,0853	11,49	63,54	0,0134	
200	13 144,94	0,1570	0,0802	12,34	69,08	0,0116	
250	13 025,60	0,1357	0,0765	13,07	74,06	0,0103	
315,5	12 847	0,134	0,0673	14,02	81,5	0,0083	
Фреон CCl₂F₂							
-50	1 546,75	0,8750	$0,310 \times 10^{-6}$	0,067	0,501	6,2	$2,63 \times 10^{-3}$
-40	1 518,71	0,8847	0,279	0,069	0,514	5,4	
-30	1 489,56	0,8956	0,253	0,069	0,526	4,8	
-20	1 460,57	0,9073	0,235	0,071	0,539	4,4	
-10	1 429,49	0,9203	0,221	0,073	0,550	4,0	

0	1 397,45	0,9345	0,214	0,073	0,557	3,8
10	1 364,30	0,9496	0,203	0,073	0,560	3,6
20	1 330,18	0,9659	0,198	0,073	0,560	3,5
30	1 295,10	0,9835	0,194	0,071	0,560	3,5
40	1 257,13	1,0019	0,191	0,069	0,555	3,5
50	1 215,96	1,0216	0,190	0,067	0,545	3,5

Эвтектический раствор хлорида кальция, 29,9% Ca Cl₂

-50	1 319,76	2,608	$36,35 \times 10^{-6}$	0,402	1,166	312
-40	1 314,96	2,6356	24,97	0,415	1,200	208
-30	1 310,15	2,6611	17,18	0,429	1,234	139
-20	1 305,51	2,688	11,04	0,445	1,267	87,1
-10	1 300,70	2,713	6,96	0,459	1,300	53,6
0	1 296,06	2,738	4,39	0,472	1,332	33,0
10	1 291,41	2,763	3,35	0,485	1,363	24,6
20	1 286,61	2,788	2,72	0,498	1,394	19,6
30	1 281,96	2,814	2,27	0,511	1,419	16,0
40	1 277,16	2,839	1,92	0,523	1,445	13,3
50	1 272,51	2,868	1,65	0,535	1,468	11,3

Этиленгликоль C₂H₄ (OH)₂

0	1 130,75	2,294	$57,53 \times 10^{-6}$	0,242	0,934	615	$0,65 \times 10^{-3}$
20	1 116,65	2,382	19,18	0,249	0,939	204	
40	1 101,43	2,474	8,69	0,256	0,939	93	
60	1 087,66	2,562	4,75	0,260	0,932	51	
80	1 077,56	2,650	2,98	0,261	0,921	32,4	
100	1 058,50	2,742	2,03	0,263	0,908	22,4	

Таблица В.3. Физические свойства жидких металлов

Металл	$T_{\text{плавл}},$ °C	$T_{\text{кип}},$ °C	$T,$ °C	$\rho,$ кг/м ³	$c_p,$ кДж/(кг·К)	$\mu \times 10^4,$ кг(м·с)	$\nu \times 10^6,$ м ² /с	$k,$ Вт/(м·К)	$\kappa \times 10^6,$ м ² /с	Pr
Висмут	271	1477	315	10 011	0,144	16,2	0,160	16,4	11,25	0,0142
			538	9739	0,155	11,0	0,113	15,6	10,34	0,0110
			760	9467	0,165	7,9	0,083	15,6	9,98	0,0083
Свинец	327	1737	371	10 540	0,159	2,40	0,023	16,1	9,61	0,024
			704	10 140	0,155	1,37	0,014	14,9	9,48	0,0143
Литий	179	1317	204,4	509,2	4,365	5,416	1,1098	46,37	20,96	0,051
			315,6	498,8	4,270	4,465	0,8982	43,08	20,32	0,0443
			426,7	489,1	4,211	3,927	0,8053	38,24	18,65	0,0432
			537,8	476,3	4,171	3,473	0,7304	30,45	15,40	0,0476
Ртуть	-38,9	357	-17,8	13 707,1	0,1415	18,334	0,1342	9,76	5,038	0,0266
			93,3	13 409,4	0,1365	12,224	0,0903	10,38	5,619	0,0161
			204,4	13 168,1	0,1356	10,046	0,0748	12,63	7,087	0,0108
Натрий	97,8	883	93,3	931,6	1,384	7,131	0,7689	84,96	56,29	0,0116
			204,4	907,5	1,339	4,521	0,5010	80,81	66,80	0,0075
			315,6	878,5	1,304	3,294	0,3766	75,78	66,47	0,00567
			426,7	852,8	1,277	2,522	0,2968	69,39	64,05	0,00464
			537,8	823,8	1,264	2,315	0,2821	64,37	62,09	0,00455
			648,9	790,0	1,261	1,964	0,2496	60,56	61,10	0,00408
			760,0	767,5	1,270	1,716	0,2245	56,58	58,34	0,00385
Калий	63,9	760	426,7	741,7	0,766	2,108	0,2839	39,45	69,74	0,0041
			537,8	714,4	0,762	1,711	0,2400	36,51	67,39	0,0036
			648,9	690,3	0,766	1,463	0,2116	33,74	64,10	0,0033
			760,0	667,7	0,783	1,331	0,1987	31,15	59,86	0,0033
NaK (56% Na, 44% K)	-11,1	784	93,3	889,8	1,130	5,622	0,6347	25,78	25,76	0,0246
			204,4	865,6	1,089	3,803	0,4414	26,47	28,23	0,0155
			315,6	838,3	1,068	2,935	0,3515	27,17	30,50	0,0115
			426,7	814,2	1,051	2,150	0,2652	27,68	32,52	0,0081
			537,8	788,4	1,047	2,026	0,2581	27,68	33,71	0,0076
			648,9	759,5	1,051	1,695	0,2240	27,68	34,86	0,0064

Таблица В.4. Физические свойства твердых металлов

Металл	$T_{\text{плавл}} \text{ } ^\circ\text{C}$	Физические свойства при 20 °С				Теплопроводность k , Вт/(м · К)								
		ρ , кг/м ³	c_p , кДж/(кг·К)	k , Вт/(м·К)	$\kappa \times 10^5$, м ² /с	-100 °С	0 °С	100 °С	200 °С	300 °С	400 °С	600 °С	800 °С	1000 °С
Алюминий чистый	660	2707	0,896	204	8,418	215	202	206	215	228	249			
Al-Cu (дуралюмин), 94—96% Al, 3—5% Cu, следы Mg		2787	0,883	164	6,676	126	159	182	194					
Al-Si (силумин), 86,5% Al, 1% Cu		2659	0,867	137	5,933	119	137	144	152	161				
Al-Si (алусил), 78—80% Al, 20—22% Si		2627	0,854	161	7,172	144	157	168	175	178				
Al-Mg-Si, 97% Al, 1% Mg, 1% Si, 1% Mn		2707	0,892	177	7,311		175	189	204					
Бериллий	1277	1850	1,825	200	5,92									
Висмут	272	9780	0,122	7,86	0,66									
Вольфрам	3387	19 350	0,1344	163	6,271		166	151	142	133	126	112	76	
Железо чистое	1537	7897	0,452	73	2,034	87	73	67	62	55	48	40	36	35
ковкое, 0,5% C		7849	0,46	59	1,626		59	57	52	48	45	36	33	33
сталь (до 1,5% C) углеродистая														
C ≈ 0,5%		7833	0,465	54	1,474		55	52	48	45	42	35	31	29
1,0%		7801	0,473	43	1,172		43	43	42	40	36	33	29	28
1,5%		7753	0,486	36	0,970		36	36	36	35	33	31	28	28

Продолжение табл. В.4.

Металл	$T_{\text{плав}}, ^\circ\text{C}$	Физические свойства при 20 °С				Теплопроводность κ , Вт/(м · К)								
		ρ , кг/м ³	c_p , кДж/(кг·К)	k , Вт/(м·К)	$\kappa \times 10^5$, м ² /с	-100 °С	0 °С	100 °С	200 °С	300 °С	400 °С	600 °С	800 °С	1000 °С
Ni ≈ 0%		7897	0,452	73	2,026									
20%		7933	0,46	19	0,526									
40%		8169	0,46	10	0,279									
80%		8618	0,46	35	0,872									
инвар, 36% Ni		8137	0,46	10,7	0,286									
хромистая														
Cr ≈ 0%		7897	0,452	73	2,026	87	73	67	62	55	48	40	36	35
1%		7865	0,46	61	1,665		62	55	52	47	42	36	33	33
5%		7833	0,46	40	1,110		40	38	36	36	33	29	29	29
20%		7689	0,46	22	0,635		22	22	22	22	24	24	26	29
хромоникелевая														
15% Cr, 10% Ni		7865	0,46	19	0,527									
18% Cr, 8% Ni (V2A)		7817	0,46	16,3	0,444		16,3	17	17	19	19	22	27	31
20% Cr, 15% Ni		7833	0,46	15,1	0,415									
25% Cr, 20% Ni		7865	0,46	12,8	0,361									
вольфрамовая														
W = 0%		7897	0,452	73	2,026									
1%		7913	0,448	66	1,858									
5%		8073	0,435	54	1,525									
10%		8314	0,419	48	1,391									
Кадмий	321	8650	0,231	96,8	4,84									
Магний														
чистый	650	1746	1,013	171	9,708	178	171	168	163	157				
сплав с алюминием (электролитический), 6—8% Al, 1—2% Zn		1810	1,00	66	3,605		52	62	74	83				

Медь																	
чистая	1085	8954	0,3831	386	11,234	407	386	379	374	369	363	353					
алюминиевая																	
бронза, 95% Cu, 5% Al		8666	0,410	83	2,330												
бронза, 75% Cu, 25% Sn		8666	0,343	26	0,859												
красная латунь (томпак), 85% Cu, 9% Sn, 6% Zn		8714	0,385	61	1,804		59	71									
латунь, 70% Cu, 30% Zn		8522	0,385	111	3,412	88		128	144	147	147						
нейзильбер, 62% Cu, 15% Ni, 22% Zn		8618	0,394	24,9	0,733	19,2		31	40	45	48						
константан, 60% Cu, 40% Ni		8922	0,410	22,7	0,612	21		22,2	26								
Молибден	2621	10 220	0,251	123	4,790	138	125	118	114	111	109	106	102	99			
Никель																	
чистый (99,9%)	1455	8 906	0,4459	90	2,266	104	93	83	73	64	59						
Ni-Cr, 90% Ni, 10% Cr		8 666	0,444	17	0,444		17,1	18,9	20,9	22,8	24,6						
80% Ni, 20% Cr		8314	0,444	12,6	0,343		12,3	13,8	15,6	17,1	18,0	22,5					
Олово (чистое)	232	7 304	0,2265	64	3,884	74	65,9	59	57								
Свинец	328	11 373	0,130	35	2,343	36,9	35,1	33,4	31,5	29,8							
Серебро																	
абсолютно чистое	962	10 524	0,2340	419	17,004	419	417	415	412								
чистое (99,9%)		10 525	0,2340	407	16,563	419	410	415	374	362	360						
Уран	1133	19 070	0,116	27,6	1,25												
Цинк (чистый)	420	7 144	0,3843	112,2	4,106	114	112	109	106	100	93						

Приложение С

Г-, В- и неполные В-функции

Г-функция определяется выражением

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Рекуррентная формула

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha).$$

α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$
1,00	1,0000	1,35	0,8912	1,70	0,9086
1,05	0,9735	1,40	0,8873	1,75	0,9191
1,10	0,9514	1,45	0,8857	1,80	0,9314
1,15	0,9330	1,50	0,8862	1,85	0,9456
1,20	0,9182	1,55	0,8889	1,90	0,9618
1,25	0,9064	1,60	0,8935	1,95	0,9799
1,30	0,8975	1,65	0,9001	2,00	1,0000

В-функция определяется выражением

$$B_1(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = B_1(\beta, \alpha).$$

Неполная В-функция определяется выражением

$$B_x(\alpha, \beta) = \int_0^x t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt.$$

Рекуррентная формула

$$B_x(\alpha, \beta) = B_1(\alpha, \beta) - B_{1-x}(\alpha, \beta).$$

В приведенной ниже таблице, заимствованной из работы [1], даны отношения В-функций $I_x(\alpha, \beta) = V_x(\alpha, \beta)/V_1(\alpha, \beta)$ для типичных сочетаний α и β :

Отношения $I_x(\alpha, \beta)$ неполных В-функций

x	$\alpha=1/3$ $\beta=2/3$	$\alpha=1/3$ $\beta=4/3$	$\alpha=1/3$ $\beta=8/3$	$\alpha=2/3$ $\beta=4/3$	$\alpha=1/9$ $\beta=8/9$	$\alpha=1/9$ $\beta=10/9$	$\alpha=1/9$ $\beta=20/9$	$\alpha=8/9$ $\beta=10/9$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,02	0,2249	0,3068	0,4007	0,0912	0,6346	0,6588	0,7281	0,0342
0,04	0,2838	0,3859	0,5007	0,1443	0,6856	0,7113	0,7845	0,0628
0,06	0,3254	0,4410	0,5684	0,1886	0,7173	0,7439	0,8186	0,0917
0,08	0,3588	0,4845	0,6204	0,2278	0,7407	0,7679	0,8431	0,1174
0,10	0,3872	0,5210	0,6627	0,2636	0,7595	0,7870	0,8622	0,1416
0,20	0,4924	0,6506	0,8008	0,4124	0,8213	0,8490	0,9199	0,2607
0,30	0,5694	0,7377	0,8793	0,5321	0,8603	0,8870	0,9506	0,3715
0,40	0,6337	0,8038	0,9284	0,6339	0,8895	0,9146	0,9696	0,4765
0,50	0,6911	0,8566	0,9599	0,7225	0,9133	0,9362	0,9820	0,5767
0,60	0,7448	0,8998	0,9796	0,7999	0,9335	0,9538	0,9901	0,6725
0,70	0,7970	0,9352	0,9912	0,8671	0,9515	0,9686	0,9952	0,7640
0,80	0,8501	0,9640	0,9972	0,9244	0,9679	0,9812	0,9982	0,8507
0,90	0,9084	0,9863	0,9996	0,9706	0,9835	0,9917	0,9996	0,9313
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$V_1(\alpha, \beta)$	3,6275	2,6499	2,0153	1,2092	9,1853	8,8439	7,9839	1,0206

ЛИТЕРАТУРА

1. Baxter D.C., Reynolds W.C., Fundamental solutions for heat transfer from nonisothermal flat plates, *J. Aero. Sci.*, **25**, 403, 1958.

Приложение D

Программа на языке Фортран для реализации метода Хеда

В этом приложении приведена программа для ЭВМ, позволяющая рассчитывать развитие турбулентного пограничного слоя на поверхности плоских тел методом Хеда. Программа составлена на алгоритмическом языке Фортран IV и основана на численном интегрировании уравнений (3.68) и (6.117) методом Рунге — Кутта четвертого порядка [1]. Чтобы решить указанные уравнения этим методом, необходимо задать следующие аргументы:

X — зависимая переменная x . Необходимо ввести ее начальное значение.

B — число зависимых переменных, которые требуется вычислить. Например,

$$\begin{bmatrix} \theta \\ u_e \theta H_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(1) \\ B(2) \end{bmatrix}.$$

Должны быть заданы начальные значения θ и $u_e \theta H_1$.

C — правые части дифференциальных уравнений, например:

$$\begin{bmatrix} \frac{c_f}{2} - (H+2) \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} \\ u_e F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(1) \\ C(2) \end{bmatrix}.$$

DX — приращения x .

N — число совместных уравнений, которые требуется проинтегрировать.

F — N -мерный массив, используемый в подпрограмме RKM для хранения значений массива B .

G — $4N$ -мерный массив, содержащий промежуточные значения, вычисляемые подпрограммой. Чтобы вычислить один вход по G , используется четыре входа по C .

IS — программная переменная, которую следует принять равной нулю, чтобы задействовать подпрограмму. В дальнейшем эта переменная автоматически принимает значения 1, 2, 3 и 4; после вычисления переменных для *X* и массива *B* она вновь полагается равной нулю.

Так как для решения уравнения (3.68) необходимо задать распределение скоростей во внешнем потоке, вводится $u_e(x)/u_\infty$, [UE(I)] в функции расстояния вдоль поверхности x/L [X(I)], где через u_∞ и L обозначены соответственно скорость набегающего потока и характерная длина. В качестве начальных условий в первом сечении задаются безразмерная толщина потери импульса θ/L , [T(1)] и формпараметр H [H(1)]. Кроме того, задается опорное число Рейнольдса $R_L = u_\infty L/\nu$ [RL] и общее число сечений по x [NXT]. Производная скорости внешнего потока du/dx вычисляется по трехточечной интерполяционной формуле Лагранжа.

```

COMMON/SHARE/ NXT, RL, X(41), UE(41), DUEDX(41), T(41), S(41), H(41),
1 RTH(41), CF(41)
C -----
1 RGNG(X1, X2, X3, Y1, Y2, Y3, Z) = Y1*(2.0*Z-X2-X3)/(X1-X2)/(X1-X3) +
1 Y2*(2.0*Z-X1-X3)/(X2-X1)/(X2-X3) + Y3*(2.0*Z-X1-X2)/(X3-X1)
1 / (X3-X2)
C
1 READ(5, 2, END=20) NXT, RL, T(1), H(1)
READ(5, 3) (X(I), I=1, NXT)
READ(5, 3) (UE(I), I=1, NXT)
X(NXT+1) = 2. * X(NXT) - X(NXT-1)
C ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРАДИЕНТА СКОРОСТИ ПО ТРЕХТОЧЕЧНОЙ ФОРМУЛЕ ЛАГРАНЖА
NXTM1 = NXT-1
DUEDX(1) = RGNG(X(1), X(2), X(3), UE(1), UE(2), UE(3), X(1))
DUEDX(NXT) = RGNG(X(NXT-2), X(NXT-1), X(NXT), UE(NXT-2), UE(NXT-1),
1 UE(NXT), X(NXT))
DO 10 I=2, NXTM1
10 DUEDX(I) = RGNG(X(I-1), X(I), X(I+1), UE(I-1), UE(I), UE(I+1), X(I))
C
S(1) = UE(1)*T(1)*HOFH1(-H(1))
CALL STNDRD
C
WRITE(6, 4)
DO 15 I=1, NXT
H1 = S(I)/UE(I)/T(I)
DELST = T(I)*H(I)
DELTA = T(I)*H1+DELST
WRITE(6, 5) I, X(I), UE(I), DUEDX(I), T(I), H(I), DELST, DELTA, CF(I),
1 RTH(I)
15 CONTINUE
GOTO 1
20 STOP
C -----
2 FORMAT(15, 3F10.0)
3 FORMAT(6F10.0)
4 FORMAT(1H1, 1X, 2HNX, 6X, 1HX, 12X, 2HUE, 10X, 5HDUEDX, 9X, 5HTHETA, 11X,
1 1HH, 11X, 5HDELST, 9X, 5HDELTA, 11X, 2HCF, 10X, 6HRTHETA, /)
5 FORMAT(1H , I3, 9E14.6)
END

```

576 Приложение D

```

SUBROUTINE STNDRD
COMMON/SHARE/ NXT,RL,X{41},UE{41},DUEDX{41},T{41},S{41},H{41},
1 RTH{41},CF{41}
DIMENSION C(2),B(2),Z(2),G(8)
C -----
N = 2
IS = 0
XX = X(1)
B(1) = T(1)
B(2) = S(1)
UI = UE(1)
UP = DUEDX(1)
DX = X(2)-X(1)
NXTP1 = NXT+1
DO 100 I=2,NXTP1
DO 110 LL=1,4
GO TO (18,16,18,17), LL
16 UI = (UI+UE(I))/2.0+DX*(UP-DUEDX(I))/8.0
UP = (UP+DUEDX(I))/2.0
GO TO 18
17 UI = UE(I)
UP = DUEDX(I)
18 CONTINUE
H1 = B(2)/B(1)/UI
IF ( H1 .LE. 3.0 ) GO TO 120
HB = HOFH1(H1)
RTHE = UI*B(1)*RL
CF02 = 0.123/10.0** (0.678*HB)/RTHE**0.268
C(1) = -(HB+2.0)*B(1)/UI*UP*CF02
C(2) = UI*0.0306/(H1-3.0)**0.6169
IF(LL .GT. 1) GO TO 19
H(I-1) = HB
RTH(I-1) = RTHE
CF(I-1) = 2.0*CF02
IF(I .GT. NXT) GO TO 100
19 CONTINUE
110 CALL RKN(XX,B,C,DX,N,Z,G,IS)
T(I) = B(1)
S(I) = B(2)
DX = X(I+1)-X(I)
100 CONTINUE
RETURN
120 WRITE(6,10)I
10 FORMAT(1H0,'** WARNING : PROGRAM FAILS AT NX=',I3,
1 ' INDICATING POSSIBILITY OF FLOW SEPARATION **',/)
NXT = I-1
RETURN
END
FUNCTION HOFH1(A)
C H = FUNCT(H1=A), ЕСЛИ ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ, ПОМЕНЯТЬ ЗНАК
C H1= FUNCT(H=-A)
REAL C1/1.5501/,C2/0.6778/,C3/-3.064/,C4/3.3/,C5/0.8234/,
1 C6/1.1/,C7/-1.287/
C -----
HOFH1 = 0.0
IF(A .LT. -C6) GO TO 2
IF(A .LE. C4) RETURN
IF(A .LT. 5.3) GO TO 3
HOFH1 = ((A-C4)/C5)**(1.0/C7)+C6
RETURN
3 HOFH1 = ((A-C4)/C1)**(1.0/C3)+C2
RETURN
2 IF(A .LT. -1.6) GO TO 4
HOFH1 = C5*(-A-C6)**C7+C4
RETURN

```

```

4 HOFH1 = C1*(-A-C2)**C3+C4
RETURN
END

SUBROUTINE RKM(A,B,C,DX,N,F,G,IS)
DIMENSION B(1),C(1),F(1),G(1)
-----
C   IS = IS+1
GO TO (10,30,60,80), IS
C   ПЕРВЫЙ ВХОД
10 E = A
DO 20 I=1,N
F(I) = B(I)
G(4*I-3) = C(I)*DX
20 B(I) = F(I)+G(4*I-3)/2.0
GO TO 50
C   ВТОРОЙ ВХОД
30 DO 40 I=1,N
G(4*I-2) = C(I)*DX
40 B(I) = F(I)+G(4*I-2)/2.0
50 A = E+DX/2.0
GO TO 100
C   ТРЕТИЙ ВХОД
60 DO 70 I=1,N
G(4*I-1) = C(I)*DX
70 B(I) = F(I)+G(4*I-1)
A = E+DX
GO TO 100
C   ЧЕТВЕРТЫЙ ВХОД
80 DO 90 I=1,N
G(4*I) = C(I)*DX
B(I) = G(4*I-3)+2.0*(G(4*I-2)+G(4*I-1))
90 B(I) = (B(I)+G(4*I))/6.0+F(I)
IS = 0
100 RETURN
END

```

ЛИТЕРАТУРА

1. Hildebrand F.B., Advanced Calculus for Application, Prentice-Hall, NJ, 1962.

Предметный указатель

- Автомодельность 88, 97—117,
134—135, 300, 302—308, 348—349
— внутренней части слоя 200—215,
416—423
— осесимметричного течения
134—135
— сжимаемого (сопряженного) те-
чения 381
Автомодельные (подобные) профи-
ли 22, 29, 88
— переменные 99, 134, 172, 196,
302, 311, 337, 348, 351, 376, 381
Анализ размерностей 200—206,
212—215, 265
Аналогия между движением вихрей
и молекул 12—13
— — переносом массы и количест-
ва движения 21
— — — тепла и количества движе-
ния (аналогия Рейнольдса)
19—23, 70, 114, 193, 215, 227,
281, 320, 434
- Бернулли* уравнение 63, 66
Бета-функция 232, 572—573
Блазиуса течение (ламинарный по-
граничный слой с постоянным
давлением) 108, 120, 131, 352
Буссинеска приближение 25, 332
- Ван Дриста преобразование
421—425
— — формула для поверхностного
трения 427—433
— — — подслоя 208—212
Вдув на стенке 109—110, 141, 206,
238
Веер волн разрежения в сверхзвуко-
вом потоке 394
Взаимодействие вязко-невязкое 290,
399, 409
— с вытеснением 291
— свободное 399—410
- Внешняя часть пограничного слоя
197, 199, 215—218, 423—427
Внутренняя часть пограничного
слоя 196—197, 200—215, 416—423
— — — — закон для скорости
200—202
— — — — — температуры
202—204
Воды свойства 14, 15, 19, 567
Выталкивающая сила 10, 27, 322,
330—372, 524—535
Вязкое напряжение 9, 36—39
— — — — — градиент 39, 61
— — — — — закон 13, 37—39
Вязкость 9, 13—15
— влияние на турбулентное тече-
ние 205, 207—210
— зависимость от температуры
13—15, 378, 416
— закон *Сатерленда* 13
— — *Чепмена—Рубезина* 378
— кинематическая 13
— объемная 36, 74
— результаты измерения 14, 15,
563, 558—571
— турбулентная 29
- Газов кинетическая теория 13, 19
— свойства 558—561
— уравнение состояния 47, 68
Гамма-функция 232, 572—573
Гёртлера параметр 319, 323
«Гидравлически гладкая» поверх-
ность 214
Гидравлический диаметр 169—170
Гидростатическое давление 332
«Глобальное» уравнение неразрыв-
ности 177
Головная часть затупленная 135
— — коническая 135
Горение 17, 330—331
Градиент давления 22, 39, 220
— напряжения 13, 39, 59

- Граничные условия 9, 22, 23, 28, 54, 59, 61, 86—91, 99, 474
 — — для внешнего течения 98—99, 119
 — — — внутреннего течения 90, 166
 — — — пристенной струи 143
 — — — свободного сдвигового слоя 87, 302, 303, 308, 311
 — — — сопряженного течения 91, 377
 — — — течения в канале 90, 165, 167
 — — — — с выталкивающими силами 336, 351, 356
 — — на двух границах 110
- Давление 22, 24, 36
 — градиент 22, 31, 68—69, 322, 326
 — — влияние на пограничный слой 108, 233—244, 381—393, 440—451
 — — нормальный 61, 62, 75, 88
 — — параметр 103, 381
 — — расчет для течения в канале 181
 — работа 43, 78
- Демпфирования длина (коэффициент демпфирования *Ван Дриста*) 208, 210, 217—218, 239, 276
- Динамическая скорость 200
 — температура 200
- Динамическое число *Маха* 417
- Диссипация кинетической энергии средней 30, 45—46, 53, 76—77, 203, 375, 419
 — — турбулентности 52—53, 79, 419
- Дифференциальные методы 117, 129—131, 233—238
 — уравнения в частных производных 27, 32, 54 и далее
 — — — — параболические 62
 — — обыкновенные 27, 59, 81—86, 98—106, 117, 574
- Единицы измерения 26
- Жидкие металлы 113, 568
 — — низкие числа Прандтля 19
- Завесное охлаждение 140—149, 256—264
- Заданная плотность теплового потока в стенку 104, 165, 176, 178, 230—232
 — температура стенки 104, 165, 176, 226—230
- Закон дефекта скорости 215—218, 423—424
 — — температуры 216—218
 — для внутренней части пограничного слоя 200—202
 — стенки для скорости 200, 219
 — — — температуры 201—202, 233
- Затупленное тело 135
- Иллингворта—Стюартсона* преобразование 376—389, 411
- Интегральные методы 81, 117—130, 220, 250—256, 574—577
 — толщины 81, 117—130, 220, 250—256, 574—577
 — уравнения 29, 59, 81—86, 250—252
- Исходные переменные 174, 179
- Канал *см.* Течение внутреннее
 — круглого сечения *см.* Труба
 — некруглого сечения 11, 168—171, 218—220
 — — — вертикальный нагреваемый 360—368, 524—535
 — — — ламинарное течение 162—191, 463—469
 — — — плоский 162
 — — — сжимаемое течение 459—472
 — — — турбулентное течение 274—298, 469—472
- Кармана* постоянная 204
 — — для профиля температуры 205

- Кармана—Шоенгерра* формула для поверхностного трения 224—225
Касательное напряжение 13 и далее
Кинетическая теория газов 13, 19
— энергия 16
— — турбулентности 53
— — уравнение 45, 57
Кинетический нагрев 26, 28, 203, 207, 238, 265
Комбинированный закон стенки—следа для профиля скорости 218—219, 223
Конвекция вынужденная в течении с выталкивающими силами 330—332, 350—368
— естественная (свободная) 29, 330, 336—350, 524—535
Конечно-разностные методы 473—522
Конечные разности 474—475
Коническая головная часть 135
Коэффициент аналогии *Рейнольдса* 23, 115, 126, 193, 227—228, 434
— восстановления 73, 422
— диффузии 18, 21, 47
— поверхностного трения 23, 83, 108, 124, 193, 224—225
— — для шероховатой стенки 233, 434—440
— — расчетные формулы 174—177, 427—440
— температуропроводности 19
— — (теплопроводности) турбулентной 29, 55, 173. *См. также* Число *Прандтля* турбулентное
— теплоотдачи 122, 166
— — расчетные формулы для обтекания плоской пластины 227—233
— — — — течения в трубе 281—283
— теплопроводности 9, 17, 18, 41
— — зависимость от температуры 19
— трения для течения в канале 164, 168—169, 275—278, 284—285
- Кривизна поперечная 68, 93
Критическая точка (линия) 23, 127, 129
Крокко интеграл 381
Круглый цилиндр 127—129
- Ламинарное течение 16, 20, 97.
См. также Пограничный слой, Канал
Левека решение 155, 297
Логарифмический закон для профиля скорости 204—207, 218, 233, 259, 420
— — — — температуры 204—207, 233
— — — шероховатой поверхности 212—215
Людвига—Тилмана закон поверхностного трения 251
- Манглера* преобразование 68, 93, 132—136, 177
Маршевый метод решения дифференциальных уравнений 62, 86, 91, 473—484
Масло 114, 122
— высокое число *Прандтля* 19, 122
Массовая концентрация 18
Массообмен 18, 47, 109—110. *См. также* Вдун на стенке
— аналогия с теплообменом 16, 18
Метод «задержки подмешивания» *Грина* 252—253
— исключения из матрицы *Тейлора* (при анализе размерностей) 201—202
— конечно-разностный 473—522
— — неявный 476—484
— — явный 476—478
— контрольного объема 32—58
— матричной прогонки 473, 483—484, 487—488
— *Польгаузена* 119—123
— расчета турбулентного пограничного слоя *Хеда* 250—251, 271, 574—577

- Рунге—Кутта 111, 574
- Смита—Сполдинга 125, 136—138
- Твейтса 123—125, 136—138, 253
- Мизеса преобразование 150
- Навье—Стокса** уравнения 34, 60—62
- Надслой вязкий 220
- Напряжение вязкое 4, 23
 - градиент 59
 - поверхностного трения 9—10, 76
 - турбулентное (Рейнольдса) 50, 194, 300
- Натекание струи 11—12
- Начальные условия 130—132, 513
 - — для метода Твейтса 124, 136
 - — — пристенной струи 143—145
- Начальный участок гидродинамический 174—178, 290—295
 - — ненагреваемый 9—10, 118, 130—132, 171—176, 228—231, 497—498
 - — тепловой 171—184, 287—295
- Неразрывности (сохранения массы) уравнение 32—34, 49, 60, 98—100, 176, 177
 - — — «глобальное» 177
- Низкие числа Прандтля, влияние на теплообмен 183, 186, 209
 - — Рейнольдса, влияние на теплообмен 216, 219, 240, 424, 452
- Низкоскоростное течение (с низким числом Маха) 31, 47
 - — с большими изменениями температуры или плотности 70—72, 320—322
- Нормальное напряжение 12, 36—37
 - — турбулентное 194
- Ньютона метод решения нелинейных алгебраических уравнений 501
 - второй закон 12—14, 34
- Ньютоновская жидкость 36
- Область решения (интегрирования) 86
- Обтекание клина 107—108
- Объемная вязкость 37, 75
 - сила 28, 36
- Оператор переноса («субстанциональная производная») 38, 196
- Осесимметричная струя 306—307, 326—327
- Осесимметричное тело 66, 132—139
- Осесимметричный канал см. Труба
- Особенность в точке отрыва 410
- Осреднение по времени 13—15, 47—50
 - — массе 48
 - — Фавру 48
- Отрыв 23, 97, 128, 244, 351, 365, 387—393, 407
 - влияние теплообмена 390—392, 443—445
 - вызванный противодействием выталкивающей силы 352, 365
 - — скачком уплотнения 393—396
 - на поверхности с изломом 451—453
 - нулевой тепловой поток 117, 128
- Ошибка функция 113, 323
- Параметр поперечной кривизны 68, 93, 133, 177
- Первое начало термодинамики 17
- Передача влияния вверх по потоку 61—62, 86, 399—410
- Переменяемость переходного или турбулентного течения 240—241, 293
- Перенос количества движения 9—15 и далее
 - — — аналогия с переносом тепла 19—23
 - массы 18
 - примеси 10
 - тепла 9—12, 16—24, 41 и далее
- Переход 97, 220—224, 237—238, 240—242, 343, 350
 - влияние теплообмена 224, 343, 469—470
 - эмпирическая формула 240
 - «Переходная» шероховатость 214

- Пластина плоская см. Плоской пластины обтекание
 — — нагреваемая вертикальная 342—346
 — — наклонная или горизонтальная 346—350
 Плоской пластины обтекание (при постоянном давлении) 9—10, 20, 21, 88, 220—233
 — — — ламинарное 112, 116—122.
См. также Блазиуса течение
 — — — с выталкивающими силами 335—350
 — — — турбулентное 218—233
 Плотности пульсации 30, 48, 54, 68—74, 332
 — — влияние на турбулентность 30, 68—74, 332, 414
 Плотность теплового потока 17—18, 53
 — — — расчетные формулы 18, 53
 Поверхностное трение 9
 Пограничный слой 9—10, 20, 27, 59 и далее
 — — динамический 9
 — — ламинарный 97—148
 — — с нулевым градиентом давления 9—10, 21, 32, 88, 108, 120, 132, 220—233
 — — тепловой 9—10, 59
 — — турбулентный 11, 192—214, 414—456, 508—521
 — — — реакция на возмущение 197—200
 Пограничным слоем управление 139. *См. также* Вдув, Пристенная струя
 Погрешность измерений 193
 — численного расчета 106, 118, 474—480, 498
 Подмешивание 256, 268
 Подслой вязкий 51, 89, 197, 207—210, 215, 237—241, 416—422
 — теплопроводный 53, 207—210, 216, 237—241, 416—422
 Полностью развитое поле температур 162
 Преобразование Ван Дриста 421—426
 — *Иллинговорта—Стюартсона* 376—389, 411
 — *Коулса* 426—427
 — *Манглера* 68, 94, 132—135, 177, 221
 — *Мизеса* 150
 — сжимаемости 29, 376—389, 411
 — *Фолкнера—Скэн* 98—106, 132—136, 177, 232—236, 302—310, 350, 375
 — — для сжимаемого течения 375—377, 441, 460—461
 Преобразованные переменные 99, 134, 172, 177
 Приближение пограничного слоя 59—66
 — постоянных свойств 23—25, 39
 — тонкого сдвигового слоя 76, 77, 118
 — FLARE 409
 Присоединение 23, 398, 406
 Пристенная струя 98, 139—149, 256—264
 — — с выталкивающими силами 355—360, 535—541
 Программы численного расчета пристенной струи 535—540
 — — — свободного сдвигового слоя 541—553
 — — — сопряженного пограничного слоя 508—522
 — — — течения в канале 524—534
 — — — — — с выталкивающими силами 524—534
 — — — турбулентного пограничного слоя методом *Хеда* 574—577
 — — — уравнения энергии для течения в канале 488—498
 — — — числа *Нуссельта* для течения в трубе (задача 5.5) 185
 — — — числа *Стантона* методом *Смита—Сполдинга* (задача 4.28) 158
 Производство энергии турбулентности 79

- Пуазейля* течение 164
- Пульсации вязкости 49
- давления 68—69
 - определение 48
 - плотности 31, 48, 54, 68—74, 322
 - скорости 48—49
 - температуры 18, 68—74
 - — торможения 69—70
 - числа *Маха* 323—325
- Работа 16, 22, 42—45, 76
- давления 43, 78
 - сжатия 93, 94
- Развивающееся течение *см.* Течение на начальном участке
- Размерности 19, 26
- Разрыв температуры стенки *см.* Ступенька температуры стенки
- Режим полного проявления шероховатости 214
- Рейнольдса* аналогия 19—23, 71, 114, 193, 215, 227, 281, 320, 434
- уравнения 50
- Сатерленда* закон вязкости 13
- Свободное взаимодействие 399—410
- Свободный сдвиговый слой 10, 300—329. *См. также* Струя, Слой смещения, След
- Сдвиговый слой 13, 27
- — тонкий 13, 59—60, 76, 93.
- См. также* Пограничный слой
- Себиси—Смита* модель турбулентной вязкости 239—241, 342, 523—525
- Семейство профилей скорости полиномиальных 120—121
- — — степенных 120, 225—226
 - — температуры 228
- Сетка конечно-разностного расчета 475—477, 480
- Скачок уплотнения 321, 375
- — взаимодействие с пограничным слоем 393—410, 451—457
 - — косой 393—398
 - — прямой 393—398
- Скорость звука 379
- деформации 12, 36, 45, 53
 - — пульсации 53
- След 59, 99, 323, 325—326, 396—397
- Следа закон 218—219, 265, 423, 456
- параметр 218—219, 265, 277, 423—426
 - функция 218—219
- Слой смешения 244, 310—314, 398—399, 551—553
- — влияние разности плотностей 321—326
 - — — числа *Маха* 322—326
- Сохранение количества движения 12—13
- массы 32—34, 49, 176, 177
- Сполдинга—Чи* формула поверхностного трения 427—428
- Среднемассовая скорость 164, 165, 277
- Среднемассовые параметры 97, 164, 463
- Средние (осредненные по времени) значения параметров 13—15, 47
- Средняя температура перемешанной жидкости 163
- — слоя 97
- Струя 11—12, 22—23, 59, 88, 99
- взаимодействие с ударной волной 393—399
 - ламинарная 99, 301—310
 - натекающая на тело 11—12
 - пристенная 98, 139—149, 256—265
 - турбулентная 314—316, 541—551
- Ступенька температуры стенки 9—10, 64, 131—132, 228, 230
- Субстанциональная производная 38, 196
- Суперпозиция решений линейного уравнения 110, 230
- Сферы ламинарное обтекание 137—139

- Тело вращения см. Осесимметричное тело
 — с заостренной головной частью 135
- Температура 9
 — восстановления 73
 — промежуточная 427
 — профиль 202—210, 217—220
 — торможения (полная) 47
 — характерная 97
- Тепловая энергия 16
- Теплоемкость удельная 19
- Теплоизолированной стенки обтекание 72, 377, 381, 429
 — — температура 140
- Теплообмен конвективный 9—12, 16, 24, 41 и далее
- Теплопроводности закон 17, 46
- Теплопроводность продольная 64, 130
- Термодинамические свойства обычных жидкостей 13, 14, 19, 463, 558—571
- Течение в канале с тормозящим действием выталкивающих сил 363—368
 — — — ускоряющим действием выталкивающих сил 361—365
 — — области торможения осесимметричное 135
 — — — плоское 127, 129
 — внешнее 9—10, 21, 98. *См. также* Пограничный слой, Струя
 — внутреннее 162—184
 — возвратное 368, 397, 398, 401
 — вторичное 168
 — высокоскоростное 26, 29. *См. также* Течение сжимаемое, сопряженное
 — — эквивалентность низкоскоростному течению с подводом тепла 375
 — за уступом (обращенной назад ступенькой) 398—399
 — «клиновое» (обтекание клина) 107—108
 — *Куэтта* 184
 — на начальном участке 176—184
 — неавтономное 98, 102, 117—132
 — «невязкое» 9, 87
 — несжимаемое (с постоянной плотностью) 20
 — несопряженное 24, 31, 97
 — — уравнения 40, 47, 49—52, 54, 59—68
 — неустановившееся 34, 337
 — низкоскоростное (с низким числом Маха) 31, 47
 — плоское 32, 34, 54
 — показатель 67, 132, 169, 274
 — полностью развитое в канале или трубе 162—177, 274—287, 488—498
 — *Пуазейля* 104
 — свободноконвективное на наклонной пластине 346—347
 — сжимаемое (с переменной плотностью) 34, 323—326. *См. также* Течение сопряженное
 — — уравнения 49, 53—62
 — сопряженное 24—26, 28, 30, 320—326, 375—412, 414—469
 — *Хименца* (в окрестности критической линии) 108, 127
 — *Хоуарта* 156, 389, 443—448
- Толщина вытеснения 82—85, 98
 — потери импульса 82—84, 108
 — — энергии 84—85
 — — энтропии 84—85
 — — статической 84
 — сдвигового слоя 9, 106, 108—109, 303—305, 313, 315
 — теплопроводного слоя 125
- Транспозиции теорема 401
- Трехслойная теория 406, 453
- Тридиагональная матрица 480, 481, 483
- Труба (канал круглого сечения) 12, 162—168
 — расчет числа *Нуссельта* 167, 175, 183, 280—289, 498

- Турбулентная вязкость 29, 55, 194—196, 236, 258, 274, 315, 317, 342
 — — эмпирические формулы 239
 — плотность теплового потока 17, 53, 66, 193—195, 234, 300
 — температуропроводность (теплопроводность) 29, 55, 173
 Турбулентность 12, 13—14, 47—56
 — аналогия с молекулярным движением 13—14
 — влияние вязкости 64. *См. также* Подслой вязкий
 — модели 14—15, 196, 264, 325, 336. *См. также* Турбулентная вязкость, Число *Прандтля* турбулентное
- Удельная теплоемкость 16, 46
 Уравнение движения 34—40
 — — интегральное 81—83, 117, 118, 220, 250
 — неразрывности 32—34, 49, 60, 98—100, 176, 177
 — — «глобальное» 177
 — состояния 47, 68
 — энергии (энтальпии) 24, 46—47, 52—54, 64, 67, 302
 Уравнения движения (общие замечания) 54—56
 — переноса 25
 — пограничного слоя 27, 59—92
 — турбулентного течения 47—54, 65
 Ускорение 12, 39
 Устойчивость гидродинамическая *см.* Переход
 — численного расчета 478
- Факел 29, 330—331
 Физические свойства жидкостей 13, 14, 19, 463, 558—571
Фолкнера—Скэн преобразование 102—103, 132, 142, 173, 375
 Формпараметр пограничного слоя 83, 124, 251, 253, 385
 Функция тока 99, 178, 302, 310
- Хагена—Пуазейля* формула 184
- Цилиндр круглый 127—129
- Чепмена—Рубезина* закон вязкости 378, 404
 Численная схема *Крэнка—Николсона* 478—480
 — — «прямоугольник» 480—484, 498—508
 Число *Грасгофа* 335, 338, 341
 — *Маха* 26, 74—77, 322
 — — динамическое 47
 — — пульсации 324—325
 — *Нуссельта* 113, 167
 — *Пекле* 176, 204, 220
 — *Прандтля* 19—21, 59, 77, 204
 — — влияние на ламинарный теплообмен 111—117, 122, 126—129, 182—183, 307, 313—314
 — — — — течение с выталкивающими силами 352—355, 365
 — — — — турбулентный теплообмен 209, 211, 228—230, 280
 — — высокое, решения 114—115, 122, 179
 — — низкое, решения 113—115, 123
 — — турбулентное 21, 193—196, 217, 236, 239, 274, 315, 318, 320, 421, 433, 485
 — *Рейнольдса* 24, 59, 63, 220. *См. также* Переход
 — — влияние 216, 219, 240, 424, 451
 — — для внутренней части турбулентного слоя 204
 — — шероховатости 215
 — *Ричардсона* 330, 336, 356—359, 372
 — *Стантона* 23, 85, 114
 — — влияние градиента давления 240—245, 445—449
 — — эмпирические расчетные формулы 128, 137, 226—232. *См. также* Коэффициент аналогии *Рейнольдса*
 — *Шмидта* для диффузии примеси 22

- Шероховатая поверхность, расчетные формулы для внутренней части слоя 210—215
 — — — — — поверхностного трения 232—233, 433
 — — — — — теплообмена 215
- Шероховатость песочная 214, 219
 — влияние на теплообмен 215, 249, 285—287
- Щелевое сопло струи 140—144, 256—258
- Элементарный объем 36
- Эллипса обтекание 241
- Эллиптические уравнения в частных производных 62
 — — — — — влияние вверх по потоку 399
- Эмпирические соотношения для характеристик турбулентности 14, 24, 31, 193, 196, 252
- Энергия внутренняя (тепловая) 16
 — — — уравнение 46—47
 — — (тепловая плюс кинетическая) 16
 — — — — — уравнение 40—45
 — кинетическая 16
 — — турбулентности 53
 — потенциальная 17
 — уравнение 24, 46—47, 52—54, 64, 67, 302
 — — интегральное 81, 119
 — — преобразованное (автомодельное) 105, 177
 — — решение конечно-разностным методом 474—484
- Энтальпия 16
 — полная (торможения) 47
 — — — уравнение 57, 76—79
 — — — интегральное 84—86, 119
- Энтропии возрастание в ударной волне 393—394
- Эффективное (виртуальное) начало струи 309—310
 — — — турбулентного пограничного слоя 221
- Эффективность завесного охлаждения 140, 257
- Ячеистая структура конвекции 331, 349

Оглавление

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	8
1 ВВЕДЕНИЕ	9
1.1. Перенос количества движения	12
1.2. Тепло- и массообмен	16
1.3. Связь между переносом тепла и переносом количества движения	19
1.4. Сопряженное и несопряженное течения	24
1.5. Единицы измерения и размерности	26
1.6. Основное содержание книги	27
Задачи	31
Литература	31
2 УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ, ДВИЖЕНИЯ И ЭНЕРГИИ	32
2.1. Уравнение неразрывности	32
2.2. Уравнения движения	34
2.3. Уравнения внутренней энергии и энтальпии	40
2.4. Уравнения сохранения для турбулентного течения	47
2.5. Уравнения движения. Общие замечания	54
Задачи	56
Литература	58
3 УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ	59
3.1. Несопряженные течения	59
3.2. Оценка пульсаций плотности в сопряженных турбулентных течениях	68
3.3. Уравнения для сопряженных турбулентных течений	74
3.4. Интегральные уравнения	81
3.5. Граничные условия	86
3.6. Уравнения тонкого сдвигового слоя. Общие замечания	91
Задачи	93
Литература	96

4	НЕСОПРЯЖЕННЫЕ ЛАМИНАРНЫЕ ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ	97
	4.1. Анализ автомодельных течений	98
	4.2. Плоские автомодельные течения	106
	4.3. Плоские неавтомодельные течения	117
	4.4. Осесимметричные течения	132
	4.5. Пристенные струи и завесное охлаждение	139
	Задачи	149
	Литература	161
5	НЕСОПРЯЖЕННЫЕ ЛАМИНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛАХ	162
	5.1. Полностью развитое течение в канале	164
	5.2. Течение с тепловым начальным участком при полностью развитом поле скоростей	171
	5.3. Течение с гидродинамическим и тепловым начальными участками ...	176
	Задачи	184
	Литература	191
6	НЕСОПРЯЖЕННЫЕ ТУРБУЛЕНТНЫЕ ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ	192
	6.1. Составная структура турбулентного пограничного слоя	196
	6.2. Внутренняя часть слоя	200
	6.3. Внешняя часть слоя	215
	6.4. Слой в целом	218
	6.5. Плоский пограничный слой с нулевым градиентом давления	220
	6.6. Плоское течение с градиентом давления	233
	6.7. Пристенные струи и завесное охлаждение	256
	Задачи	265
	Литература	271
7	НЕСОПРЯЖЕННЫЕ ТУРБУЛЕНТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛАХ	274
	7.1. Полностью развитое течение в канале	274
	7.2. Длина теплового начального участка в условиях полностью развитого поля скоростей	287
	7.3. Гидродинамический и тепловой начальные участки	290
	Задачи	295
	Литература	298
8	СВОБОДНЫЕ СДВИГОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ	300
	8.1. Плоские ламинарные струи	301
	8.2. Ламинарный слой смешения между двумя однородными потоками, имеющими разные температуры	310
	8.3. Плоские турбулентные струи	314
	8.4. Турбулентный слой смешения между двумя однородными потоками, имеющими разные температуры	317

8.5. Сопряженные течения	320
Задачи	326
Литература	329
9 ТЕЧЕНИЯ С ВЫТАЛКИВАЮЩИМИ СИЛАМИ	330
9.1. Пограничные слои с естественной конвекцией	336
9.2. Пограничные слои со смешанной конвекцией	350
9.3. Пристенные струи. Завесный нагрев и охлаждение	355
9.4. Естественная и вынужденная конвекция в каналах и трубах.	360
9.5. Естественная конвекция в свободных сдвиговых течениях	368
Задачи	372
Литература	373
10 СОПРЯЖЕННЫЕ ЛАМИНАРНЫЕ ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ ...	375
10.1. Автомодельные течения	381
10.2. Неавтомодельные течения	389
10.3. Взаимодействие ударных волн с пограничным слоем	393
10.4. Указания по расчету течений с взаимодействиями, содержащих скачки уплотнения	406
Задачи	410
Литература	412
11 СОПРЯЖЕННЫЕ ТУРБУЛЕНТНЫЕ ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ	414
11.1. Анализ внутрислойной автомодельности для профилей скорости и температуры	416
11.2. Преобразования для сопряженных турбулентных течений	424
11.3. Плоский пограничный слой с нулевым градиентом давления	427
11.4. Плоское течение с градиентом давления	440
11.5. Взаимодействие скачков уплотнения с пограничным слоем	451
Литература	457
12 СОПРЯЖЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛАХ	459
12.1. Ламинарное течение в трубе с постоянной плотностью теплового потока	463
12.2. Ламинарные, переходные и турбулентные течения в охлажденной трубе	469
Литература	472
13 КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ	473
13.1. Обзор численных методов решения уравнений пограничного слоя	474
13.2. Решение уравнения энергии для внутреннего течения с полностью развитым профилем скорости	484
13.3. Программа на языке Фортран для расчета внутренних ламинарных и турбулентных течений с полностью развитым профилем скорости	488
13.4. Решение уравнений неразрывности, движения и энергии для течений в пограничных слоях	498

13.5. Программа на языке Фортран для расчета течений в сопряженных пограничных слоях	508
Литература	522
14 ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ ДЛЯ РАСЧЕТА ЗАДАЧ ТЕПЛООБМЕНА	523
14.1. Вынужденная и естественная конвекция между двумя вертикальными параллельными пластинами	524
14.2. Пристенная струя и завесный нагрев	535
14.3. Нагретая свободная турбулентная струя	541
14.4. Слой смешения между двумя однородными потоками жидкости с разными температурами	551
Литература	553
Приложение А. Коэффициенты перевода единиц измерения	554
Приложение В. Физические свойства газов, жидкостей, жидких и твердых металлов	558
Приложение С. Г-, В- и неполные В-функции	572
Литература	573
Приложение Д. Программа на языке Фортран для реализации метода Хеда ..	574
Литература	577
Предметный указатель	578

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2, изд-во «Мир».

Монография

Тунсер Себиси, Питер Брэдшоу

КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛОБМЕН
Физические основы и вычислительные методы

Заведующий редакцией академик В. С. Авдуевский
Зам. зав. редакцией В. И. Пропой
Ст. научный редактор О. Н. Вишнякова
Мл. редактор Л. Л. Савинова
Художник В. Я. Медников
Художественный редактор Н. М. Иванов
Технические редакторы Н. И. Борисова, Л. С. Тимофеева
Корректоры Н. В. Вавилова, Е. А. Валуева

ИБ № 5777

Подписано к печати 13.07.87. Формат 60 × 90^{1/16}.
Бумага офсетная № 1. Гарнитура таймс. Печать офсетная.
Объем 18,50 бум. л. Усл. печ. л. 37,00.
Усл. кр.-отт. 37,00. Уч.-изд. л. 35,69. Изд. № 7/4460.
Тираж 5550 экз. Зак. ~~489~~ Цена 5 р. 70 к.

Набрано в издательстве «Мир» на фотонаборном
комплексе «Компьюграфик»
129820, ГСП Москва, 1-Рижский пер., 2.

Тульская типография Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли
300600, Тула, проспект им. В. И. Ленина, 109.